This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

The Gift of

WILLIAM H. BUTTS, Ph.D.

A.B. 1878 A.M. 1879

Teacher of Mathematics

1898 to 1922

Assistant Dean, College of Engineering

1908 to 1922

Professor Emeritus

1922

RADCLIFFE OBSERVATORY OXFORD.

QA
803
.A1
1739

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, EQ. AURATO.

Perpetuis Commentariis illuſtrata, communi ſtudio

PP. THOMÆ LE SEUR & FRANCISCI JACQUIER

Ex Gallicanâ Minimorum Familiâ,

Matheſeos Profeſſorum.

TOMUS PRIMUS.



GENEVÆ,

Typis BARRILLOT & FILII Bibliop. & Typogr.

MDCCXXXIX.

RADCLIFFE
OBSERVATORY
OXFORD.

Gen Lib
Gift
Christian William H. Butts
10-14-1935
v. 1-3
add. ed.

RERUM MATHEMATICARUM STUDIOSIS, *PHILOSOPHIÆ NEWTONIANÆ* *INTERPRETES.*

QUàm recondita ſint ſimùl & utilia *Philoſophiæ Naturalis Principia Mathematica*, norunt ii omnes qui vel ipſum Clariſſimi Authoris nomen audierunt. Tanta eſt rerum dignitas atque ſublimitas, tanta ſermonis pluſquàm Geometrica brevitas, ut præſtantiſſimum illud opus pauciſſimis duntaxat Geometris factum videatur. Eas ob cauſas viris Matheſeos cultioriſque Phyſices ſtudioſis gratiſſimam fore putavimus, eo modo comparatam interpretationem, ut omnes tam utilis Philoſophiæ propoſitiones, corollaria omnia atquè ſcholia inoffenſo pede poſſint decurrere, qui vel ipſis Geometriæ & vulgaris Algebræ ele-

mentis probè imbuti ſunt. Quod ut præſtaremus, Mechanices & Calculi infinitorum principia, quantùm inſtituti noſtri ratio poſtulat, *Newtoni* veſtigiis inſiſtentes demonſtravimus; perbrevem, ſed theorematum fæcunditate plenum noſtris Commentariis inſeruimus tractatum Sectionum Conicarum; Quæ vel minimùm, nimiâ obſcuritate Lectori negotium parere poſſent, ea omnia exponere & in bono Lumine collocare conati ſumus; quæ in ſcholiis, corollariis, propoſitionumque ſerie, prætermiſſâ demonſtratione, pronuntiat *Newtonus*, præmiſſis vel interjectis Lemmatis ſcrupulosè demonſtrata invenient, qui in ſola doctiſſimi Authoris verba jurare nolunt; eximia quæ in *Newtoni* propoſitionibus latent inventa, deteximus atque evolvimus; tandem cùm præſtantiſſima illa ſummi viri principia non ſolùm intelligere, ſed & illàm quam ſibi aperuit ad inventionem viam explorare plurimùm delectationis habeat & utilitatis, diſperſâ huc & illuc generalia quædam problemata Lector

repe-

reperiet. Hæc ſunt quæ facere voluimus, quo exitu, penès benevolum Lectorem eſto judicium. Ex brevi illo commentariorum noſtrorum proſpectu ſatis patet quos nobis lectores poſtulemus; nec præſtantiſſimis Mathematicis nec imperito Philoſophorum vulgo nos ſcribere profitemur; ad hujuſce operis lectionem eos duntaxat admittimus qui ea quæ jam diximus elementa in promptu habent, & tali inſuper pollent mentis acie, ut longioris demonſtrationis vim atque ſeriem ſtudiosè perſequi & animo comprehendere poſſint.

De nòſtris Commentariis hæc ſatis dicta ſint. Verùm naturalis æquitas & mathematicus candor poſtulant, ut nos plurimùm debere fateamur Doctiſſimis Viris, DAVIDI GREGORIO, VARIGNONIO, JACOBO HERMANNO, JOANNI KEILLIO, aliiſque multis, qui varias *Newtonianæ Philoſophiæ* partes luculentis ſcriptis illuſtrarunt. Eâdem æquitatis atque ingenuitatis lege à nobis religiosè factum eſt, ut eos omnes quorum ſpoliis aliquandò ditеſcimus,

mus, in Commentariorum noſtrorum decurſu honoris causâ nominemus. Publicum quoque grati animi teſtimonium deeſſe nolumus Clariſſ. D^no^. J. L. CALANDRINO in Academiâ Genevenſi Profeſſore in rebus Mathematicis verſatiſſimo, qui hanc noſtram *Newtoni* principiorum editionem adornari curavit ad normam elegantiſſimæ illius editionis, quæ additionibus multis locupletata *Londini* prodiit anno 1726. Deindè id ſibi laboris aſſumpſit vir doctiſſimus non ſolum ut ſchemata incidi, ſuis locis diſponi, typographica menda corrigi ſedulò invigilaret, ſed etiam ea quæ jam laudavimus Sectionum Conicarum elementa compoſuit, & quæ à nobis non ſatis perſpicuè videbantur expoſita propriis notis aliquandò illuſtravit.

Hoc noſtro labore fruantur rerum mathematicarum Cultores.

ROMÆ *in Regio Conventu SS^æ^. Trinitatis*, *An.* 1739.

I L-

ILLUSTRISSIMÆ

SOCIETATI REGALI

A

SERENISSIMO REGE

CAROLO II

AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM

FUNDATÆ,

ET

AUSPICIIS

SERENISSIMI REGIS

GEORGII

FLORENTI

TRCTATUM HUNC D. D. D.

IS. NEWTON.

AUCTORIS PRÆFATIO AD LECTOREM.

CUM *veteres* mechanicam (*uti auctor eſt* Pappus) *in rerum naturalium inveſtigatione maximi fecerint; & recentiores, miſſis formis ſubſtantialibus & qualitatibus occultis, phænomena naturæ ad leges mathematicas revocare aggreſſi ſint: Viſum eſt in hoc tractatu* matheſin *excolere, quatenus ea ad* philoſophiam *ſpectat.* Mechanicam *verò duplicem veteres conſtituerunt:* rationalem, *quæ per demonſtrationes accuratè procedit, &* practicam. *Ad practicam ſpectant artes omnes manuales, à quibus utique* mechanica *nomen mutuata eſt. Cum autem artifices parùm accuratè operari ſoleant, fit ut* mechanica *omnis à* geometriâ *ita diſtinguatur, ut quicquid accuratum ſit ad* geometriam *referatur, quicquid minùs accuratum ad* mechanicam. *Attamen errores non ſunt artis, ſed artificum. Qui minùs accuratè operatur, imperfectior eſt mechanicus, & ſi quis accuratiſſimè operari poſſet, hic foret mechanicus omnium perfectiſſimus. Nam & linearum rectarum & circulorum deſcriptiones, in quibus* geometria *fundatur, ad* mechanicam *pertinent. Has lineas deſcribere* geometria *non docet, ſed poſtulat. Poſtulat enim ut tyro eaſdem accuratè deſcribere prius didicerit, quam limen attingat* geometriæ; *dein quomodo per has operationes problemata ſolvantur, docet; rectas & circulos deſcribere problemata ſunt, ſed non geometrica. Ex* mechanica *poſtulatur horum ſolutio, in* geometria *docetur ſolutorum uſus. Ac gloriatur* geometria *quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præſtet. Fundatur igitur* geometria *in praxi mechanica, & nihil aliud eſt quam* mechanicæ univerſalis *pars illa, quæ artem menſurandi accuratè*

curatè proponit ac demonſtrat. Cum autem artes manuales in corporibus movendis præcipuè verſentur, fit ut geometria *ad magnitudinem*, mechanica *ad motum vulgo referatur. Quo ſenſu* mechanica rationalis *erit ſcientia motuum, qui ex viribus quibuſcunque reſultant, & virium quæ ad motus quoſcunque requiruntur, accuratè propoſita ac demonſtrata. Pars hæc* mechanicæ *à veteribus in* potentiis quinque *ad artes manuales ſpectantibus exculta fuit, qui gravitatem (cum potentia manualis non ſit) vix aliter quam in ponderibus per potentias illas movendis conſiderarunt. Nos autem non artibus ſed philoſophiæ conſulentes, deque potentiis non manualibus ſed naturalibus ſcribentes, ea maximè tractamus, quæ ad gravitatem, levitatem, vim elaſticam, reſiſtentiam fluidorum & ejuſmodi vires ſeu attractivas ſeu impulſivas ſpectant: Et eâ propter, hæc noſtra tanquam philoſophiæ principia mathematica proponimus. Omnis enim philoſophiæ difficultas in eo verſari videtur, ut à phænomenis motuum inveſtigemus vires naturæ, deinde ab his viribus demonſtremus phænomena reliqua. Et huc ſpectant propoſitiones generales, quas libro primo & ſecundo pertractavimus. In libro autem tertio exemplum hujus rei propoſuimus per explicationem ſyſtematis mundani. Ibi enim, ex phænomenis cæleſtibus, per propoſitiones in libris prioribus mathematicè demonſtratas, derivantur vires gravitatis, quibus corpora ad ſolem & planetas ſingulos tendunt. Deinde ex his viribus per propoſitiones etiam mathematicas, deducuntur motus planetarum, cometarum, lunæ & maris. Utinam cætera naturæ phænomena ex principiis mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret. Nam multa me movent, ut nonnihil ſuſpicer ea omnia ex viribus quibuſdam pendere poſſe, quibus corporum particulæ per cauſas nondum cognitas vel in ſe mutuò impelluntur & ſecundum figuras regulares cohærent, vel ab invicem fugantur & recedunt: quibus viribus ignotis, philoſophi hactenus naturam fruſtrà tentarunt. Spero autem quod vel huic philoſophandi modo, vel veriori alicui, principia hîc poſita lucem aliquam præbebunt.*

In his edendis, vir acutiſſimus & in omni literarum genere eruditiſſimus Edmundus Halleius *operam navavit, nec ſolum typothetarum ſphalmata correxit & ſchemata incidi curavit ſed etiam auctor fuit, ut horum editionem aggrederer. Quippe cum demonſtratam a*

me

me ſiguram orbium cœleſtium impetraverat, rogare non deſtitit, ut eandem cum Societate Regali *communicarem, quæ deinde hortatibus & benignis ſuis auſpiciis effecit, ut de eâdem in lucem emittendâ cogitare inciperem. At poſtquam motuum lunarium inæqualitates aggreſſus eſſem, deinde etiam alia tentare cœpiſſem, quæ ad leges & menſuras gravitatis & aliarum virium, & ſiguras à corporibus ſecundum datas quaſcunque leges attractis deſcribendas, ad motus corporum plurium inter ſe, ad motus corporum in mediis reſiſtentibus, ad vires, denſitates & motus mediorum, ad orbes cometarum & ſimilia ſpectant, editionem in aliud tempus differendam eſſe putavi, ut cætera rimarer & unà in publicum darem. Quæ ad motus lunares ſpectant (imperfecta cum ſint) in corollariis propoſitionis* LXVI. *ſimul complexus ſum, ne ſingula methodo prolixiore quam pro rei dignitate proponere, & ſigillatim demonſtrare tenerer, & ſeriem reliquarum propoſitionum interrumpere. Nonnulla ſerò inventa locis minùs idoneis inſerere malui, quam numerum propoſitionum & citationes mutare. Ut omnia candidè legantur & defectus in materiâ tam difficili non tam reprehendatur, quam novis lectorum conatibus inveſtigentur, & benignè ſuppleantur, enixè rogo.*

Dabam *Cantabrigiæ*, e Collegio
S. Trinitatis, Maii 8. 1686.

IS. NEWTON.

AUCTORIS PRÆFATIO IN EDITIONEM SECUNDAM.

IN hâc ſecundâ Principiorum editione multa ſparſim emendantur, & nonnulla adjiciuntur. In libri primi ſectione II. *inventio virium, quibus corpora in orbibus datis revolvi poſſint, facilior redditur & amplior. In libri ſecundi ſectione* VII. *theoria reſiſtentiæ fluidorum accuratiùs inveſtigatur, & novis experimentis confirmatur. In libro tertio theoria lunæ & præceſſio æquinoctiorum ex principiis ſuis pleniùs deducuntur, & theoria cometarum pluribus & accuratiùs computatis orbium exemplis confirmatur.*

Dabam *Londini*,
Mar. 28. 1713.

IS. NEWTON.

EDI-

EDITORIS PRÆFATIO

IN

EDITIONEM SECUNDAM.

NEWTONIANÆ philoſophiæ novam tibi, lector benevole, diuque deſideratam editionem, plurimùm nunc emendatam atque auctiorem exhibemus. Quæ potiſſimum contineantur in hoc opere celeberrimo, intelligere potes ex indicibus adjectis: quæ vel addantur vel immutentur, ipſa te ferè docebit auctoris præfatio. Reliquum eſt, ut adjiciantur nonnulla de methodo hujus philoſophiæ.

Qui phyſicam tractandam ſuſceperunt, ad tres ferè claſſes revocari poſſunt. Extiterunt enim; qui ſingulis rerum ſpeciebus qualitates ſpecificas & occultas tribuerint; ex quibus deinde corporum ſingulorum operationes, ignotâ quâdam ratione, pendere voluerunt. In hoc poſita eſt ſumma doctrinæ ſcholaſticæ, ab *Ariſtotele* & Peripateticis derivatæ: Affirmant utique ſingulos effectus ex corporum ſingularibus naturis oriri; at unde ſint illæ naturæ non docent; nihil itaque docent. Cumque toti ſint in rerum nominibus, non in ipſis rebus; ſermonem quendam philoſophicum cenſendi ſunt adinveniſſe, philoſophiam tradidiſſe non ſunt cenſendi.

Alii ergo melioris diligentiæ laudem conſequi ſperarunt rejecta vocabulorum inutili farragine. Statuerunt itaque materiam univerſam homogeneam eſſe, omnem verò formarum varietatem, quæ in corporibus cernitur, ex particularum componentium ſimpliciſſimis quibuſdam & intellectu facillimis affectionibus oriri. Et rectè quidem progreſſio inſtituitur à ſimplicioribus ad magis compoſita, ſi particularum primariis illis affectionibus non alios tribuunt modos, quam quos ipſa tribuit natura. Verùm ubi licentiam ſibi aſſumunt, ponendi quaſcunque libet ignotas partium figuras & magnitudines, incertoſque ſitus & motus; quin & fingendi fluida quædam occulta, quæ corporum poros liberrimè permeent, omnipotente prædita

ta

ta ſubtilitate, motibuſque occultis agitata; jam ad ſomnia delabuntur, neglectâ rerum conſtitutione verâ: quæ ſanè frustra petenda eſt ex fallacibus conjecturis, cum vix etiam per certiſſimas obſervationes inveſtigari poſſit. Qui ſpeculationum ſuarum fundamentum deſumunt ab hypotheſibus; etiamſi deinde ſecundum leges mechanicas accuratiſſimè procedant; fabulam quidem elegantem fortè & venuſtam, fabulam tamen concinnare dicendi ſunt.

Relinquitur adeo tertium genus, qui philoſophiam ſcilicet experimentalem profitentur. Hi quidem ex ſimpliciſſimis quibus poſſunt principiis rerum omnium cauſas derivandas eſſe volunt: nihil autem principii loco aſſumunt, quod nondum ex phænomenis comprobatum fuerit. Hypotheſes non comminiſcuntur, neque in phyſicam recipiunt, niſi ut quæſtiones de quarum veritate diſputetur. Duplici itaque methodo incedunt, analyticâ & ſyntheticâ. Naturæ vires legeſque virium ſimpliciores ex ſelectis quibuſdam phænomenis per analyſin deducunt, ex quibus deinde per ſyntheſin reliquorum conſtitutionem tradunt. Hæc illa eſt philoſophandi ratio longè optima, quam præ cæteris meritò amplectendum cenſuit celeberrimus auctor noſter. Hanc ſolam utique dignam judicavit, in quâ excolendâ atque adornandâ operam ſuam collocaret. Hujus igitur illuſtriſſimum dedit exemplum, mundani nempe ſyſtematis explicationem è theoriâ gravitatis feliciſſimè deductam. Gravitatis virtutem univerſis corporibus ineſſe, ſuſpicati ſunt vel finxerunt alii: primus ille & ſolus ex apparentiis demonſtrare potuit, & ſpeculationibus egregiis firmiſſimum ponere fundamentum.

Scio equidem nonnullos magni etiam nominis viros, præjudiciis quibuſdam plus æquo occupatos, huic novo principio ægrè aſſentiri potuiſſe, & certis incerta identidem prætuliſſe. Horum famam vellicare non eſt animus: tibi potius, benevole lector, illa paucis exponere lubet, ex quibus tute ipſe judicium non iniquum feras.

Igitur ut argumenti ſumatur exordium à ſimpliciſſimis & proximis; diſpiciamus pauliſper qualis ſit in terreſtribus natura gravitatis, ut deinde tutiùs progrediamur ubi ad corpora cæleſtia, longiſſimè à ſedibus noſtris remota, perventum fuerit. Convenit jam inter omnes philoſophos, corpora univerſa circumterreſtria gravitare in terram. Nulla dari corpora verè levia, jamdudum confirmavit experientia

rientia multiplex. Quæ dicitur levitas relativa, non eſt vera levitas, ſed apparens ſolummodo; & oritur à præpollente gravitate corporum contiguorum.

Porrò, ut corpora univerſa gravitent in terram, ita terra viciſſim in corpora æqualiter gravitat; gravitatis enim actionem eſſe mutuam & utrinque æqualem, ſic oſtenditur. Diſtinguatur terræ totius moles in binas quaſcunque partes, vel æquales vel utcunque inæquales: jam ſi pondera partium non eſſent in ſe mutuò æqualia; cederet pondus minus majori, & partes conjunctæ pergerent rectâ moveri ad infinitum, verſus plagam in quam tendit pondus majus: omninò contra experientiam. Itaque dicendum erit, pondera partium in æquilibrio eſſe conſtituta: hoc eſt, gravitatis actionem eſſe mutuam & utrinque æqualem.

Pondera corporum, æqualiter à centro terræ diſtantium, ſunt ut quantitates materiæ in corporibus. Hoc utique colligitur ex æquali acceleratione corporum omnium, è quiete per ponderum vires cadentium: nam vires quibus inæqualia corpora æqualiter accelerantur, debent eſſe proportionales quantitatibus materiæ movendæ. Jam verò corpora univerſa cadentia æqualiter accelerari, ex eo patet, quod in vacuo *Boyliano* temporibus æqualibus æqualia ſpatia cadendo deſcribunt, ſublata ſcilicet aëris reſiſtentia: accuratiùs autem comprobatur per experimenta pendulorum.

Vires attractivæ corporum, in æqualibus diſtantiis, ſunt ut quantitates materiæ in corporibus. Nam cum corpora in terram & terra viciſſim in corpora momentis æqualibus gravitent; terræ pondus in unumquodque corpus, ſeu vis qua corpus terram attrahit, æquabitur ponderi corporis ejuſdem in terram. Hoc autem pondus erit ut quantitas materiæ in corpore: itaque vis qua corpus unumquodque terram attrahit, ſive corporis vis abſoluta, erit ut eadem quantitas materiæ.

Oritur ergo & componitur vis attractiva corporum integrorum ex viribus attractivis partium: ſiquidem aucta vel diminuta mole materiæ, oſtenſum eſt, proportionaliter augeri vel diminui ejus virtutem. Actio itaque telluris ex conjunctis partium actionibus conflari cenſenda erit; atque adeò corpora omnia terreſtria ſe mutuò trahere oportet viribus abſolutis, quæ ſint in ratione materiæ trahen-

hentis. Hæc eſt natura gravitatis apud terram: videamus jam qualis ſit in cœlis.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus à viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare; naturæ lex eſt ab omnibus recepta philoſophis. Inde verò ſequitur, corpora quæ in curvis moventur, atque adeò de lineis rectis orbitas ſuas tangentibus jugiter abeunt, vi aliqua perpetuò agente retineri in itinere curvilineo. Planetis igitur in orbibus curvis revolventibus neceſſariò aderit vis aliqua, per cujus actiones repetitas indeſinenter à tangentibus deflectantur.

Jam illud concedi æquum eſt, quod mathematicis rationibus colligitur & certiſſimè demonſtratur; corpora nempe omnia, quæ moventur in lineâ aliquâ curvâ in plano deſcriptâ, quæque radio ducto ad punctum vel quieſcens vel utcumque motum deſcribunt areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeri à viribus quæ ad idem punctum tendent. Cum igitur in confeſſo ſit apud aſtronomos, planetas primarios circùm ſolem, ſecundarios verò circum ſuos primarios, areas deſcribere temporibus proportionales; conſequens eſt ut vis illa, quâ perpetuò detorquentur à tangentibus rectilineis & in orbitis curvilineis revolvi coguntur, verſus corpora dirigatur quæ ſita ſunt in orbitarum centris. Hæc itaque vis non ineptè vocari poteſt, reſpectu quidem corporis revolventis, centripeta; reſpectu autem corporis centralis, attractiva; à quacunque demùm causâ oriri fingatur.

Quin & hæc quoque concedenda ſunt, & mathematicè demonſtrantur: Si corpora plura motu æquabili revolvantur in circulis concentricis, & quadratura temporum periodicorum ſint ut cubi diſtantiarum à centro communi; vires centripetas revolventium fore reciprocè ut quadrata diſtantiarum. Vel, ſi corpora revolvantur in orbitis quæ ſunt circulis finitimæ, & quieſcant orbitarum apſides; vires centripetas revolventium fore reciprocè ut quadrata diſtantiarum. Obtinere caſum alterutrum in planetis univerſis conſentiunt aſtronomi. Itaque vires centripetæ planetarum omnium ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum ab orbium centris. Si quis objiciat planetarum, & lunæ præſertim, apſides non penitùs quieſcere; ſed motu quodam lento ferri in conſequentia: reſponderi

poteſt

poteſt, etiamſi concedamus hunc motum tardiſſimum exinde profectum eſſe quod vis centripetæ proportio aberret aliquantùm à duplicata; aberrationem illam per computum mathematicum inveniri poſſe & planè inſenſibilem eſſe. Ipſa enim ratio vis centripetæ lunaris, quæ omnium maximè turbari debet, paululum quidem duplicatam ſuperabit; ad hanc vero ſexaginta ferè vicibus propiùs accedet quàm ad triplicatam. Sed verior erit reſponſio, ſi dicamus hanc apſidum progreſſionem, non ex aberratione à duplicatâ proportione, ſed ex aliâ prorſus diversâ causâ oriri, quemadmodum egregiè commonſtratur in hac philoſophia. Reſtat ergo ut vires centripetæ, quibus planetæ primarii tendunt versùs ſolem & ſecundarii versùs primarios ſuos, ſint accuratè ut quadrata diſtantiarum reciprocè.

Ex iis quæ hactenus dicta ſunt, conſtat planetas in orbitis ſuis retineri per vim aliquam in ipſos perpetuò agentem: conſtat vim illam dirigi ſemper versùs orbitarum centra: conſtat hujus efficaciam augeri in acceſſu ad centrum, diminui in receſſu ob eodem: & augeri quidem in eadem proportione qua diminuitur quadratum diſtantiæ, diminui in eadem proportione quâ diſtantiæ quadratum augetur. Videamus jam, comparatione inſtitutâ inter planetarum vires centripetas & vim gravitatis, annon ejuſdem fortè ſint generis. Ejuſdem verò generis erunt, ſi deprehendantur hinc & inde leges eædem, eædemque affectiones. Primò itaque lunæ, quæ nobis proxima eſt, vim centripetam expendamus.

Spatia rectilinea, quæ à corporibus è quiete demiſſis dato tempore ſub ipſo motus initio deſcribuntur, ubi à viribus quibuſcunque urgentur, proportionalia ſunt ipſis viribus: hoc utique conſequitur ex ratiociniis mathematicis. Erit igitur vis centripeta lunæ in orbitâ ſuâ revolventis, ad vim gravitatis in ſuperficie terræ, ut ſpatium quod tempore quàm minimo deſcriberet luna deſcendendo per vim centripetam versùs terram, ſi circulari omni motu privari fingeretur, ad ſpatium quod eodem tempore quàm minimo deſcribit grave corpus in vicinia terræ, per vim gravitatis ſuæ cadendo. Horum ſpatiorum prius æquale eſt arcûs à luna per idem tempus deſcripti ſinui verſo, quippe qui lunæ tranſlationem de tangente, factam à vi centripeta, metitur; atque adeò computari poteſt ex datis tùm lunæ

tempore periodico, tùm diſtantia ejus a centro terræ. Spatium poſterius invenitur per experimenta pendulorum, quemadmodum docuit *Hugenius*. Inito itaque calculo, ſpatium prius ad ſpatium poſterius, ſeu vis centripeta lunæ in orbita ſua revolventis ad vim gravitatis in ſuperficie terræ, erit ut quadratum ſemidiametri terræ ad orbitæ ſemidiametri quadratum. Eandem habet rationem, per ea quæ ſuperiùs oſtenduntur, vis centripeta lunæ in orbita ſua revolventis ad vim lunæ centripetam propè terræ ſuperficiem. Vis itaque centripeta propè terræ ſuperficiem æqualis eſt vi gravitatis. Non ergo diverſæ ſunt vires, ſed una atque eadem; ſi enim diverſæ eſſent, corpora viribus conjunctis duplò celeriùs in terram caderent quàm ex vi ſolâ gravitatis. Conſtat igitur vim illam centripetam, quâ luna perpetuò de tangente vel trahitur vel impellitur & in orbita retinetur, ipſam eſſe vim gravitatis terreſtris ad lunam uſque pertingentem. Et rationi quidem conſentaneum eſt ut ad ingentes diſtantias illa ſeſe virtus extendat, cum nullam ejus ſenſibilem imminutionem, vel in altiſſimis montium cacuminibus, obſervare licet. Gravitat itaque luna in terram: quin & actione mutua, terra viciſſim in lunam æqualiter gravitat: id quod abundè quidem confirmatur in hac philoſophiâ, ubi agitur de maris æſtu & æquinoctiorum præceſſione, ab actione tum lunæ tum ſolis in terram oriundus. Hinc & illud tandem edocemur, quâ nimirùm lege vis gravitatis decreſcat in majoribus à tellure diſtantiis. Nam cùm gravitas non diverſa ſit à vi centripeta lunari, hæc verò ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ; diminuetur & gravitas in eadem ratione.

Progrediamur jam ad planetas reliquos. Quoniàm revolutiones primariorum circa ſolem & ſecundariorum circa jovem & ſaturnum ſunt phænomena generis ejuſdem ac revolutio lunæ circa terram, quoniam porrò demonſtratum eſt vires centripetas primariorum dirigi versùs centrum ſolis, ſecundariorum versùs centra jovis & ſaturni, quemadmodùm lunæ vis centripeta versùs terræ centrum dirigitur; adhæc, quoniam omnes illæ vires ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centris, quemadmodum vis lunæ eſt ut quadratum diſtantiæ à terra: concludendum erit eandem eſſe naturam univerſis. Itaque ut luna gravitat in terram, & terra viciſſim in lunam; ſic etiam gravitabunt omnes ſecundarii in primarios ſuos, & primarii viciſſim

in

in ſecundarios; ſic & omnes primarii in ſolem, & ſol viciſſim in primarios.

Igitur ſol in planetas univerſos gravitat & univerſi in ſolem. Nam ſecundarii dum primarios ſuos comitantur, revolvuntur intereà circùm ſolem unà cum primariis. Eodem itaque argumento, utriuſque generis planetæ gravitant in ſolem, & ſol in ipſos. Secundarios verò planetas in ſolem gravitare abundè inſuper conſtat ex inæqualitatibus lunaribus; quarum acuratiſſimam theoriam, admiranda ſagacitate patefactam, in tertio hujus operis libro expoſitam habemus.

Solis virtutem attractivam quoquoverſum propagari ad ingentes uſque diſtantias, & ſeſe diffundere ad ſingulas circumjecti ſpatii partes, apertiſſimè colligi poteſt ex motu cometarum; qui ab immenſis intervallis profecti feruntur in viciniam ſolis, & nonnunquam adeò ad ipſum proximè accedunt ut globum ejus, in periheliis ſuis verſantes, tantùm non contingere videantur. Horum theoriam ab aſtronomis antehac fruſtrà quæſitam, noſtro tandem ſæculo faciliter inventam & per obſervationes certiſſimè demonſtratam, præſtantiſſimo noſtro auctori debemus. Patet igitur cometas in ſectionibus conicis umbilicos in centro ſolis habentibus moveri, & radiis ad ſolem ductis areas temporibus proportionales deſcribere. Ex hiſce verò phænomenis manifeſtum eſt & mathematicè comprobatur, vires illas, quibus cometæ retinentur in orbitis ſuis, reſpicere ſolem & eſſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum ab ipſius centro. Gravitant itaque cometæ in ſolem: atque adeò ſolis vis attractiva non tantùm ad corpora planetarum in datis diſtantiis & in eodem ferè plano collocata, ſed etiam ad cometas in diverſiſſimis cœlorum regionibus & in diverſiſſimis diſtantiis poſitos pertingit. Hæc igitur eſt natura corporum gravitantium, ut vires ſuas edant ad omnes diſtantias in omnia corpora gravitantia. Inde verò ſequitur, planetas & cometas univerſos ſe mutuò trahere, & in ſe mutuò graves eſſe: quod etiam confirmatur ex perturbatione jovis & ſaturni, aſtronomis non incognita, & ab actionibus horum planetarum in ſe invicem oriunda; quin & ex motu illo lentiſſimo apſidum, qui ſuprà memoratus eſt, quique à causâ conſimili proficiſcitur.

Eo demùm pervenimus ut dicendum ſit, & terram & ſolem & corpora omnia cœleſtia, quæ ſolem comitantur, ſe mutuò attrahere. Sin-

*** 3 gulorum

gulorum ergo particulæ, quæque minimæ, vires ſuas attractivas habebunt, pro quantitate materiæ pollentes; quamadmodum ſuprà de terreſtribus oſtenſum eſt. In diverſis autem diſtantiis, erunt & harum vires in duplicata ratione diſtantiarum reciprocè: nam ex particulis hac lege trahentibus componi debere globos eadem lege trahentes, mathematicè demonſtratur.

Concluſiones præcedentes huic innituntur Axiomati, quòd à nullis non recipitur philoſophis; effectuum ſcilicet ejuſdem generis, quorum nempe quæ cognoſcuntur proprietates eædem ſunt, eaſdem eſſe cauſas & eaſdem eſſe proprietates quæ nondùm cognoſcuntur. Quis enim dubitat, ſi gravitas ſit cauſa deſcenſûs lapidis in *Europa*, quin eadem ſit cauſa deſcenſus in *America?* Si gravitas mutua fuerit inter lapidem & terram in *Europa*; quis negabit mutuam eſſe in *America?* Si vis attractiva lapidis & terræ componatur, in *Europa*, ex viribus attractivis partium; quis negabit ſimilem eſſe compoſitionem in *America?* Si attractio terræ ad omnia corporum genera & ad omnes diſtantias propagetur in *Europa*; quidni pariter propagari dicamus in *America?* In hac regula fundatur omnis philoſophia: quippe quâ ſublatâ nihil affirmare poſſimus de univerſis. Conſtitutio rerum ſingularum innoteſcit per obſervationes & experimenta: inde verò non niſi per hanc regulam de rerum univerſarum naturâ judicamus.

Jam cùm gravia ſint omnia corpora, quæ apud terram vel in cœlis reperiuntur, de quibus experimenta vel obſervationes inſtituere licet; omninò dicendum erit, gravitatem corporibus univerſis competere. Et quemadmodum nulla concipi debent corpora, quæ non ſint extenſa, mobilia & impenetrabilia; ita nulla concipi debere, quæ non ſint gravia. Corporum extenſio, mobilitas, & impenetrabilitas non niſi per experimenta, innoteſcunt; eodem planè modo gravitas innoteſcit. Corpora omnia de quibus obſervationes habemus, extenſa ſunt & mobilia & impenetrabilia: & inde concludimus corpora univerſa, etiam illa de quibus obſervationes non habemus, extenſa eſſe & mobilia & impenetrabilia. Ita corpora omnia ſunt gravia, de quibus obſervationes habemus: & inde concludimus corpora univerſa, etiam illa de quibus obſervationes non habemus, gravia eſſe. Si quis dicat corpora ſtellarum inerrantium non eſſe gravia, quandoquidem eorum gravitas nondum eſt obſervata; eodem argumento dicere licebit

cebit neque extenſa eſſe, nec mobilia, nec impenetrabilia, cum hæ fixarum affectiones nondùm ſint obſervatæ. Quid opus eſt verbis? inter primarias qualitates corporum univerſorum vel gravitas habebit locum; vel extenſio, mobilitas, & impenetrabilitas non habebunt. Et natura rerum vel rectè explicabitur per corporum gravitatem, vel non rectè explicabitur per corporum extenſionem, mobilitatem, & impenetrabilitatem.

Audio nonnullos hanc improbare concluſionem, & de occultis qualitatibus neſcio quid muſſitare. Gravitatem ſcilicet occultum eſſe quid, perpetuò argutari ſolent; occultas verò cauſas procul eſſe ablegandas à philoſophiâ. His autem facilè reſpondetur; occultas eſſe cauſas, non illas quidem quarum exiſtentia per obſervationes clariſſimè demonſtratur, ſed has ſolùm quarum occulta eſt & ficta exiſtentia nondùm verò comprobata. Gravitas ergo non erit occulta cauſa motuum cœleſtium; ſiquidem ex phænomenis oſtenſum eſt, hanc virtutem reverà exiſtere. Hi potius ad occultas confugiunt cauſas, qui neſcio quos vortices, materiæ cujuſdam prorsùs fictitiæ & ſenſibus omninò ignotæ, motibus iiſdem regendis præficiunt.

Ideone autem gravitas occulta cauſa dicetur, eoque nomine rejicietur è philoſophiâ, quod cauſa ipſius gravitatis occulta eſt & nondum inventa? Qui ſic ſtatuunt, videant nequid ſtatuant abſurdi, unde totius tandem philoſophiæ fundamenta convellantur. Etenim cauſæ continuo nexu procedere ſolent à compoſitis ad ſimpliciora: ubi ad cauſam ſimpliciſſimam perveneris, jam non licebit ulteriùs progredi. Cauſæ igitur ſimpliciſſimæ nulla dari poteſt mechanica explicatio: ſi daretur enim, cauſa nondum eſſet ſimpliciſſima. Has tu proinde cauſas ſimpliciſſimas appellabis occultas, & exulare jubebis? Simul verò exulabunt & ab his proximè pendentes & quæ ab illis porrò pendent, uſque dum à cauſis omnibus vacua fuerit & probè purgata philoſophia.

Sunt qui gravitatem præter naturam eſſe dicunt, & miraculum perpetuum vocant. Itaque rejiciendam eſſe volunt, cùm in phyſicâ præternaturales cauſæ locum non habeant. Huic ineptæ prorſus objectioni diluendæ, quæ & ipſa philoſophiam ſubruit univerſam, vix operæ pretium eſt immorari. Vel enim gravitatem corporibus omnibus inditam eſſe negabunt: quod tamen dici non poteſt: vel eo

nomine

nomine præter naturam eſſe affirmabunt, quod ex aliis corporum affectionibus atque ideò ex cauſis mechanicis originem non habeat. Dantur certè primariæ corporum affectiones; quæ quoniam ſunt primariæ, non pendent ab aliis. Viderint igitur annon & hæ omnes ſint pariter præter naturam, eoque pariter rejiciendæ: viderint verò qualis ſit deinde futura philoſophia.

Nonnulli ſunt quibus hæc tota phyſica cœleſtis vel ideò minùs placet, quòd cum *Carteſii* dogmatibus pugnare & vix conciliari poſſe videatur. His ſua licebit opinione frui; ex æquo autem agant oportet: non ergo denegabunt aliis eandem libertatem quam ſibi concedi poſtulant. Newtonianam itaque philoſophiam, quæ nobis verior habetur, retinere & amplecti licebit, & cauſas ſequi per phænomena comprobatas, potiùs quam fictas & nondum comprobatas. Ad veram philoſophiam pertinet, rerum naturas ex cauſis verè exiſtentibus derivare: eas verò leges quærere, quibus voluit ſummus opifex hunc mundi pulcherrimum ordinem ſtabilire; non eas quibus potuit, ſi ita viſum fuiſſet. Rationi enim conſonum eſt, ut à pluribus cauſis, ab invicem nonnihil diverſis, idem poſſit effectus proficiſci: hæc autem vera erit cauſa, ex qua verè atque actu proficiſcitur; reliquæ locum non habent in philoſophiâ verâ. In horologiis automatis idem indicis horarii motus vel ab appenſo pondere vel ab intus concluſo elatere oriri poteſt. Quod ſi oblatum horologium reverà ſit inſtructum pondere; ridebitur qui finget elaterem, & ex hypotheſi ſic præproperè confictâ motum indicis explicare ſuſcipiet: oportuit enim internam machinæ fabricam penitiùs perſcrutari, ut ita motûs propoſiti principium verum exploratum habere poſſet. Idem vel non abſimile feretur judicium de philoſophis illis, qui materiâ quâdam ſubtiliſſimâ cœlos eſſe repletos, hanc autem in vortices indeſinenter agi voluerunt. Nam à phænomenis vel accuratiſſimè ſatisfacere poſſent ex hypotheſibus ſuis; veram tamen philoſophiam tradidiſſe, & veras cauſas motuum cæleſtium inveniſſe nondum dicendi ſunt; niſi vel has reverà exiſtere, vel ſaltem alias non exiſtere demonſtraverint. Igitur ſi oſtenſum fuerit, univerſorum corporum attractionem habere verum locum in rerum naturâ; quinetiam oſtenſum fuerit, quâ ratione motus omnes cæleſtes abinde ſolutionem recipiant; vana fuerit & meritò deridenda objectio,

objectio, ſi quis dixerit eoſdem motus per vortices explicari debere, etiamſi id fieri poſſe vel maximè conceſſerimus. Non autem concedimus: nequeunt enim illo pacto phænomena per vortices explicari; quod ab auctore noſtro abundè quidem & clariſſimis rationibus evincitur; ut ſomnis plùs æquò indulgeant oporteat, qui ineptiſſimo figmento reſarciendo, noviſque porrò commentis ornando infelicem operam addicunt.

Si corpora planetarum & cometarum circa ſolem deferantur à vorticibus; oportet corpora delata & vorticum partes proximè ambientes eadem velocitate eademque curſûs determinatione moveri, & eandem habere denſitatem vel eandem vim inertiæ pro mole materiæ. Conſtat verò planetas & cometas, dùm verſantur in iiſdem regionibus cœlorum, velocitatibus variis variâque curſûs determinatione moveri. Neceſſariò itaque ſequitur, ut fluidi cœleſtis partes illæ, quæ ſunt ad eaſdem diſtantias à ſole, revolvantur eodem tempore in plagas diverſas cum diverſis velocitatibus: etenim aliâ opus erit directione & velocitate, ut tranſire poſſint planetæ; aliâ, ut tranſire poſſint cometæ. Quod cùm explicari nequeat; vel fatendum erit, univerſa corpora cœleſtia non deferri à materia vorticis; vel dicendum erit, eorundem motus repetendos eſſe non ab uno eodemque vortice, ſed à pluribus qui ab invicem diverſi ſint, idemque ſpatium ſoli circumjectum pervadant.

Si plures vortices in eodem ſpatio contineri, & ſeſe mutuò penetrare motibuſque diverſis revolvi ponantur; quoniam hi motus debent eſſe conformes delatorum corporum motibus, qui ſunt ſummè regulares, & peraguntur in ſectionibus conicis nunc valdè eccentricis, nunc ad circulorum proximè formam accedentibus; jure quærendum erit, qui fieri poſſit, ut iidem integri conſerventur nec ab actionibus materiæ occurſantis per tot ſæcula quicquam perturbentur. Sanè ſi motus hi fictitii ſunt magis compoſiti & difficiliùs explicantur, quam veri illi motus planetarum & cometarum; fruſtrà mihi videntur in philoſophiam recipi: omnis enim cauſa debet eſſe effectu ſuo ſimplicior. Conceſſa fabularum licentia, affirmaverit aliquis planetas omnes & cometas circumcingi atmoſphæris, ad inſtar telluris noſtræ; quæ quidem hypotheſis rationi magis conſentanea

**** vide-

videbitur quam hypotheſis vorticum. Affirmaverit deinde has atmoſphæras, ex naturâ ſuâ, circa ſolem moveri & ſectiones conicas deſcribere; qui ſanè motus multò faciliùs concipi poteſt, quàm conſimilis motus vorticum ſe invicem permeantium. Denique planetas ipſos & cometas circa ſolem deferri ab atmoſphæris ſuis credendum eſſe ſtatuat, & ob repertas motuum cœleſtium cauſas triumphum agat. Quiſquis autem hanc fabulam rejiciendam eſſe putet, idem & alteram fabulam rejiciet: nam ovum non eſt ovo ſimilius, quàm hypotheſis atmoſphærarum hypotheſi vorticum.

Docuit *Galilæus*, lapidis projecti & in parabola moti deflectionem à curſu rectilineo oriri à gravitate lapidis in terram, ab occulta ſcilicet qualitate. Fieri tamen poteſt ut alius aliquis, naſi acutioris philoſophus, cauſam aliam comminiſcatur. Finget igitur ille materiam quandam ſubtilem, quæ nec viſu, nec tactu, neque ullo ſenſu percipitur, verſari in regionibus quæ proximè contingunt telluris ſuperficiem. Hanc autem materiam, in diverſas plagas, variis & plerumque contrariis motibus ferri, & lineas parabolicas deſcribere contendet. Deinde vero lapidis deflectionem pulchrè ſic expediet, & vulgi plauſum merebitur. Lapis, inquiet, in fluido illo ſubtili natat & curſui ejus obſequendo, non poteſt non eandem unà ſemitam deſcribere. Fluidum verò movetur in lineis parabolicis; ergo lapidem in parabola moveri neceſſe eſt. Quis nunc non mirabitur acutiſſimum hujuſce philoſophi ingenium, ex cauſis mechanicis, materiâ ſcilicet & motu, phænomena naturæ ad vulgi etiam captum præclarè deducentis? Quis verò non ſubſannabit bonum illum *Galilæum*, qui magno molimine mathematico qualitates occultas, è philoſophia feliciter excluſas, denuò revocare ſuſtinuerit? Sed pudet nugis diutiùs immorari.

Summa rei huc tandem redit: cometarum ingens eſt numerus; motus eorum ſunt ſummè regulares, & eaſdem leges cum planetarum motibus obſervant. Moventur in orbibus conicis, hi orbes ſunt valdè admodum eccentrici. Feruntur undique in omnes cœlorum partes, & planetarum regiones liberrimè pertranſeunt, & ſæpè contrà ſignorum ordinem incedunt. Hæc phænomena certiſſimè confirmantur ex obſervationibus aſtronomicis: & per vortices nequeunt explicari. Imò, ne quidem cum vorticibus planetarum conſiſtere poſſunt. Cometarum

metarum motibus omninò locus non erit; niſi materia illa fictitia penitus è cœlis amoveatur.

Si enim planetæ circùm ſolem à vorticibus devehuntur; vorticum partes, quæ proximè ambiunt unumquemque planetam, ejuſdem denſitatis erunt ac planeta; uti ſuprà dictum eſt. Itaque materia illà omnis quæ contigua eſt orbis magni perimetro, parem habebit ac tellus denſitatem: quæ verò jacet intrà orbem magnum atque orbem ſaturni, vel parem vel majorem habebit. Nam ut conſtitutio vorticis permanere poſſit, debent partes minùs denſæ centrum occupare, magis denſæ longiùs à centro abire. Cum enim planetarum tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum à ſole, oportet partium vorticis periodos eandem rationem ſervare. Inde verò ſequitur, vires centrifugas harum partium fore reciprocè ut quadrata diſtantiarum. Quæ igitur majore intervallo diſtant à centro, nituntur ab eodem recedere minore vi: unde ſi minùs denſæ fuerint, neceſſe eſt ut cedent vi majori, quâ partes centro propiores aſcendere conantur. Aſcendent ergo denſiores, deſcendent minus denſæ, & locorum fiet invicem permutatio; donec ita fuerit diſpoſita atque ordinata materia fluida totius vorticis, ut conquieſcere jam poſſit in æquilibrio conſtituta. Si bina fluida, quorum diverſa eſt denſitas, in eodem vaſe continentur; utique futurum eſt ut fluidum, cujus major eſt denſitas, majore vi gravitatis infimum petat locum: & ratione non abſimili omninò dicendum eſt, denſiores vorticis partes majore vi centrifugâ petere ſupremum locum. Tota igitur illa & multò maxima pars vorticis, quæ jacet extrà telluris orbem, denſitatem habebit atque adeò vim inertiæ pro mole materiæ, quæ non minor erit quàm denſitas & vis inertiæ telluris: inde verò cometis trajectis orietur ingens reſiſtentia, & valde admodum ſenſibilis; ne dicam, quæ motum eorundem penitùs ſiſtere atque abſorbere poſſe meritò videatur. Conſtat autem ex motu cometarum prorsùs regulari, nullam ipſos reſiſtentiam pati quæ vel minimùm ſentiri poteſt; atque adeò neutiquam in materiam ullam incurſare, cujus aliqua ſit vis reſiſtendi, vel proinde cujus aliqua ſit denſitas ſeu vis inertiæ. Nam reſiſtentia mediorum oritur vel ab inertia materiæ fluidæ, vel à defectu lubricitatis. Quæ oritur à defectu lubricitatis, admodum exigua eſt; & ſanè vix obſervari poteſt in fluidis vulgò notis, niſi valdè

tenacia fuerint ad inſtar olei & mellis. Reſiſtentia quæ ſentitur in aëre, aqua, hydrargyro, & hujuſmodi fluidis non tenacibus ferè tota eſt prioris generis; & minui non poteſt per ulteriorem quemcunque gradum ſubtilitatis, manente fluidi denſitate vel vi inertiæ, cui ſemper proportionalis eſt hæc reſiſtentia; quamadmodum clariſſimè demonſtratum eſt ab auctore noſtro in peregregia reſiſtentiarum theoriâ, quæ paulò nunc accuratiùs exponitur, hac ſecundâ vice, & per experimenta corporum cadentium pleniùs confirmatur.

Corpora progrediendo motum ſuum fluido ambienti paulatim communicant, & communicando amittunt, amittendo autem retardantur. Eſt itaque retardatio motui communicato proportionalis; motus vero communicatus, ubi datur corporis progredientis velocitas, eſt ut fluidi denſitas; ergo retardatio ſeu reſiſtentia erit ut eadem fluidi denſitas; neque ullo pacto tolli poteſt, niſi à fluido ad partes corporis poſticas recurrente reſtituatur motus amiſſus. Hoc autem dici non poterit, niſi impreſſio fluidi in corpus ad partes poſticas æqualis fuerit impreſſioni corporis in fluidum ad partes anticas, hoc eſt, niſi velocitas relativa quâ fluidum irruit in corpus à tergo, æqualis fuerit velocitati quâ corpus irruit in fluidum, id eſt, niſi velocitas abſoluta fluidi recurrentis duplo major fuerit quam velocitas abſoluta fluidi propulſi; quod fieri nequit. Nullo igitur modo tolli poteſt fluidorum reſiſtentia, quæ oritur ab eorundem denſitate & vi inertiæ. Itaque concludendum erit; fluidi cœleſtis nullam eſſe vim inertiæ, cùm nulla ſit vis reſiſtendi: nullam eſſe vim quâ motus communicetur, cùm nulla ſit vis inertiæ: nullam eſſe vim quâ mutatio quælibet vel corporibus ſingulis vel pluribus inducatur, cùm nulla ſit vis quâ motus communicetur; nullam eſſe omninò efficaciam, cum nulla ſit facultas mutationem quamlibet inducendi. Quidni ergo hanc hypotheſin, quæ fundamento planè deſtituitur, quæque naturæ rerum explicandæ ne minimùm quidem inſervit, ineptiſſimam vocare liceat & philoſopho prorsùs indignam. Qui cœlos materiâ fluidâ repletos eſſe volunt, hanc verò non inertem eſſe ſtatuunt; hi verbis tollunt vacuum, re ponunt. Nam cum hujuſmodi materia fluida ratione nullâ ſecerni poſſit ab inani ſpatio; diſputatio tota fit de rerum nominibus, non de naturis. Quod ſi aliqui ſint adeò uſque dediti materiæ, ut ſpatium à corporibus vacuum nullo pacto admittendum

dum credere velint; videamus quo tandem oporteat illo pervenire.

Vel enim dicent hanc, quam confingunt, mundi per omnia pleni conſtitutionem ex voluntate dei profectam eſſe, propter eum finem, ut operationibus naturæ ſubſidium præſens haberi poſſet ab æthere ſubtiliſſimo cuncta permeante & implente; quod tamen dici non poteſt, ſiquidem jam oſtenſum eſt ex cometarum phænomenis, nullam eſſe hujus ætheris efficaciam: vel dicent ex voluntate dei profectam eſſe, propter finem aliquem ignotum; quod neque dici debet, ſiquidem diverſa mundi conſtitutio eodem argumento pariter ſtabiliri poſſet: vel denique non dicent ex voluntate dei profectam eſſe, ſed ex neceſſitate quâdam naturæ. Tandem igitur delabi oportet in fæces ſordidas gregis impuriſſimi. Hi ſunt qui ſomniant fato univerſa regi, non providentia; materiam ex neceſſitate ſuâ ſemper & ubique extitiſſe, infinitam eſſe & æternam. Quibus poſitis; erit etiam undiquaque uniformis: nam varietas formarum cum neceſſitate omninò pugnat. Erit etiam immota: nam ſi neceſſariò moveatur in plagam aliquam determinatam; cum determinata aliqua velocitate; pari neceſſitate movebitur in plagam diverſam cum diverſa velocitate, in plagas autem diverſas, cum diverſis velocitatibus, moveri non poteſt; oportet igitur immotam eſſe. Neutiquam profectò potuit oriri mundus, pulcherrima formarum & motuum varietate diſtinctus, niſi ex liberrimâ voluntate cuncta providentis & gubernantis dei.

Ex hoc igitur fonte promanarunt illæ omnes quæ dicuntur naturæ leges: in quibus multa ſanè ſapientiſſimi conſilii, nulla neceſſitatis apparent veſtigia. Has proinde non ab incertis conjecturis petere, ſed obſervando atque experiendo addiſcere debemus. Qui verè phyſicæ principia legeſque rerum, ſola mentis vi & interno rationis lumine fretum, invenire ſe poſſe confidit; hunc oportet vel ſtatuere mundum ex neceſſitate fuiſſe, legeſque propoſitas ex eadem neceſſitate ſequi; vel ſi per voluntatem dei conſtitutus ſit ordo naturæ, ſe tamen, homuncionem miſellum, quid optimum factu ſit perſpectum habere. Sana omnis & vera Philoſophia fundatur in phænomenis rerum: quæ ſi nos vel invitos & reluctantes ad hujuſmodi principia deducunt, in quibus clariſſimè cernuntur conſilium optimum & dominium ſummum ſapientiſſimi & potentiſſimi entis; non erunt hæc ideò non admittenda principia, quod quibuſdam forſan hominibus minus grata ſunt futura.

tura. His vel miracula vel qualitates occultæ dicantur, quæ diſplicent: verum nomina malitioſè indita non ſunt ipſis rebus vitio vertenda; niſi illud fateri tandem velint, utique debere philoſophiam in atheiſmo fundari. Horum hominum gratiâ non erit labefactanda philoſophia, ſiquidem rerum ordo non vult immutari.

Obtinebit igitur apud probos & æquos judices præſtantiſſima philoſophandi ratio, quæ fundatur in experimentis & obſervationibus. Huic verò, dici vix poterit, quanta lux accedat, quanta dignitas, ab hoc opere præclaro illuſtriſſimi noſtri auctoris; cujus eximiam ingenii felicitatem, difficillima quæque problemata enodantis, & ad ea porrò pertingentis ad quæ nec ſpes erat humanam mentem aſſurgere potuiſſe, meritò admirantur & ſuſpiciunt quicunque paulò profundius in hiſce rebus verſati ſunt. Clauſtris ergò reſeratis, aditum nobis aperuit ad pulcherrima rerum myſteria. Syſtematis mundani compagem elegantiſſimam ita tandem patefecit & penitiùs perſpectandam dedit; ut nec ipſe, ſi nunc reviviſceret, rex *Alphonſus* vel ſimplicitatem vel harmoniæ gratiam in ea deſideraret. Itaque naturæ majeſtatem propiùs jam licet intueri, & dulciſſima contemplatione frui, conditorem verò ac dominum univerſorum impenſiùs colere & venerari, qui fructus eſt philoſophiæ multò uberrimus. Cæcum eſſe oportet, qui ex optimis & ſapientiſſimis rerum ſtructuris non ſtatim videat fabricatoris omnipotentis infinitam ſapientiam & bonitatem: inſanum, qui profiteri nolit.

Extabit igitur eximium NEWTONI opus adverſus atheorum impetus munitiſſimum præſidium: neque enim alicundè feliciùs, quàm ex hac pharetra, contra impiam catervam tela deprompſeris. Hoc ſenſit pridem, & in pereruditis concionibus anglicè latinèque editis, primus egregiè demonſtravit vir in omni literarum genere præclarus idemque bonarum artium fautor eximius RICHARDUS BENTLEIUS, ſeculi ſui & Academiæ noſtræ magnum ornamentum, Collegii noſtri *S. Trinitatis* magiſter digniſſimus & integerrimus. Huic ego me pluribus nominibus obſtrictum fateri debeo: huic & tuas quæ debentur gratias, lector benevole, non denegabis. Is enim, cum à longo tempore celeberrimi auctoris amicitiâ intimâ frueretur, (qua etiam apud poſteros cenſeri non minoris æſtimat, quàm propriis ſcriptis, quæ literato orbi in deliciis ſunt inclaroſcere) amici

ei ſimul famæ & ſcientiarum incremento conſuluit. Itaque cum exemplaria prioris editionis rariſſima admodum & immani pretio coëmenda ſupereſſent; ſuaſit ille crebris efflagitationibus, & tantum non objurgando perpulit denique virum præſtantiſſimum, nec modeſtiâ minùs quàm eruditione ſummâ inſignem, ut novam hanc operis editionem, per omnia elimatam denuò & egregiis inſuper acceſſionibus ditatam, ſuis ſumptibus & auſpiciis prodire pateretur: mihi verò, pro jure ſuo, penſum non ingratum demandavit, ut quam poſſet emendatè id fieri curarem.

Cantabrigiæ,
Maii 12. 1713.

ROGERUS COTES Collegii *S. Trinitatis* ſocius,
aſtronomiæ & philoſophiæ experimentalis
profeſſor *Plumianus*.

A U C-

AUCTORIS PRÆFATIO
IN
EDITIONEM TERTIAM.

IN editione hacce tertiâ, quam Henricus Pemberton M. D. *vir harum rerum peritiſſimus curavit, nonnulla in libro ſecundo de reſiſtentia mediorum paulò fuſiùs explicantur quàm anteà, & adduntur experimenta nova de reſiſtentia gravium quæ cadunt in aëre. In libro tertio argumentum quo lunam in orbe ſuo per gravitatem retineri probatur, paulò fuſiùs exponitur: & novæ adduntur obſervationes de proportione diametrorum Jovis ad invicem à D.* Poundio *factæ. Adduntur etiam obſervationes aliquot cometæ illius qui anno* 1680. *apparuit, à D.* Kirk *menſe Novembri in* Germania *habitæ, quæ nuper ad manus noſtras venerunt, & quarum ope conſtet quàm propè orbes parabolici motibus cometarum reſpondent. Et orbita cometæ illius, computante* Halleio, *paulò accuratiùs determinatur quàm anteà, idque in ellipſi. Et oſtenditur cometam in hac orbita elliptica, per novem cælorum ſigna, non minùs accuratè curſum peregiſſe, quàm ſolent planetæ in orbitis ellipticis per aſtronomiam definitis moveri. Orbis etiam cometæ qui anno* 1723. *apparuit, à D.* Bradleio *aſtronomiæ apud* Oxonienſes *Profeſſore computatus adjicitur.*

IS. NEWTON.

Dabam *Londini*
Jan. 12. 1725-6

IN

VIRI PRÆSTANTISSIMI

ISAACI NEWTONI

OPUS HOCCE

MATHEMATICO-PHYSICUM,

Seculi Gentiſque noſtræ decus egregium.

EN tibi norma poli, & divæ libramina molis,
Computus en Jovis; & quas, dum primordia rerum
Pangeret, omniparens leges violare creator
Noluit, atque operum quæ fundamenta locârit.
Intima panduntur victi penetralia cæli,
Nec latet extremos quæ vis circumrotat orbes.
Sol ſolio reſidens ad ſe jubet omnia prono
Tendere deſcenſu, nec recto tramite currus
Sidereos patitur vaſtum per inane moveri;
Sed rapit immotis, ſe centro, ſingula gyris.
Jam patet horrificis quæ ſit via flexa cometis;
Jam non miramur barbati phænomena aſtri.
Diſcimus hinc tandem quâ causâ argentea Phœbe
Paſſibus haud æquis graditur; cur ſubdita nulli
Hactenus aſtronomo numerorum fræna recuſet:
Cur remeant nodi, curque auges progrediuntur.
Diſcimus & quantis refluum vaga Cynthia pontum
Viribus impellit, feſſis dum fluctibus ulvam
Deſerit, ac nautis ſuſpectas nudat arenas;
Alternis vicibus ſuprema ad littora pulſans.
Quæ toties animos veterum torſere ſophorum,
Quæque ſcholas fruſtra rauco certamine vexant,

***** Ob-

Obvia conſpicimus, nubem pellente matheſi.
Jam dubios nullâ caligine prægravat error,
Queis ſuperum penetrare domos atque ardua cæli
Scandere ſublimis genii conceſſit acumen.
Surgite mortales, terrenas mittite curas;
Atque hinc cæligenæ vires dignoſcite mentis,
A pecudum vitâ longè latéque remotæ.
Qui ſcriptis juſſit tabulis compeſcere cædes,
Furta & adulteria, & perjuræ crimina fraudis;
Quive vagis populis circundare mœnibus urbes
Auctor erat; Cereriſve beavit munere gentes;
Vel qui curarum lenimen preſſit ab uvâ;
Vel qui Niliacâ monſtravit arundine pictos
Conſociare ſonos, oculiſque exponere voces;
Humanam ſortem minus extulit: utpote pauca
Reſpiciens miſeræ tantum ſolamina vitæ.
Jam vero ſuperis convivæ admittimur, alti
Jura poli tractare licet, jamque abdita cæcæ
Clauſtra patent terræ, rerumque immobilis ordo,
Et quæ præteriti latuerunt ſecula mundi.
Talia monſtrantem mecum celebrate camænis,
Vos ô cælicolum gaudentes nectare veſci,
NEWTONUM clauſi reſerantem ſcrinia veri,
NEWTONUM Muſis charum, cui pectore puro
Phœbus adeſt, totoque inceſſit numine mentem:
Nec fas eſt propius mortali attingere divos.

EDM. HALLEY.

INDEX

INDEX CAPITUM
TOMI PRIMI.

Definitiones. Pag. 1.

Axiomata, sive Leges Motus. 13.

DE MOTU CORPORUM LIBER PRIMUS.

Sect. I. *De methodo rationum primarum & ultimarum.* 62.
Sect. II. *De inventione virium centripetarum,* 89.
Sect. III. *De motu corporum in conicis ſectionibus excentricis.* 153.
Sect. IV. *De inventione orbium ellipticorum, parabolicorum & hyperbolicorum ex umbilico dato.* 175.
Sect. V. *De inventione orbium ubi umbilicus neuter datur.* 188.
Sect. VI. *De inventione motuum in orbibus datis.* 259.
Sect. VII. *De corporum aſcenſu & deſcenſu rectilineo.* 292.
Sect. VIII. *De inventione orbium in quibus corpora viribus quibuſcunque centripetis agitata revolvuntur.* 312.
Sect. IX. *De motu corporum in orbibus mobilibus, deque motu apſidum.* 334.
Sect. X. *De motu corporum in ſuperficiebus datis, deque funependulorum motu reciproco.* 361.
Sect. XI. *De motu corporum viribus centripetis ſe mutuo petentium.* 404.
Sect. XII. *De corporum ſphæricorum viribus attractivis.* 465.
Sect. XIII. *De corporum non ſphæricorum viribus attractivis.* 503.
Sect. XIV. *De motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad ſingulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.* 533.

E R-

ERRATA,

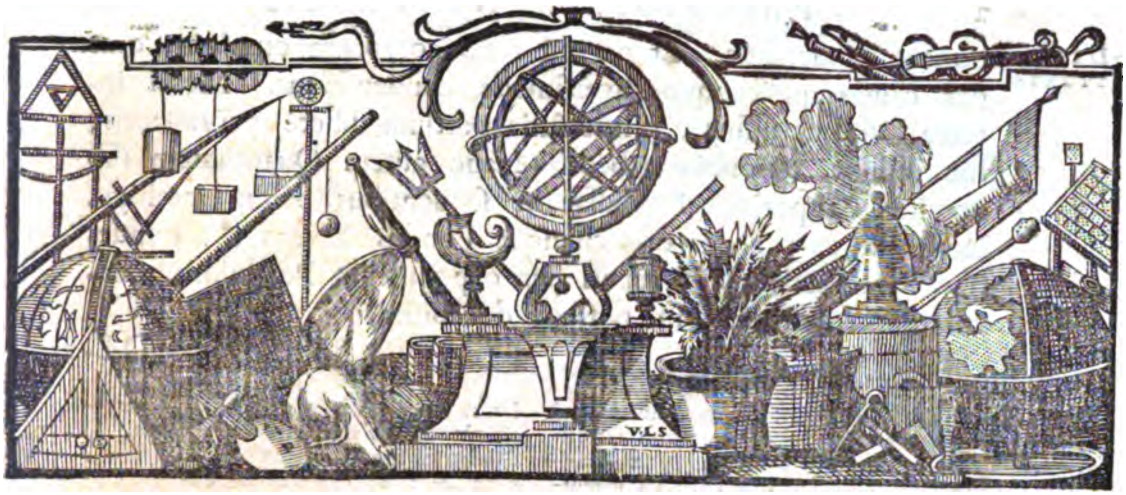
antequam legas corrigenda.

IN TEXTU.

Pag. 75. *lin.* 10. D*d*, *lege*, D, *d*. *Pag.* 91. *l.* 2. reciprocæ, *lege*, reciprocè. *Pag.* 107. *in figurâ loco* T *ſcribe* Q, *& loco* Q *ſcribe* T. *Pag.* 377. *in figurâ*, *ſcribe* R *in interſectione rectæ* AOC, *& cycloidis*. *Pag.* 423. *lin.* 11. *dele* viribus.

IN NOTIS.

Pag. 23. *lin.* 21. *col.* 1. corporis, *lege*, corporum. *Pag.* 52. *col.* 2. *lin.* 2. $1 - 3 : 2b$, *lege*, $1 - \frac{3b}{2}$. *Pag.* 72. *lin.* 26. *col.* 2. $G : g = S : TT : s : tt$, *lege* $G : g = \frac{S}{TT} : \frac{s}{tt}$. *Pag.* 75. *col.* 1. *lin.* 28. D d, *lege*, D, d. *Pag.* 86. *lin.* 2. *col.* 1. *deleantur hæc verba:* capiatur PE = PC, & producta PC, tangentem ſecet in T. *Ibid. lin.* 15. *col.* 1. 145, *lege* 146. *Pag.* 87. *lin.* 9. *col.* 2. $zzdz + zzdz$, *lege*, $zzdz + zzdz + zzdz$. *Pag.* 96. *in circulo majori ad alterum diametri extremum*, *ſcribe* G. *Pag.* 102. *lin.* 26. *col.* 2. emenſus, *lege*, emenſum. *Pag.* 118. *col.* 1. *lin.* 3. EG×GE, *lege*, EG×GF. *Pag.* 123. *col.* 2. *lin.* 18. BO, *lege*, DO. *Pag.* 126. *col.* 2. *in figurâ ad alterum ordinatæ extremum*, *lege*, G. *Pag.* 127. *lin.* 13. *col.* 1. *deleatur*, tum. *Ibid. lin.* 25. *col.* 1. 2 AC, L, *lege* 2 AC : L. *Pag.* 129. *lin.* 8. *col.* 2. $PO^2 + CE^2 = BC^2$, *lege*, $PO^2 + KE^2 = BC^2$. *Pag.* 220. *col.* 1. *lin.* 8. AD, AB, *lege*, AD, aB, *Pag.* 279. *col.* 1. *lin.* 9., Lemma, *lege*, 374. Lemma. *P.* 287. *lin.* 9. $rr^2 - xx^2$, *lege*, $rr - xx$. *Ibid. in fig. col.* 2. *in extremitate ſecantis*, C e *ſcribatur* a. *P.* 309. *col.* 2. *l.* 16., velocitate, *leg.* velocitas. *P.* 310. *col.* 1. *l.* 3. DLMe, *leg.* DLme. *Ibid.* $\theta : T$, *leg.* $\theta : t$. *P.* 311. *col.* 2. *l.* 4. $EM = \sqrt{2ABGE}$, *leg.* $EM = \frac{1}{\sqrt{2ABGE}}$. *P.* 339. *col.* 1. *l.* 4. corpus P, *leg.* corpus p. *Ibid. l.* 10. ſeu kCP, *leg.* ſeu KCP. *Ibid. col.* 2. *l.* 5. verſus p, *leg.* verſus P. *P.* 344. *col.* 1. *l.* 3. tendente ad focum ellipſeos, *leg.* tendente ad centrum ellipſeos. *P.* 368. *col.* 1. *initio lineæ* 1æ. *ſcribe*: (456). *Ibid. col.* 2. *l.* 16. ex generi, *leg.* ex geneſi. *P.* 400. *col.* 1. *l.* 8. *notæ* 490. DQ, *leg.* DH. *P.* 401. *col.* 1. *l.* 15. $POp = \frac{Cpfxdx}{2r\sqrt{kkmm - kkxx - llpp}}$, *leg.* $POp = \frac{Cpfxdx}{2r\sqrt{kkmm - kkxx - CCpp}}$. *P.* 426. *col.* 2. *l.* 18. NM, *leg.* n,m. *P.* 441. *col.* 1. *l.* 21. (505), *leg.* (507). *P.* 442. *col.* 2. *l.* 9., *leg.* arcus PK, πPk, Kkca in planis TpP, TπP, EST. *P.* 443. *col.* 2. *l.* 2. (509), *leg.* (508). *P.* 444. *col.* 1. *l. penultima* (509), *leg.* (510). *P.* 445. *in figurâ*, *loco* B *ſcribe* N, *& loco* N *ſcribe* B. *P.* 455. *col.* 2. *l.* 2. (513), *leg.* (504). *P.* 473. *col.* 2. *l.* 4. quod ſi ſphæræ, *leg.* quod ſi (ut hic ſupponitur) vires abſolutæ particularum utriuſque ſphæræ. *Ibid. col.* 2. *l.* 7. Si verò &c. *hæc ad finem uſque notæ delenda ſunt.*



PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I. (a)

Quantitas Materiæ eſt menſura ejuſdem orta ex illius Denſitate & Magnitudine conjunctim.

AER, denſitate duplicata, in ſpatio etiam duplicato fit quadruplus; in triplicato ſextuplus. Idem intellige de Nive & Pulveribus per compreſſionem vel liquefactionem

Licet primæ definitiones NEWTONIANÆ *vix aliquam poſtulare videantur explicationem; in ipſo tamen operis noſtri limine, nonnulla levioris momenti præmittenda judicamus, quæ ad majora viam ſternunt. Primà quæ in poſterùm ſæpiùs recurrent Mechanices principia interſerere non abs re erit, tùm ut Lectorum labori parcamus, tùm ut magis continua ſervetur noſtrarum demonſtrationum ſeries.*

(a) 1. Materia eſt ſubſtantia trinâ dimenſione prædita, ſolida ſeu impenetrabilis, mobilis, diviſibilis. Spatium purum eſt illa immenſa, penetrabilis, ſui ubique

DEFINITIONES. tionem condenſatis. Et par eſt ratio corporum omnium, quæ per cauſas quaſcunque diverſimodè condenſantur. Medii interea, ſi quod fuerit, interſtitia partium liberè pervadentis, hic nullam rationem habeo. Hanc autem Quantitatem ſub nomine Corporis vel Maſſæ in ſequentibus paſſim intelligo. Innoteſcit ea per corporis cujuſque Pondus. Nam (b) Ponderi proportionalem eſſe reperi per experimenta Pendulorum accuratiſſimè inſtituta, uti poſthac docebitur.

DE-

ubique ſimilis, immobilis extenſio, in quâ corpora omnia liberrimè moveri intelligimus. In corpore dato materiæ quantitatem ſeu maſſam, à corporis magnitudine, aut volumine ſeu mole diſtingui oportet. Materiæ quantitas eſt aggregatum, ſeu ſumma omnium materiæ particularum quibus compoſitum eſt corpus. Volumen, ſeu Magnitudo, eſt tota trina dimenſio ſub exteriori corporis ſuperficie contenta. Porrò inter ſolidas ſeu impenetrabiles corporis particulas ſive elementa, plura eſſe poſſunt diſſeminata foramina ſeu pori, vel omni materiâ vacui, vel quos aliena materia liberè pervadat; ſic aër ſubtilior ſpongiæ poros permeat, & ad ſpongiæ materiam non pertinet. Si nulla ſint inter ſolidas corporis partes admixta foramina, Maſſa & volumen non differunt; at ſi poris pertuſum ſit corpus, Maſſam volumen ſuperat.

2. Denſitas eſt ratio maſſæ corporis ad illius volumen; adeò ut ſub æqualibus voluminibus, denſitates ſint in ratione directâ maſſarum; & eadem ſeu æquali manente in diverſis corporibus maſsâ, denſitates ſint in ratione voluminum reciprocâ. Itaque ſi denſitas dicatur D; maſſa M; volumen V; erit $D = M : V$; ſeu denſitas exponi poteſt per maſſam ad volumen applicatam, ſive, quod idem eſt, denſitas erit ut maſſa per volumen diviſa. Si itaque D & $M : V$, per V multiplicentur, erit $DV = M$, ſeu maſſa aut quantitas materiæ eſt ut denſitas in volumen ducta; Maſſa igitur exponi poteſt per factum ex denſitate in volumen. Quare ſi DV & M, per D dividantur, erit $V = M : D$, ſeu volumen eſt ut maſſa ad denſitatem applicata, ſive volumen eſt in ratione compoſitâ ex directâ ratione maſſæ & inversâ denſitatis. Si denſitates fuerint æquales, ſeu ſi $m : v = M : V$, patet maſſas eſſe inter ſe ut volumina directè. His poſitis facilè intelligitur maſſam aëris, denſitate duplicatâ, in ſpatio etiam duplicato fieri quadruplam, nam ob duplicatam denſitatem in eodem ſpatio dupla eſt maſſa; ergò duplicato etiam ſpatio maſſa rurſus duplicatur & fit quadrupla.

(b) 3. Maſſam eſſe ponderi proportionalem, ob frequentiſſimum hujuſce veritatis uſum, hic breviter oſtendimus. Gravia omnia, ut notiſſimis conſtat experimentis, per lineas ad terræ ſuperficiem perpendiculares ac proinde ad ſenſum parallelas deſcendunt, & in tubis aëre vacuis plumbum leviſſimaque pluma eâdem celeritate cadunt, ſeu æqualia ſpatia, æqualibus temporibus cadendo percurrunt. Nec ſucceſſu caret experimentum, etiamſi coarctatis ac deductis poris vel ſuperficiebus, corporis figura mutetur; dummodò eadem remaneat maſſa, idem ſemper ſervatur pondus; ex quo ſequitur gravitatem non ſolùm exterioribus corporis partibus, ſed & interioribus æquè ineſſe; alioquin ejuſdem corporis ſub diverſis ſuperficiebus, idem non remaneret pondus, nec eadem foret ſub diverſis figuris celeritas; mutatâ enim ſuperficie, partes quæ antè interiores erant, exteriores fiunt & viceverſâ; æqualia igitur maſſæ elementa æquali urgentur vi gravitatis, ſeu æqualis ſunt ponderis; creſcit ergò totiùs maſſæ pondus ut elementorum æqualium numerus, ſeu creſcit pondus ut maſſa, ſive maſſa eſt ponderi proportionalis.

DEFINITIO II. (c)

Quantitas Motus eſt menſura ejuſdem orta ex Velocitate & Quantitate Materiæ conjunctim.

Motus totius eſt ſumma motuum in partibus ſingulis; ideo-

(c) 4. **Locus corporis eſt pars ſpatii, quam corpus occupat.** Motus eſt continua loci mutatio. Tria in motu conſideranda ſunt, corpus quod movetur ſeu mobile, ſpatium quod percurritur, & tempus quo percurritur. Spatium percurſum eſt linea quam mobile inſtar puncti conſideratum deſcribere intelligitur. Directio motûs eſt linea recta quam mobile deſcribit aut deſcribere nititur. Motus conſpirantes ſunt quorum directiones congruunt, aut ſaltem ſunt parallelæ & ad eaſdem partes tendunt. Motus contrarii ſeu directè oppoſiti dicuntur quorum directiones congruunt quidem, aut ſaltem ſunt parallelæ, ſed in oppoſitas partes vergunt. Motus æquabilis ſeu uniformis eſt, quo mobile æqualia ſpatia æqualibus temporibus percurrit. Motus acceleratus, quo mobile majora continuò ſpatia æqualibus temporibus deſcribit. Motus retardatus quo mobile per minora continuò ſpatia æqualibus temporibus fertur.

5. Celeritas ſeu velocitas, eſt ea corporis moti affectio quâ aptum redditur, datum ſpatium dato tempore æquabiliter percurrendi. Eſt igitur celeritatis menſura in motu æquabili quærenda, ſeu, ut habeatur quantitas velocitati proportionalis, quærendum eſt ſpatium quod corpus dato tempore percurreret, ſi illius motus conſtans atque æquabilis permaneret. Porrò manifeſtum eſt celeritatem eſſe duplam, triplam, ſi temporibus æqualibus duplum, vel triplum percurratur ſpatium; & contrà celeritatem eſſe ſubduplam, ſubtriplam, ſi æqualia ſpatia, duplo, triplo tempore percurrantur; ergò manentibus temporibus, celeritates ſunt ut ſpatia; & manentibus ſpatiis, celeritates ſunt inverſè ut tempora; quare variantibus temporibus atque ſpatiis, celeritates ſemper erunt in ratione compoſitâ ex directâ ſpatiorum & reciprocâ temporum; ſeu ſi celeritas dicatur C, ſpatium S, tempus T; erit C ut $S : T$, ſive $C = S : T$, ſeu celeritas exponi poteſt per ſpatium ad tempus applicatum, & multiplicando utrinque per T, erit $CT = S$, ſeu ſpatium eſt ut celeritas in tempus ducta, & dividendo utrinque per C, erit $T = S : C$, ſeu tempus eſt ut ſpatium ad celeritatem applicatum. Si duorum mobilium celeritates C, c, ſeu $S : T$; $s : \tau$, fuerint æquales, id eſt $S : T = s : \tau$, erit $S : s = T : \tau$, ſeu ſpatia ſunt ut tempora.

6. Jam verò cum in motu nihil niſi corpus, ſpatium percurſum & tempus conſiderentur, & ratio ſpatii ad tempus celeritatem exponat (5), ſatis evidens eſt ad totum corporis motum ſeu quantitatem motûs inveniendam, ſolius maſſæ & celeritatis habendam eſſe rationem. Cum autem motus totius corporis ſit æqualis ſummæ motuum ſingularum Maſſæ partium, ſeu elementorum, patet manente celeritate, motum totius maſſæ creſcere prout creſcit numerus elementorum maſſæ æqualium, ſeu quantitatem motûs eſſe proportionalem maſſæ; manente verò maſſâ, quantitas motûs eſt ut velocitas; nam ſi corpus idem. duplum ſpatium eodem tempore percurrit, duplus eſt illius motus, ſi triplum triplus &c. Siquidem manentibus tempore & maſſâ, nulla eſt alia quam ſpatiorum varietas, & motus ſunt ut ſpatia; ſed ſpatia temporibus æqualibus percurſa ſunt ut celeritates (5), ergo quantitates motûs ſunt etiam ut celeritates. Quare variantibus maſſis atque celeritatibus, motûs quantitas eſt ſemper ut maſſa in celeritatem ducta, ſeu in ratione compoſitâ maſſæ & celeritatis; ſi itaque motûs quantitas dicatur Q; Maſſa M, celeritas C; erit Q ut MC, quod ità exponimus $Q = MC$, dividendo utrinque

 que in corpore duplo majore æquali cum velocitate duplus eſt, & duplâ cum velocitate quadruplus.

DEFINITIO III. (d)

Materiæ vis inſita eſt potentia reſiſtendi, qua corpus unumquodque, quantum in ſe eſt, perſeverat in ſtatu ſuo vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum.

Hæc ſemper proportionalis eſt ſuo corpori, neque differt quicquam ab inertia maſſæ, niſi in modo concipiendi. Per inertiam materiæ, fit ut corpus omne de ſtatu ſuo vel quieſcendi vel movendi difficulter deturbetur. Unde etiam vis inſita nomine ſignificantiſſimo vis Inertiæ dici poſſit. Exercet verò corpus hanc vim ſolummodo in mutatione ſtatus ſui per vim aliam in ſe impreſſam facta; eſtque exercitium illud ſub diverſo reſpectu & Reſiſtentia & Impetus: reſiſtentia, quatenus corpus ad conſervandum ſtatum ſuum reluctatur vi impreſſæ; impetus, quatenus corpus idem, vi reſiſtentis obſtaculi difficul-

que per M, & deindè per C, erit C = Q : M; & M = Q : C; Seu celeritas eſt ut quantitas motûs ad maſſam applicata, & maſſa viciſſim, ut quantitas motûs per celeritatem diviſa. Si quantitates motûs Q, q, ſeu MC, mc, fuerint æquales, erit MC = mc, & M : m = c : C, ſeu maſſæ ſunt reciprocè ut celeritates; & viceverſâ ſi M : m = c : C, erit MC = mc, ſeu ſi maſſæ ſunt in ratione velocitatum reciprocâ, quantitates motûs ſunt æquales. Præterea cum, (5), ſit C = S : T, erit etiam Q = MS : T, ſeu quantitates motûs ſunt in ratione compoſitâ ex directis rationibus maſſæ & ſpatii & inverſâ temporis; invenietur etiam QT = MS, M = QT : S; S = QT : M, T = MS : Q.

Pari facilitate demonſtrari poſſunt cætera theoremata quæ de motuum comparatione, apud ſcriptores mechanicos fuſè reperiuntur.

(d) 7. Vis duplex eſt, activa & paſſiva; Activa eſt potentia motum efficiendi; Paſſiva eſt potentia motum recipiendi vel amittendi; vis activa ſubdividi ſolet in vim vivam quæ cum motu actuali conjuncta eſt, & in vim mortuam quæ eſt tantùm conatus ſeu ſollicitatio ad motum & ex quâ motus actualis non producitur, niſi vis mortuæ actio aliquandiù in corpore continuata fuerit. Sic vis gravitatis in globo qui ex filo pendet vel plano horizontali incumbit, eſt vis mortua, quâ quidem actu non movetur globus, ſed conatur moveri filumque tendit, aut planum premit. Si filum abrumpatur, vel planum ſuſtentans auferatur, tùm continuâ gravitatis actione globus motu accelerato cadit. Vis quâ corpus in circuli peripheriâ motum, filum centro alligatum tendit, & quâ proindè conatur à centro recedere eſt quoque vis mortua.

8. Ineſt omni materiæ vis inſita paſſiva, ſeu inertia, ex quâ nullus motus, nullaque tendentia ad motum reſultat, ſed quæ conſiſtit in renixu quo corpus quodlibet, cuilibet vi externæ mutatio-nem

ſiculter cedendo, conatur ſtatum obſtaculi illius mutare. Vulgus reſiſtentiam quieſcentibus & impetum moventibus tribuit: ſed motus & quies, uti vulgo concipiuntur, reſpectu ſolo diſtinguuntur ab invicem; neque ſemper verè quieſcunt quæ vulgo tanquam quieſcentia ſpectantur. DEFINITIONES.

DEFINITIO IV. (e)

Vis impreſſa eſt actio in corpus exercita, ad mutandum ejus ſtatum vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum.

Conſiſtit hæc vis in actione ſola, neque poſt actionem permanet in corpore. Perſeverat enim corpus in ſtatu omni novo per ſolam vim inertiæ. Eſt autem vis impreſſa diverſarum originum, ut ex Ictu, ex Preſſione, ex vi Centripetâ.

DEFINITIO V.

Vis Centripeta eſt, qua corpora verſus punctum aliquod tanquam ad Centrum undique trahuntur, impelluntur, vel utcunque tendunt.

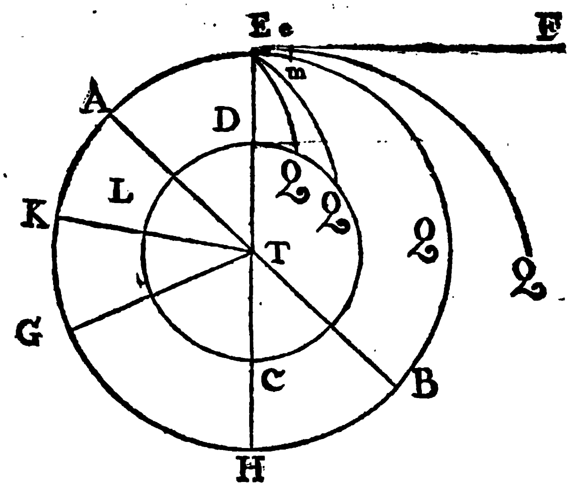
Hujus generis eſt Gravitas, qua corpora tendunt ad centrum

nem ſtatûs, id eſt, motûs vel quietis inducere conanti reſiſtit. Etenim nulla poteſt eſſe actio corporis in corpus, quin luctatio quædam, ut loquitur Clar. *Hermannus* in *Phoronomiâ*, fiat inter corpus agens & patiens, dum alterum alteri reſiſtit; alioquî corpus motum poſſet ſine motûs proprii detrimento, aliud quodcumque movere. Vis illa inertiæ eadem eſt in corporibus motis & quieſcentibus; tam enim reſiſtunt corpora actioni quâ à quiete ad motum concitantur, quam actioni quâ à motu ad quietem reducuntur. Eadem quippè vis requiritur ad motum datum producendum & ad eundem extinguendum. Quia autem vis illa inertiæ eadem in omnibus æqualibus materiæ partibus reperitur, conſequens eſt ut ſit materiæ proportionalis; dupla in maſſâ duplicatâ, tripla in triplicatâ. Majoribus etiam mutationibus corpora magis reſiſtunt quam minoribus, eſtque reſiſtentia actualis magnitudini mutationis proportionalis.

(e) 9. Nihil fit ſine cauſâ; undè omne corpus ut potè iners & paſſivum (8) in ſuo quocumque ſtatu perſeverat, niſi cauſâ aliquâ, ſeu vi externâ, ſtatum ſuum mutare cogatur; cum igitur vis aliqua in corpus actu agit; vis impreſſa ſeu actio mutat quidem corporis ſtatum, ſed ceſſante illius vis actione, corpus in novo ſtatu per illam actionem recepto perſeverat ſolâ vi inertiæ paſſivâ, quâ fit ut ſine novâ vi externâ ſtatum ſuum mutare nullâ ratione poſſit; adeoque ſi ſemel movetur, ſibi relictum, perpetuò atque æquabiliter per lineam rectam movebitur, ſeu ſecundum directionem quâ impulſum fuerit & quâ movebatur, dum actio vis externæ ceſſavit.

DEFINITIONES.

trum terræ; Vis Magnetica, quâ ferrum petit magnetem; & Vis illa, quæcunque ſit, quâ Planetæ perpetuò retrahuntur a motibus rectilineis, & in lineis curvis revolvi coguntur. Lapis, in funda circumactus, a circumagente manu abire conatur; & conatu ſuo fundam diſtendit, eoque fortius quo celerius revolvitur; & quamprimum dimittitur, avolat. Vim conatui illi contrariam, quâ funda lapidem in manum perpetuo retrahit & in orbe retinet, quoniam in manum ceu orbis centrum dirigitur, Centripetam appello. Et par eſt ratio [f] corporum omnium, quæ in gyrum aguntur. Conantur ea omnia a centris orbium recedere; & niſi adſit vis aliqua conatui iſti contraria, quâ cohibeantur & in orbibus retineantur, quamque ideo Centripetam appello, abibunt in rectis lineis uniformi cum motu. Projectile, ſi vi Gravitatis deſtitueretur, non deflecteretur in terram, ſed in linea recta abiret in cœlos; idque uniformi cum motu, ſi modo aeris reſiſtentia tolleretur. Per gravitatem ſuam retrahitur a curſu rectilineo & in terram perpetuo flectitur, idque magis vel minus pro gravitate ſua & velocitate motus. Quo



[f] 10. Cùm linea quævis curva conſiderari poſſit tanquam polygonum, ex infinitis numero, atque infinitè parvis ſeu evaneſcentibus lateribus rectis compoſitum. Si corpus in curvâ E B H K, moveatur, in ſingulis curvæ punctis E fertur juxtà directionem lateris evaneſcencentis E e, adeòque ſi ſibi relinqueretur, nec altera vis in extremitate hujus rectæ, E e, illud retraheret, & in lineam, e m, inflecteret, perpetuò atque æquabiliter moveretur per rectam, E e, productam (9) ac proindè cum linea E e producta, ſit ipſa curvæ tangens E F, uniformiter moveretur per tangentem in puncto E, niſi nova vis perpetuò in illud agens, cujus directio eſt versùs curvam, ipſum a motu rectilineò retraheret & in orbitâ ſuâ retineret; quo major eſt vis aut celeritas ſecundùm directionem tangentis vel evaneſcentis lateris, E e, & minor vis illa quâ mobile a tangente in cur-

Quo minor fuerit ejus gravitas pro quantitate materiæ vel major velocitas quâcum projicitur, eo minus deviabit a curſu rectilineo & longius perget. Si Globus plumbeus, data cum velocitate ſecundum lineam horizontalem a montis alicujus vertice vi pulveris tormentarii projectus, pergeret in linea curva ad diſtantiam duorum milliarium, priuſquam in terram decideret: hic dupla cum velocitate quaſi duplo longius pergeret, & decupla cum velocitate quaſi decuplo longius: ſi modo aeris reſiſtentia tolleretur. Et augendo velocitatem augeri poſſet pro lubitu diſtantia in quam projiceretur, & minui curvatura lineæ quam deſcriberet, ita ut tandem caderet ad diſtantiam graduum decem vel triginta vel nonaginta; vel etiam ut terram totam circuiret vel denique ut in cœlos abiret & motu abeundi pergeret in infinitum. Et eadem ratione, quâ Projectile vi gravitatis in orbem flecti poſſet & terram totam circuire, poteſt & Luna vel vi gravitatis, ſi modo gravis ſit, vel aliâ quâcunque vi, quâ in terram urgeatur, retrahi ſemper a curſu rectilineo terram verſus, & in orbem ſuum flecti: & ſine tali vi Luna

curvam retrahitur, eò minùs a tangente deviat corpus, adeoque curva quam motu ſuo deſcribit, ad tangentem ſeu rectam lineam propiùs accedit. Econtrà decreſcente vi aut celeritate ſecundùm directionem tangentis, aut creſcente vi alterâ quæ a tangente deflectit, corpus a motu rectilineo magis retrahitur, & major fit lineæ curvatura. Nam effectus ſunt cauſis ſuis proportionales; eſt autem motus per tangentem rectilineus, effectus vis ſecundùm directionem tangentis, & deviatio a tangente, effectus vis illius quæ a tangente retrahit.

11. Sit terræ circumferentia D Q C, illiuſque centrum T, ex quo vim ad centrum trahentem per totum circumquaque ſpatium propagari fingamus, aut, ſi magis placuerit, ſupponamus eſſe vim per totum ſpatium diffuſam, quâ corpora omnia ſecundùm directionem radiorum, E T, A T, ad centrum T urgeantur, & ex vertice E montis E D projiciatur corpus juxtà directionem rectæ E F ad E T, normalis; corpus illud hâc ſolâ vi impreſſâ æquabiliter per rectam E F moveretur (9); at vi centripetâ ſeu vi tendente ad centrum T ab illâ rectâ perpetuò retrahitur & cogitur incedere in curvâ aliquâ E Q quam tangit in E recta E F (10); augendo vim impreſſam ſecundùm directionem tangentis, E F, curva E Q, ad tangentem E F, propiùs accedit, adeò ut corpus variis & ſucceſſivè creſcentibus celeritatibus projectum, terram tardiùs ſemper attingat; deindè circà eam revolvatur, tandemque in infinitum abeat. Ut igitur corpus per rectam E F, datâ velocitate projectum, curvam datam E Q deſcribat, certa ac determinata vis centripeta requiritur; & viceverſâ datâ velocitate ſecundùm rectam E e ſeu E F, & vi centripetâ etiam datâ, corpus nonniſi certam ac determinatam curvam E Q poteſt deſcribere; & mathematicorum eſt ex datis velocitate per tangentem E F & curvâ E Q quam corpus deſcribit, invenire vim centrip

Luna in orbe ſuo retineri non poteſt. Hæc vis, ſi juſto minor eſſet, non ſatis flecteret Lunam de curſu rectilineo: ſi juſto major, plus ſatis flecteret, ac de orbe ſuo terram verſus deduceret. Requiritur quippe, ut ſit juſtæ magnitudinis: & Mathematicorum eſt invenire Vim, quâ corpus in dato quovis orbe datâ cum velocitate accuratè retineri poſſit; & viciſſim invenire viam curvilineam, in quam corpus é dato quovis loco datâ cum velocitate egreſſum a datâ vi flectatur. Eſt autem vis hujus centripetæ Quantitas trium generum, Abſoluta, Acceleratrix, & Motrix.

DEFINITIO VI. (8)

Vis centripetæ Quantitas Abſoluta eſt menſura ejuſdem major vel minor pro Efficacia cauſæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu.

Ut vis Magnetica pro mole magnetis vel intenſione virtutis major in uno magnete, minor in alio.

DEFI-

tripetam, quâ a tangente retrahitur & in orbitâ ſuâ retinetur, & reciprocè ex datâ velocitate per tangentem & vi centripetâ, curvam invenire; quæ duo Newtonus mirâ ſagacitate & elegantiâ perfecit.

(8) 12. In centro T exiſtere ſupponatur corpus, ex quo per omne ſpatium diffundatur vis, quæ juxta directionem radiorum AT, ET, HT, versùs centrum, aut a centro versùs ſpatia circumpoſita, juxtà directionem radiorum, TA, TE, TH, agat; in 1°. caſu vis illa centripeta, in 2°. vis centrifuga, in utroque vis centralis dicitur.

Hæc vis in centro conſiderata duplici præſertim ratione variare poteſt; Si enim corpus quod centrum occupat, & cui vis ineſt, in ſua æqualia elementa diviſum intelligatur, & vis ſit ſingulis elementis æqualis ejuſdemque conſtanter intenſionis; vis totius corporis centralis, ſeu vis centralis quantitas abſoluta, erit maſſæ ſeu ſummæ elementorum proportionalis. At ſi manente eâdem corporis centralis maſsâ, vis ſemper manens æqualis in ſingulis elementis æqualibus intenſivè creſcat vel decreſcat, vis tota corporis centralis ſeu vis centralis quantitas abſoluta, erit proportionalis intenſioni vis in ſingulis elementis exiſtentis; quare variantibus maſsâ & vi ſingulorum elementorum, vis centralis quantitas abſoluta erit in ratione compoſitâ maſſæ & intenſionis vis in ſingulis elementis æqualibus.

DEFINITIO VII. (h)

Vis centripetæ Quantitas Acceleratrix eſt ipſius menſura Velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti Virtus magnetis ejuſdem major in minori diſtantia, minor in majori: vel vis Gravitans major in vallibus, minor in cacuminibus altorum montium, atque adhuc minor (ut poſthac patebit) in majoribus diſtantiis à globo terræ; in æqualibus autem diſtantiis eadem undique, propterea quod corpora omnia cadentia (gravia an levia, magna an parva) ſublata Aeris reſiſtentia, æqualiter accelerat.

(h) 13. Si vis centralis non ampliùs in centro, ſed in quâcumque à centro diſtantiâ conſideretur, poſſumus in variis illis à centro diſtantiis ſuperficies ſphæricas fingere quarum commune centrum ſit T, & vis centralis in illis diſtantiis ſeu ſuperficiebus ſphæricis conſiderata, dicitur vis acceleratrix. Illius autem quantitas erit proportionalis celeritati quam dato ſeu conſtante tempore in ſingulis materiæ elementis à centro æquidiſtantibus producet; nam ſi ſupponamus vim illam conſtantem in elementa materiæ continuò agere, eo major erit quo major erit velocitas dato tempore genita, ita ut ſi tempore æquali dupla generetur velocitas, dupla quoque ſit vis, cum velocitas illa ſit illius vis effectus plenus. Si conſtans maneat celeritas à vi acceleratrice genita, erit vis in ratione inversâ temporis quo celeritas illa producitur, nam ſi eadem celeritas tempore ſubduplo producatur, vis duplicatur. Quare ſi manente vi conſtante, celeritas & tempus varient, erit vis acceleratrix in ratione compoſitâ ex directâ celeritatis genitæ & reciprocâ temporis. Si igitur vis acceleratrix dicatur, G; celeritas producta C; tempus quo producitur, T, erit $G = C : T$, & $GT = C$, & $T = C : G$. Licet autem variet vis acceleratrix, eadem tamen eſt illius menſura, modò celeritas naſcens ſeu initio motûs tempore quàm minimo producta conſideretur, tunc enim vis agit uniformiter.

14. Si vis aliqua per radios divergentes in medio non reſiſtente diffundatur, vis acceleratrix decreſcit in ratione duplicatâ diſtantiarum à centro; nam quia vis illa, ex hyp., in medio non reſiſtente propagatur, nullus intercipitur radius, nec vis ſingulorum minuitur, adeóque radii qui in diſtantiâ T L, per hemiſphærium à ſemicirculo D L C deſcriptum diffundebantur, in diſtantiâ; T K per hemiſphærium E K H propagantur; eſt autem vis acceleratrix ut radiorum denſitas, & radiorum denſitas eſt reciprocè ut ſuperficies hemiſphæriorum à ſemicirculis deſcriptorum; nam radiorum denſitas eſt ut ſumma ſeu numerus radiorum per ſuperficiem quam occupant diviſus; hìc enim ſumma radiorum eſt ut maſſa, ſuperficies verò cui inſunt ut volumen. Verùm cum per hyp., idem numerus radiorum ſuperficies ſingulorum hemiſphæriorum occupet, erit denſitas radiorum in ratione inversâ illarum ſuperficierum in quâvis à centro diſtantiâ deſcriptarum; illæ autem ſuperficies ſunt in ratione duplicatâ diſtantiarum à centro; ergò & vis acceleratrix eſt in ratione duplicatâ diſtantiarum à centro reciprocè. Egregium illud theorema, ut ex demonſtratione patet, omnem excludit medii reſiſtentiam; quare ut in phyſicis valeat, medii reſiſtentia in com-

DEFINITIO VIII. ([i])

Vis centripetæ Quantitas Motrix eſt ipſius menſura proportionalis Motui, quem dato tempore generat.

Uti Pondus majus in majore corpore, minus in minore; & in corpore eodem majus prope terram, minus in cœlis. Hæc Quantitas eſt corporis totius centripetentia ſeu propenſio in centrum, & (ut ita dicam) Pondus; & innoteſcit ſemper per vim ipſi contrariam & æqualem, quâ deſcenſus corporis impediri poteſt.

Haſce virium quantitates brevitatis gratia nominare licet vires motrices, acceleratrices, & abſolutas; & diſtinctionis gratia referre ad Corpora, centrum petentia, ad corporum Loca, & ad Centrum virium: nimirum vim motricem ad Corpus, tanquam conatum totius in centrum ex conatibus omnium partium compoſitum; & vim acceleratricem ad Locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca ſingula in circuitu diffuſam, ad movenda corpora quæ in ipſis ſunt; vim autem abſolutam ad Centrum, tanquam cauſa aliqua

computum venire debet. Hæc autem virium ſeu qualitatum è centro emanantium theoria ad majorem univerſalitatem reduci poteſt, ſi vis in ſingulis radiis variè propagari ſupponatur, aut etiam ſi per lineas curvas diffundi fingatur. Sed hæc fuſiùs proſequi præſentis non eſt inſtituti.

([i]) 15. Si vis centripeta in corpore ad centrum propulſo conſideretur; ut totus illius corporis in centrum conatus ſeu vis centripetæ quantitas motrix habeatur, ducenda eſt maſſa in vim acceleratricem; nam vis motrix totius corporis componitur ex omnibus viribus, quibus ſingula æqualia elementa urgentur, adeóque ex vi acceleratrice toties ſumptâ quot ſunt in corpore æqualia materiæ elementa, ſive ex vi acceleratrice in maſſam ductâ. Supponimus enim ſingula elementa æqualia, æquali vi acceleratrice urgeri. Sed vis acceleratrix eſt ut celeritas dato tempore genita (13), ergò vis centripetæ quantitas motrix eſt ut maſſa in illam celeritatem ducta, ſeu ut quantitas motûs, dato tempore producta. Si igitur vis acceleratrix dicatur, G; maſſa, M, vis motrix, p, erit p, ut, M G, & M, ut p: G, & G, ut p: M, ſeu maſſa eſt ut vis motrix per vim acceleratricem diviſa, & vis acceleratrix, ut vis motrix per maſſam diviſa. Si duæ fuerint vires motrices P & p, ſeu M G, & m g, æquales, erit M: m = g: G, ſeu maſſæ ſunt ut vires acceleratrices reciprocè; & viceversâ, ſi M: m = g: G, erit m g = M G, ſeu ſi maſſæ ſunt reciprocè ut vires acceleratrices, vires motrices ſunt æquales. Porrò cum vires acceleratrices ſint ut celeritates dato tempore genitæ (13), in ſuperioribus proportionibus loco virium acceleratricium celeritates illæ ſubſtitui poſſunt.

qua præditum, ſine quâ vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; ſive cauſa illa ſit corpus aliquod centrale (quale eſt Magnes in centro vis magneticæ, vel Terra in centro vis gravitantis) ſive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus duntaxat eſt hic conceptus. Nam virium cauſas & ſedes Phyſicas jam non expendo.

Eſt igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate & ex quantitate materiæ, & vis motrix ex vi acceleratrice & ex quantitate ejuſdem materiæ conjunctim. Nam ſumma actionum vis acceleratricis in ſingulas corporis particulas eſt vis motrix totius. Unde juxta ſuperficiem Terræ, ubi gravitas acceleratrix ſeu vis gravitans in corporibus univerſis eadem eſt, gravitas motrix ſeu pondus eſt ut corpus: at ſi in regiones aſcendatur ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritque ſemper ut corpus & gravitas acceleratrix conjunctim. Sic in regionibus ubi gravitas acceleratrix duplo minor eſt, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel ſextuplo minus.

Porro attractiones & impulſus eodem ſenſu acceleratrices & motrices nomino. Voces autem Attractionis, Impulſus, vel Propenſionis cujuſcunque in centrum, indifferenter & pro ſe mutuò promiſcuè uſurpo; has vires non Phyſicè ſed Mathematicè tantùm conſiderando. Unde caveat lector, ne per hujuſmodi voces cogitet me ſpeciem vel modum actionis cauſamve aut rationem Phyſicam alicubi definire, vel centris (quæ ſunt puncta Mathematica) vires verè & Phyſicè tribuere; ſi forte aut centra trahere, aut vires centrorum eſſe dixero.

Scholium.

Hactenus voces minus notas, quo ſenſu in ſequentibus accipiendæ ſint, explicare viſum eſt. Tempus, Spatium, Locum & Motum, ut omnibus notiſſima, non definio. Notandum tamen, quod vulgus quantitates haſce non aliter quam

DEFINITIONES.

ex relatione ad ſenſibilia concipiat. Et inde oriuntur præjudicia quædam, quibus tollendis convenit eaſdem in abſolutas & relativas, veras & apparentes, mathematicas & vulgares diſtingui.

(k) I. Tempus Abſolutum, verum, & mathematicum, in ſe & naturâ ſuâ ſine relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioque nomine dicitur Duratio: Relativum, apparens, & vulgare eſt ſenſibilis & externa quævis Durationis per motum menſura (ſeu accurata ſeu inæquabilis) quâ vulgus vice veri temporis utitur; ut Hora, Dies, Menſis, Annus.

II. Spatium Abſolutum, naturâ ſuâ ſine relatione ad externum quodvis, ſemper manet ſimilare & immobile: Relativum eſt ſpatii hujus menſura ſeu dimenſio quælibet mobilis, quæ à ſenſibus noſtris per ſitum ſuum ad corpora definitur, & à vulgo pro ſpatio immobili uſurpatur; uti dimenſio ſpatii ſubterranei, aerei vel cœleſtis definita per ſitum ſuum ad Terram. Idem ſunt ſpatium abſolutum & relativum, ſpecie & magnitudine; ſed non permanent idem ſemper numero. Nam ſi Terra, verbi gratia, moveatur; ſpatium Aeris noſtri, quod relativè & reſpectu Terræ ſemper manet idem, nunc erit una pars ſpatii abſoluti in quam Aer tranſit, nunc alia pars ejus; & ſic abſolutè mutabitur perpetuò.

III. Locus eſt pars ſpatii quam corpus occupat, eſtque pro ratione ſpatii vel Abſolutus vel Relativus. Pars, inquam, ſpatii; non Situs corporis, vel Superficies ambiens. Nam ſolidorum æqualium æquales ſemper ſunt loci; Superficies autem ob diſſimilitudinem figurarum ut plurimùm inæquales ſunt; Situs vero propriè loquendo quantitatem non habent, ne-

(k) 16. Quemadmodùm Geometræ lineam fluxu puncti generari fingunt, ita tempus abſolutum mathematicè conſiderare poſſumus, tanquam æquabilem unius inſtantis ſeu puncti temporis fluxum. Quapropter ſi corpus aliquod æquabili celeritate moveretur, illud eodem modo ac temporis punctum flueret, ſpatiaque ab eo deſcripta forent temporibus proportionalia (5); eo igitur motu tanquam accuratâ durationis menſurâ uti poſſemus. Verùm corporum cæleſtium & horologiorum motus, quos ad temporis menſuram adhibemus, licet vulgò ſupponantur æquabiles, variis tamen ex cauſis accelerantur vel retardantur, ſicque menſuræ illæ vulgares non ſunt tempori abſoluto proportionales.

neque tam ſunt loca quam affectiones locorum. Motus totius idem eſt cum ſumma motuum partium, hoc eſt, translatio totius de ſuo loco eadem eſt cum ſumma tranſlationum partium de locis ſuis; ideoque locus totius idem eſt cum ſumma locorum partium, & propterea internus & in corpore toto.

IV. Motus Abſolutus eſt tranſlatio corporis de loco abſoluto in locum abſolutum, Relativus de relativo in relativum. Sic in navi quæ velis paſſis fertur, relativus corporis Locus eſt navigii regio illa in quâ corpus verſatur, ſeu cavitatis totius pars illa quam corpus implet, quæque adeo movetur unà cum navi: & Quies relativa eſt permanſio corporis in eâdem illâ navis regione vel parte cavitatis. At quies vera eſt permanſio corporis in eâdem parte ſpatii illius immoti in quâ navis ipſa unà cum cavitate ſuâ & contentis univerſis movetur. Unde ſi Terra verè quieſcat, corpus quod relativè quieſcit in navi, movebitur verè & abſolutè eâ cum velocitate quâ navis movetur in Terra. Sin Terra etiam moveatur, orietur verus & abſolutus corporis motus, partim ex Terræ motu vero in ſpatio immoto, partim ex navis motu relativo in Terrâ: & ſi corpus etiam moveatur relativè in navi, orietur verus ejus motus, partim ex vero motu Terræ in ſpatio immoto, partim ex relativis motibus tum navis in Terrâ, tum corporis in navi; & ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in Terrâ. Ut ſi Terræ pars illa, ubi navis verſatur, moveatur verè in orientem cum velocitate partium 10010; & velis ventoque feratur navis in occidentem cum velocitate partium decem; Nauta autem ambulet in navi orientem verſus cum velocitatis parte unâ: movebitur Nauta verè & abſolutè in ſpatio immoto cum velocitatis partibus 10001 in orientem, & relativè in terrâ occidentem verſus cum velocitatis partibus novem.

(1) Tempus Abſolutum a relativo diſtinguitur in Aſtronomiâ per

(1) 17. *Æquatio temporis* dicitur differentia quæ inter tempus abſolutum & tempus relativum, (h. e. tempus per ſolis revolutionem menſuratum) intercedit; quæ proindè tempori relativo juncta, vel ab eo ſubducta conficit tempus abſolutum & viceversâ.

per Æquationem temporis vulgi. Inæquales enim ſunt dies naturales, qui vulgo tanquam æquales pro menſura temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Aſtronomi, ut ex veriore tempore menſurent motus cœleſtes. Poſſibile eſt, ut nullus ſit motus æquabilis quo Tempus accurate menſuretur. Accelerari & retardari poſſunt motus omnes, ſed fluxus temporis abſoluti mutari nequit. Eadem eſt duratio ſeu perſeverantia exiſtentiæ rerum; ſive motus ſint celeres, ſive tardi, ſive nulli: proinde hæc a menſuris ſuis ſenſibilibus meritò diſtinguitur, & ex iiſdem colligitur per Æquationem Aſtronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis Phænomenis neceſſitas, tum per experimentum Horologii Oſcillatorii, tum etiam per eclipſes Satellitum Jovis evincitur.

Ut ordo partium Temporis eſt immutabilis, ſic etiam ordo partium Spatii. Moveantur hæc de locis ſuis, & movebuntur (ut ita dicam) de ſeipſis. Nam tempora & ſpatia ſunt ſui ipſorum & rerum omnium quaſi Loca. In Tempore quoad ordinem ſucceſſionis; in Spatio quoad ordinem ſitus locantur univerſa. De illorum eſſentia eſt ut ſint Loca: & loca primaria moveri abſurdum eſt. Hæc ſunt igitur abſoluta Loca; & ſolæ tranſlationes de his locis ſunt abſoluti Motus.

Verum quoniam hæ Spatii partes videri nequeunt, & ab invicem per ſenſus noſtros diſtingui; earum vice adhibemus menſuras ſenſibiles. Ex poſitionibus enim & diſtantiis rerum à corpore aliquo, quod ſpectamus ut immobile, definimus loca univerſa: deinde etiam & omnes motus æſtimamus cum reſpectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iiſdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum abſolutorum relativis utimur, nec incommodè in rebus humanis: in Philoſophicis autem abſtrahendum eſt a ſenſibus. Fieri etenim poteſt, ut nullum revera quieſcat corpus, ad quod loca motuſque referantur.

Diſtinguuntur autem Quies & Motus abſoluti & relativi ab invicem per Proprietates ſuas & Cauſas & Effectus. Quietis proprietas eſt, quod corpora verè quieſcentia quieſcunt inter ſe. Ideoque cum poſſibile ſit, ut corpus aliquod in regioni-

bus

bus Fixarum, aut longè ultra, quieſcat abſolutè; ſciri autem non poſſit ex ſitu corporum ad invicem in regionibus noſtris, horumne aliquod ad longinquum illum datam poſitionem ſervet necne, quies vera ex horum ſitu inter ſe definiri nequit.

Motus proprietas eſt, quod partes, quæ datas ſervant poſitiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam Gyrantium partes (m) omnes conantur recedere ab axe motus, & Progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium ſingularum. Motis igitur corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relativè quieſcunt. Et propterea motus verus & abſolutus definiri nequit per tranſlationem è viciniâ corporum, quæ tanquam quieſcentia ſpectantur. Debent enim corpora externa non ſolum tanquam quieſcentia ſpectari, ſed etiam verè quieſcere. Alioquin incluſa omnia, præter tranſlationem è viciniâ ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros; & ſublatâ illâ tranſlatione non verè quieſcent, ſed tanquam quieſcentia ſolummodo ſpectabuntur. Sunt enim ambientia ad incluſa, ut totius pars exterior ad partem interiorem, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, ſine tranſlatione de viciniâ corticis, ceu pars totius movetur.

Præcedenti proprietati affinis eſt, quod moto Loco movetur unà Locatum: ideoque corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci ſui motum. (n) Motus igitur omnes, qui de locis motis fiunt, ſunt partes ſolummodo motuum integrorum & abſolutorum: & motus omnis integer componitur ex

(m) 18. Gyrantium corporum partes ſingulæ in orbitis curvilineis moventur, adeóque (10) per tangentes orbitarum progredi, atque ita ab axe motûs recedere nituntur; ut ſi trochus vel ſphæra circa axem rotatur, ſingulæ illorum corporum partes circulos deſcribunt, & ab illorum centris per tangentes effugere conantur, cumque omnia illa centra ſint in axe motûs poſita, ſingulæ partes ab axe recedere nituntur.

(n) 19. Si nauta in navi deambulare ſupponatur, motuſque navis & nautæ conſpirent, integra & abſoluta nautæ celeritas componitur ex celeritate nautæ reſpectu loci ſui primi in navi, ex celeritate loci illius, id eſt, navis reſpectu maris, ſeu reſpectu loci ſecundi, & ex celeritate maris reſpectu ſpatii immoti. Si autem motus nautæ, motui navis foret directè oppoſitus, abſoluta nautæ velocitas æqua-

DEFINITIONES.

ex motu corporis de loco ſuo primo, & motu loci hujus de loco ſuo, & ſic deinceps; uſque dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo Nautæ ſupra memorato. Unde motus integri & abſoluti non niſi per loca immota definiri poſſunt: & propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia ſupra retuli. Loca autem immota non ſunt, niſi quæ omnia ab infinito in infinitum datas ſervant poſitiones ad invicem; atque adeo ſemper manent immota, ſpatiumque conſtituunt quod Immobile appello.

Cauſæ, quibus motus veri & relativi diſtinguuntur ab invicem, ſunt Vires in corpora impreſſæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur, niſi per vires in ipſum corpus motum impreſſas: at motus relativus generari & mutari poteſt ſine viribus impreſſis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimatur in alia ſolum corpora ad quæ fit relatio, ut iis cedentibus mutetur relatio illa in quâ hujus quies vel motus relativus conſiſtit. Rurſum motus verus à viribus in corpus motum impreſſis ſemper mutatur; at motus relativus ab his viribus non mutatur neceſſario. Nam ſi eædem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, ſic imprimantur ut ſitus relativus conſervetur, conſervabitur relatio in quâ motus relativus conſiſtit. Mutari igitur poteſt motus omnis relativus ubi verus conſervatur, & conſervari ubi verus mutatur; & propterea motus verus in ejuſmodi relationibus minime conſiſtit.

Effectus, quibus motus abſoluti & relativi diſtinguuntur ab invicem, ſunt vires recedendi ab axe motus circularis. (o) Nam in motu circulari nudè relativo hæ vires nullæ ſunt, in vero autem & abſoluto majores vel minores pro quantitate motus. Si

æqualis foret differentiæ celeritatum navis reſpectu ſpatii immoti & nautæ reſpectu navis. Tandem ſi motus nautæ reſpectu navis foret obliquus, illius directio & velocitas in duas alias directiones & velocitates ita reſolvi debent, ut una directio cum aliorum motuum communi directione conſpiret, alia verò ſit ipſi perpendicularis, tuncque, ex regulis infrà demonſtrandis, facillimè invenietur tùm abſoluta nautæ celeritas, tùm illius vera directio.

(o) 20. In motu circulari nudè relativo, id eſt, in quiete abſolutâ corporis inertis, quod motu duntaxat relativo movetur, vires activæ nullæ ſunt.

Si pendeat ſitula à filo prælongo, agaturque perpetuo in orbem, donec filum à contorſione admodum rigeſcat, dein impleatur aquâ, & uná cum aquâ quieſcat; tum vi aliquâ ſubitanea agatur motu contrario in orbem, & filo ſe relaxante, diutius perſeveret in hoc motu; (P) ſuperficies aquæ ſub initio plana erit, quemadmodum ante motum vaſis: at poſtquam vas, vi in aquam paulatim impreſſa, effecit ut hæc quoque ſenſibiliter revolvi incipiat; recedet ipſa paulatim à medio, aſcendetque ad latera vaſis, figuram concavam induens, (ut ipſe expertus ſum) & incitatiore ſemper motu aſcendet magis & magis, donec revolutiones in æqualibus cum vaſe temporibus peragendo, quieſcat in eodem relativè. Indicat hic aſcenſus conatum recedendi ab axe motus, & per talem conatum innoteſcit & menſuratur motus aquæ circularis verus & abſolutus, motuique relativo hic omnino contrarius. Initio, ubi maximus erat aquæ motus relativus in vaſe, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: aqua non petebat circumferentiam aſcendendo ad latera vaſis, ſed plana manebat, & propterea illius verus motus circularis nondum inceperat. Poſtea vero, ubi aquæ motus relativus decrevit, aſcenſus ejus ad latera vaſis indicabat conatum recedendi ab axe; atque hic conatus monſtrabat motum illius circularem verum perpetuo creſcentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quieſcebat in vaſe relativè. Quare conatus iſte non pendet à tranſlatione aquæ reſpectu corporum ambientium, & propterea motus cir-

 cularis

(P) 21. Cum aqua vi inertiæ (8) in eodem quieſcendi ſtatu perſeverare nitatur, in eam nonniſi gradatim & per repetitam laterum ſitulæ frictionem motus circularis tranſire poteſt; adeóque ſub initio motûs ſitulæ, tota aquæ maſſa quieſcit abſolutè, ſive quod idem eſt, maximâ velocitate nudè relativâ in vaſe revolvitur; undè deſtituta omni vi activâ (20) ſicut antè motum ſitulæ, plana & quieta manet. Sed cum iterato laterum vaſis impulſu, motus circularis ad aquam tranſierit, ſingulæ partes aquæ (18) ab axe motûs, ſeu à medio vaſis conantur recedere, cumque minorem ſursùm in aëre reſiſtentiam inveniant, ad latera ſitulæ accumulantur & aſcendunt, & quò celeriùs aguntur in orbem, eo majori conatu ab axe motûs per tangentes recedere nituntur. (10. 11.) Porrò cum inter vim centrifugam & celeritatem corporis in dato circulo revolventis certa debeat eſſe ac determinata proportio, ex vi centrifugâ ſeu conatu recedendi ab axe cognoſci ac menſurari poteſt velocitas motûs circularis abſoluta, ut deinceps demonſtrabitur.

DEFINITIONES. cularis verus per tales tranſlationes definiri nequit. Unicus eſt corporis cujuſque revolventis motus verè circularis, conatui unico tanquam proprio & adæquato effectui reſpondens: motus autem relativi pro variis relationibus ad externa innumeri ſunt; & relationum inſtar, effectibus veris omnino deſtituuntur, niſi quatenus verum illum & unicum motum participant. Unde & in Syſtemate eorum qui Cœlos noſtros infra Cœlos Fixarum in orbem revolvi volunt, & Planetas ſecum deferre; ſingulæ Cœlorum partes, & Planetæ qui relativè quidem in Cœlis ſuis proximis quieſcunt, moventur verè. Mutant enim poſitiones ſuas ad invicem (ſecus quam fit in verè quieſcentibus) unáque cum cœlis delati participant eorum motus, & ut partes revolventium totorum, ab eorum axibus recedere conantur.

Quantitates relativæ non ſunt igitur eæ ipſæ quantitates, quarum nomina præ ſe ferunt, ſed ſunt earum menſuræ illæ ſenſibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco quantitatum menſuratarum utitur. At ſi ex uſu definiendæ ſunt verborum ſignificationes; per nomina illa Temporis, Spatii, Loci & Motus propriè intelligendæ erunt hæ menſuræ ſenſibiles; & ſermo erit inſolens & purè Mathematicus, ſi quantitates menſuratæ hic intelligantur. Proinde vim inferunt Sacris Literis, qui voces haſce de quantitatibus menſuratis ibi interpretantur. Neque minus contaminant Matheſin & Philoſophiam, qui quantitates veras cum ipſarum relationibus & vulgaribus menſuris confundunt.

Motus quidem veros corporum ſingulorum cognoſcere, & ab apparentibus actu diſcriminare, difficillimum eſt: propterea quod partes ſpatii illius immobilis, in quo corpora verè moventur, non incurrunt in ſenſus. Cauſa tamen non eſt prorſus deſperata. Nam argumenta deſumi poſſunt, partim ex motibus apparentibus qui ſunt motuum verorum differentiæ, partim ex viribus quæ ſunt motuum verorum cauſæ & effectus. Ut ſi globi duo, ad datam ab invicem diſtantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum; innoteſceret ex tenſione fili conatus globorum recedendi ab axe motus, & inde quantitas motus circularis computari poſ-

ſet.

ſet. (q) Deinde ſi vires quælibet æquales in alternas globorum facies ad motum circularem augendum vel minuendum ſimul imprimerentur, innoteſceret ex auctâ vel diminutâ fili tenſione augmentum vel decrementum motus, & inde tandem inveniri poſſent facies globorum in quas vires imprimi deberent, ut motus maxime augeretur; id eſt, facies poſticæ, ſive quæ in motu circulari ſequuntur. Cognitis autem faciebus quæ ſequuntur, & faciebus oppoſitis quæ præcedunt, cognoſceretur determinatio motus. In hunc modum inveniri poſſet & quantitas & determinatio motus hujus circularis in vacuo quovis immenſo, ubi nihil extaret externum & ſenſibile quocum globi conferri poſſent. Si jam conſtituerentur in ſpatio illo corpora aliqua longinqua datam inter ſe poſitionem ſervantia, qualia ſunt Stellæ Fixæ in regionibus Cœlorum (r) ſciri quidem non poſſet ex relativa globorum tranſlatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus eſſet motus. At ſi attenderetur ad filum, & deprehenderetur tenſionem ejus illam ipſam eſſe quam motus globorum requireret; concludere liceret motum eſſe globorum, & corpora quieſcere; & tum demum ex tranſlatione globorum inter corpora, determinationem hujus motus colligere. Motus autem veros ex eorum cauſis, effectibus, & apparentibus differentiis colligere; & contra ex motibus ſeu veris ſeu apparentibus eorum cauſas & effectus, docebitur fuſius in ſequentibus. Hunc enim in finem Tractatum ſequentem compoſui.

 AXIO-

(q) 22. Si in alternas, ſeu è diametro ſibi oppoſitas globorum facies, ad motum circularem augendum vel minuendum, imprimerentur vires quælibet æquales, quæ proindè non perturbarent æquilibrium globorum circà commune gravitatis centrum, id eſt, circa punctum æquilibrii revolventium, innoteſceret ex auctâ vel diminutâ fili tenſione augmentum vel decrementum motûs &c.

(r) 23. Spectator in globo moto, vel etiam in ſtellâ fixâ poſitus, ſolo oculorum auxilio, ſeu ex motibus apparentibus diſcernere non poſſet, an globus, an ſtella verè moveretur; quemadmodùm telluris incolæ ex apparenti ſtellarum motu determinare non poſſunt, an ſtellæ verè moveantur; ſive enim cum terrâ moveamur, & ſtellæ quieſcant abſolutè, ſive è contrà moveantur ſtellæ & terra quieſcat, eædem omnino ſunt apparentiæ, iidem motus relativi; quod quidem notiſſimo illuſtratur exemplo navis æquabiliter motæ, cujus motus ab iis qui navi vehuntur oculis non percipitur, dum littora urbeſque fugere videntur. Ex optices principiis horum phænomenôn petenda eſt ratio; ea enim corpora quieſcere videntur quæ, dum nos ipſi nullam actualem voluntatem noſmet movendi exercemus, eandem reſpectu oculi poſitionem conſtanter ſervant, ita ut eorum imago quæ in fundo oculi pingitur, eandem ſemper retinæ partem occupet; ea verò objecta moveri videntur quæ reſpectu oculi ſitum ſuum continuò mutant, ſeu quorum imagines diverſas retinæ partes ſucceſſivè occupant.

Axioma-ta, ſive

AXIOMATA,

SIVE

LEGES MOTUS.

LEX I.

(r) *Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quâtenus à viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare.*

PRojectilia perſeverant in motibus ſuis, niſi quâtenus à reſiſtentiâ aeris retardantur, & vi gravitatis impelluntur deorſum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuò retrahunt ſeſe à motibus rectilineis, non ceſſat rotari, niſi quâtenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus ſuos & progreſſivos & circulares in ſpatiis minus reſiſtentibus factos conſervant diutius.

LEX

(r) 24. Ex hâc primâ lege quam (9) demonſtravimus, ſequitur omnem motum eſſe naturâ ſuâ æquabilem & rectilineum, adeóque nec illius velocitatem retardari, nec directionem mutari, niſi aliquod obſtaculum mobili offeratur; Undè cum projectilia motum ſuum ſenſim amittant, quærenda eſt aliqua hujuſce retardationis cauſa. Cum autem corpora projecta vel per medium reſiſtens deferantur, vel etiam ſuper aliorum corporum ſuperficies ſcabras incedant, & vi gravitatis deorsùm ſemper urgeantur, neceſſe eſt ut eam amittant motûs ſui partem quam in hiſce obſtaculis ſuperandis continuò abſumunt, ac proindè quo major vel minor erit medii reſiſtentia, eò majus vel minus decrementum accipiet corporis projecti velocitas. Ex his igitur patet majora planetarum & cometarum corpora nullam ſenſibilem in ſpatiis cœleſtibus experiri reſiſtentiam, cùm motus ſuos diutiſſimè conſervent.

LEX II.

LEGES MOTUS

(*) *Mutationem motus proportionalem eſſe vi motrici impreſſæ, & fieri ſecundùm lineam rectam quâ vis illa imprimitur.*

Si vis aliqua motum quemvis generet; dupla duplum, tripla triplum generabit, ſive ſimul & ſemel, ſive gradatim & ſucceſſivè impreſſa fuerit. Et hic motus (quoniam in eandem ſemper plagam cum vi generatrice determinatur) ſi corpus antea movebatur, motui ejus vel conſpiranti additur, vel contrario ſubducitur, vel obliquo obliquè adjicitur, & cum eo ſecundùm utriuſque determinationem componitur.

(*) 25. Si corpus vi activâ qualis eſt vis gravitatis ſecundùm eandem aut parallelam directionem continuò urgeatur, motus illius continuò acceleratur; nam per leg. 1., manet celeritas acquiſita, & per leg. 2. nova conſpiranti continuò additur. Si verò aliqua vis in corpus jam motum contrariâ directione perpetuò agat, motus illius continuò retardatur, per leg. 2. Si vis conſpirans continuò ac uniformiter agat, id eſt, ſi conſtans ſit, corpus eâ vi impulſum, æqualibus temporibus æqualia accipit celeritatis incrementa, ſeu motu uniformiter accelerato fertur, & celeritates vi illâ acquiſitæ ſunt ut tempora quibus generantur. At ſi vis conſtans contrariâ directione in corpus motum continuò agat, æqualibus temporibus æqualia fient celeritatis decrementa, & corpus motu uniformiter retardato movebitur. Generaliter tandem, ſi corpus quieſcens quâlibet vi ſive conſtanti ſive variabili continuò urgeatur, & deindè eâ celeritate quam vis illius actione continuâ acquiſivit, contrà directionem vis illius reagentis projiciatur, ut veſtigia ſua relegat, corpus illud in itu & reditu ſuo eandem habebit celeritatem, ubi ad eadem viæ ſuæ puncta, eundo & redeundo pervenerit; adeóque motum redeundo non amittet, niſi cùm pervenerit ad punctum ex quo cœpit eundo moveri; nam eadem vis in itu & reditu corporis, æqualibus temporibus æquales celeritatis gradus generat & extinguit (8).

26. Corpora gravia in terræ viciniis, ſublatâ medii reſiſtentiâ motu uniformiter accelerato deſcendunt, & motu uniformiter retardato aſcendunt . . . . . . Dem . . . . Sublatâ medii reſiſtentiâ idem eſt ejuſdem corporis pondus, ſive eadem illius in ſubjectum planum preſſio, tùm in vertice, tum in radice montis; eſt autem pondus, ſeu vis motrix (15) ut maſſa in vim gravitatis acceleratricem ducta; ergò cum ejuſdem corporis maſſa eadem in vertice & in radice montis permaneat, manebit etiam eadem vis acceleratrix gravitatis. Inſuper corpora gravia in radice & vertice montis æqualia ſpatia æqualibus temporibus percurrunt, ſublatâ aëris reſiſtentia, ut accuratiſſimis notum eſt experimentis (13) conſtans eſt igitur vis acceleratrix, & per lineas ad horizontem perpendiculares (3) uniformiter agit; gravia ergò motu uniformiter accelerato deſcendunt, & uniformiter retardato aſcendunt (25) Q. e. D.

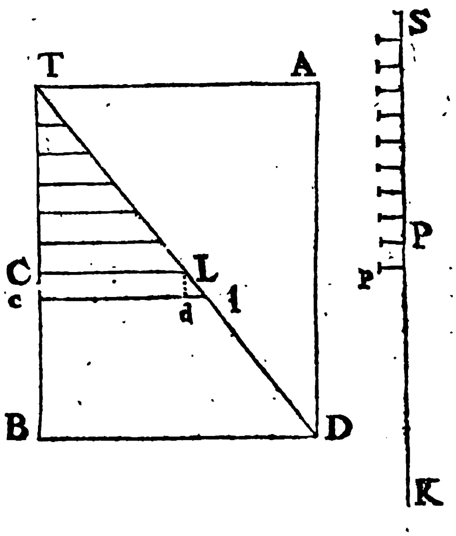
27. Subla-

AXIOMATA, SIVE

27. Sublatâ medii reſiſtentiâ in terræ viciniis, ſpatia quæ corpus è quiete cadendo percurrit ſunt ut quadrata temporum quibus percurruntur .... Dem .... recta S K, repræſentet ſpatium quod grave cadendo percurrit; T C, T c, T B, exponant tempora quibus deſcribuntur ſpatia S P, S p, S K; & C L, c l, B D, ad T B, normales, exhibeant celeritates temporibus T C, T c, T B, per ſpatia S P, S p, S K, acquiſitas; quia in motû uniformiter accelerato, celeritates ſunt ut tempora, (25), erit T C: T c = C L: c l; & T C: T B = C L: B D, adeóque recta, T D, tranſit per puncta L, & l, & triangula T C L, T c l, T B D, ſimilia ſunt. Jam fingamus lineam, c l, motu ſibi ſemper parallelo ità accedere ad lineam C L, ut tandem cùm ipſâ coincidat; evaneſcente tempuſculo C c, celeritas, c l, non differet à celeritate C L; adeóque per tempuſculum infinitè parvum ſeu evaneſcens C c, celeritas C L, uniformis cenſeri poteſt. Porrò ſpatia motu æquabili deſcripta ſunt ut celeritas in tempus ducta (5), ergò ſpatium P p, quod tempuſculo, C c, percurri ſupponimus eſt ut rectangulum, C L, x C c = C d; quare ſi totum tempus, T C, in tempuſcula innumera ut C c, diviſum concipiatur, & ſimiliter ſpatium, S P, tempore T C, percurſum in totidem ſpatiola evaneſcentia, ſingulis tempuſculis correſpondentibus percurſa dividatur, erit ſumma rectangulorum C d, hoc eſt area trianguli T C L, ut ſumma ſpatiolorum P p, id eſt ut S P; & eodem modo demonſtratur aream trianguli T B D, eſſe ut ſpatium S K, tempore T C, percurſum. Eſt igitur triangulum T C L: T B D = S P: S K. Sed triangulorum ſimilium areæ T C L, T B D, ſunt ut quadrata laterum homologorum, ergò S P, ad S K, ut quadratum temporis T C, ad quadratum temporis T B. Q. e. D.

28. Coroll. 1 .... Cum velocitates acquiſitæ ſint ut tempora (25) erunt etiam ſpatia percurſa ut quadrata velocitatum, & tam velocitates quam tempora erunt inter ſe in ratione ſubduplicatâ ſpatiorum.

29. Coroll. 2 .... Si grave è quiete cadens, dato tempore percurrat ſpatium, 1, duplo tempore percurret ſpatium, 4,



triplo ſpatium, 9, &c. hoc eſt, ſi tempora ab initio motûs computata ſumantur in progreſſione numerorum naturalium, 1, 2, 3, 4, 5. ſpatia his temporibus deſcripta erunt ut termini progreſſionis numerorum quadratorum. 1, 4, 9, 16, 25 &c. ſpatia verò ſingulis temporibus ſeorſim ſumptis percurſa erunt ut termini progreſſionis numerorum imparium. 1, 3, 5, 7, 9 &c. nam cum ſpatium 1°. tempore percurſum ſit, 1, duplo tempore ſit, 4; ſpatium ſecundo tempore ſeorſim ſumpto deſcriptum erit 4--1 ſeu 3, & ità de cæteris. Undè ſpatia motu uniformiter retardato deſcripta temporibus æqualibus ſecundùm numeros impares retrogrado ordine decreſcunt. (25)

30. Coroll. 3 .... ſpatium S K, quod grave è quiete cadendo, tempore T B, percurrit, eſt ſubduplum ſpatii quod eodem tempore uniformiter percurri poteſt, cum velocitate B D, tempore T B, per ſpatium S K, acquiſitâ. Nam compleatur rectangulum T B D A, & ſpatium quod uniformi celeritate B D, tempore T B, deſcribitur, erit ut rectangulum T B D A (25). Cum ergò (27) ſpatium S K, ſit ut triangulum T B D, ſubduplum rectanguli T B D A, erit ſpatium S K, dimidium ſpatii quod uniformi celeritate B D, tempore T B, percurritur.

31. Co-

(a) LEX III.

Actioni contrariam ſemper & æqualem eſſe reactionem: ſive corporum duorum actiones in ſe mutuo ſemper eſſe æquales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus à lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam & equus (ut ita dicam) æqualiter in lapidem: nam funis utrinque diſtentus eodem relaxandi ſe conatu urgebit equum verſus lapidem, ac lapidem verſus equum; tantumque impediet progreſſum unius quantum promovet progreſſum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi ſua quomodocunque mutaverit, idem quoque viciſſim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem preſſionis mutuæ) ſubibit. His actionibus æquales fiunt mutationes, non velocitatum, ſed motuum; ſcilicet in corporibus non aliunde impeditis. Mutatio-

31. Coroll. 4. . . . celeritas B D, motu uniformiter accelerato acquiſita eſt ſemper (5) ut duplum ſpatium percurſum 2 S K, applicatum ad tempus T B, quo percurritur, ſeu ut 2 S K: T B. Quare ſi vis acceleratrix conſtans dicatur G; ſpatium percurſum S; tempus quo percurritur T; erit G T = 2 S: T (13) adeóque G T² = 2 S, ſeu vis acceleratrix conſtans in quadratum temporis ducta, eſt ut duplum ſpatium eodem tempore vis illius actione deſcriptum.

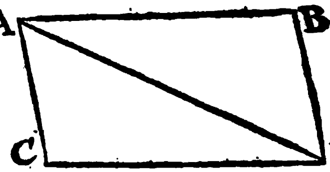
(a) 32. Hæc notiſſima naturæ Lex innumeris confirmata experimentis, ex ipſâ materiæ inertiâ clarè ſequitur. Ut autem omnis tollatur ambiguitas, nihil aliud per hanc legem intellectum volumus, niſi æquales fieri in corpore agente & patiente ſtatûs mutationes; cum enim nulla poſſit eſſe actio corporis in aliud corpus, quin mutua fiat horumce corporum collisio (8), mutatio ſtatûs æqualiter in utroque corpore recipi debet; undè licet actioni æqualis ſemper ſit & contraria reactio, non idcircò tamen inter corpus agens & patiens fieri debet æquilibrium, idque Newtoniano exemplo manifeſtum eſt; ſi equi lapidem trahentis conatus ſeu vis activa major ſit vi quâ lapis per gravitatem ſuam, plani ſcabritiem, mediique reſiſtentiam, equo trahenti reluctatur, equus lapidem trahet cum eâ totius ſuæ vis parte, quæ poſt ſuperatam lapidis gravitatem, plani ſcabritiem, mediique reſiſtentiam, ipſi reſidua eſt; ſi autem totus trahentis equi conatus hiſce tribus reſiſtentiis minor ſit, vel ſi ipſis ſit æqualis, equus lapidem non movebit. Quare totus ac integer lapidis renixus qui componitur ex ipſius gravitate, plani ſcabritie, reſiſtentiâ medii & inertiâ quæ lapidi etiam omnibus aliis viribus deſtituto ineſt, actioni equi lapidem trahentis eſt ſemper æqualis.

AXIOMATA, SIVE

tiones enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, ſunt corporibus reciprocè proportionales. Obtinet etiam hæc Lex in Attractionibus, ut in Scholio proximo probabitur.

COROLLARIUM I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore deſcribere, quo latera ſeparatis.



Si corpus dato tempore, vi ſolâ M in loco *A* impreſsâ, ferretur uniformi cum motu ab *A* ad *B*; & vi ſolâ N in eodem loco impreſsâ, ferretur ab *A* ad *C*: compleatur parallelogrammum *A B D C*, & vi utrâque feretur corpus illud eodem tempore in diagonali ab *A* ad *D*. Nam (b) quoniam vis N agit ſecundum lineam *A C* ipſi *B D* parallelam, hæc vis per Legem II. nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam *B D* à vi alterâ genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *B D*, ſive vis N imprimatur, ſive non; (c) atque ideo in fine illius temporis reperietur alicubi in lineâ illâ *B D*. Eodem argu-

(b) 33. Quoniam vis *N*, agit ſecundùm lineam A C, ipſi B D, parallelam, hæc vis, (per leg. 2) nihil niſi velocitatem ſecundùm lineam ipſi B D, parallelam producet, ac proindè non mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam B D, à vi alterâ genitam; cum corpus iners duabus hiſce viribus ac directionibus ſimul obſequi poſſit, & (per leg. 1.), debeat, atque hìc ſupponatur vires *M*, & *N*, in mobile eodem modo ſimul agere ac ſi ſingulæ ſeorſim in illud quieſcens imprimerentur.

(c) 34. Idcircò cum in fine ejuſdem temporis, corpus quod hìc tanquam punctum conſideratur ſimul eſſe debeat in utrâque lineâ C D, & B D, in utriúſque lineæ concurſu D, reperiatur neceſſe eſt; quia autem initio & fine temporis dati corpus reperitur in rectâ A D, nempè primùm in A, & deindè in D, toto tempore dato motum fuit per lineam A D, nam ex duobus punctis A, & D, datis, recta, A D, poſitione data eſt; & corpus quibuſlibet viribus impulſum, ceſſante virium actione, movetur uniformiter in directum ſecundùm ultimam directionem ex viribus impreſſis reſultantem, (per Leg. 1, & 9).

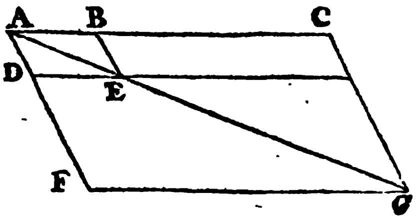
35. Motus compoſitus per diagonalem A D, motibus per latera A B, A C, disjunctis non eſt æqualis, ſed tantùm æquipollet. Nam cum eadem ſit corporis maſſa, motûs quantitates per diagonalem & per latera ſunt ut velocitates uniformes (6) ſeu ut ſpatia A D, A B, A C, eodem tempore percurſa (5); eſt autem ſum-

ſumma laterum A B + A C, major diagonali A D; ergo ſumma quantitatum motûs per latera, major eſt quantitate motûs per diagonalem. Verùm quia idem eſt motus, ſive mobile per diagonalem A D, celeritate æquabili ut A D, ex vi unicâ impreſsâ feratur, ſive viribus conjunctis per latera A B, A C, impellatur, liquet motum per diagonalem, motibus per latera disjunctis æquivalere.

36. Si mobile à pluribus quàm duabus viribus in loco A, ſimul impreſſis impellatur, inveniri ſemper poterit unica directio & velocitas ex omnibus ſeparatis compoſita ipſiſque æquipollens, quæ media directio dicitur; duarum enim virium media directio reperiatur (per coroll. 1. Newt.); deinde diagonalis illa tanquam ſpatium vi unicâ percurſum conſideretur, & cum ſpatio tertiâ vi deſcripto pari ratione componatur, ſicque vires omnes ad unicam reducentur.

37. Motus omnis in quotcumque alios laterales ipſi æquipollentes reſolvi poteſt; nam motus per A D, æquabilis, facto triangulo quocumque A B D, reſolvitur in motus per latera A B, A C, motui per diagonalem A D, æquipollentes (35). Eâdem ratione motus per A B, in duos quoſcumque alios, deſcripto circâ latus A B, triangulo reſolvitur, idemque de motu per A C, & de aliis quibuſcumque motibus dici debet.

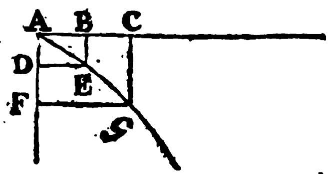
38. Si corpus aliquod A, duplici vi per A C, & per A F, ità urgeatur, ut motus in eâdem ratione acceleretur vel retardetur, ſive quod idem eſt, ſi ſpatia A B, & A D, A C, & A F, iiſdem temporibus percurſa, ſemper ſint in conſtanti ratione, motu compoſito parallelogrammi diagonalem A G, deſcribet....



Dem... ductis D E ad A B, & B E ad A D, parallelis, corpus conjunctis viribus motum, reperiri debet ſimul in utrâque lineâ D E, & E B, (34) adeóque in earum interſectione E; ſimiliter ductis F G, ad A C, & C G, ad A F, parallelis, patet corpus motu compoſito eodem tempore reperiri in G, quo motibus disjunctis attingeret puncta C, & F; cum igitur (ex hyp.) ſit A D, ad A B, ſeu D E, ut A F, ad A C, ſeu F G, recta A E, producta tranſit per punctum G; ergò corpus per diagonalem rectam A G, incedet. Q. e. D.

39. Si ſpatia ſecundùm unam directionem percurſa non ſint ſemper in eâdem ratione cum ſpatiis juxtà alteram directionem iiſdem temporibus deſcriptis, mobile per eandem diagonalem rectam progredi non poteſt; ſi autem ratio ſpatiorum viribus ſeparatis iiſdem temporibus deſcriptorum continuò mutetur, mobile per curvam incedet, ut ſi motus uniformis cum motu continuè accelerato vel retardato componatur.

40. Corpus grave ſecundùm quamlibet directionem A C, quæ non ſit ad horizontem normalis projectum, in terræ viciniis, ſublatâ medii reſiſtentiâ, parabolam A E G, deſcribit, cujus diameter A F, eſt ad horizontem perpendicularis, & tangens A C, directio projectionis....

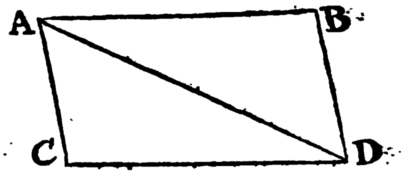


Dem... Solâ vi projectionis impreſsâ, grave uniformiter movetur per rectam A C, (per leg. 1.), ſolâ vi gravitatis motu uniformiter accelerato per rectam A F, aut ipſi parallelam deſcendit (26); quoniam verò motus per A C, æquabilis eſt, ſpatia A B, A C, ſunt ut tempora quibus percurruntur (5). Spatia A D, A F, motu uniformiter accelerato iiſdem temporibus deſcripta ſunt ut quadrata temporum quibus deſcribuntur (27), ſeu ut quadrata rectarum A B, A C, aut ipſis parallelarum & æqualium D E, F G, cum igitur grave motu compoſito latum in fine temporum A B, A C, reperiatur in punctis E, & G, (34) evidens eſt quadrata ordinatarum D E, F G, curvæ A E G, (39) eſſe inter ſe in ratione abſciſſarum A D, A F, adeóque curvam A E G, eſſe parabolam, (per 20^{am}. lib. 1. conic. Apollon.) cujus diameter A F, & tangens A C ordinatis D E, F G (32. prop. lib. 1. conic. Apollon.) Q. e. D.

D 41.

AXIOMATA SIVE

argumento in fine temporis ejuſdem reperietur alicubi in lineâ *C D*, & idcirco in utriuſque lineæ concurſu *D* reperiri neceſſe eſt. Perget autem motu rectilineo ab *A* ad *D* per Legem I.

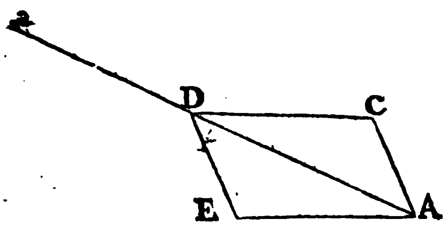


COROLLARIUM II.

Et hinc patet (d) *compoſitio vis directæ* A D *ex viribus quibuſvis obliquis* A C *&* C D, *& viciſſim reſolutio vis cujuſvis directæ* A D *in obliquas quaſcunque* A C *&* C D. *Quæ quidem compoſitio & reſolutio abundè confirmatur ex Mechanicâ.*

Ut ſi de rotæ alicujus centro *O* exeuntes radii inæquales *O M*, *O N* filis *M A*, *N P* ſuſtineant pondera *A* & *P*, & quæ

(d) 41. Quæ de motuum compoſitione & reſolutione dicta ſunt, ad vires mortuas poſſunt transferri. Si corpus ſeu punctum D, viribus mortuis, ſeu ut loquuntur Mechanici, potentiis D E, D C, juxta directiones D E, D C, agentibus trahatur vel impellatur & completo parallelogrammo E C, ducatur diagonalis D A, vires D C, D E, vi mediæ, ut D A, juxtà directionem D A, agenti æquivalent....

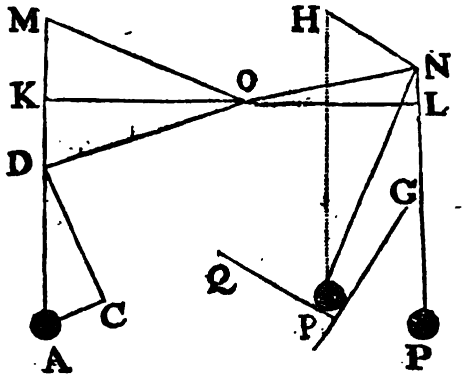


Dem ... vis ſeparata D C, conſiderari poteſt tanquam vis acceleratrix quæ in corpus D, juxtà directionem D C, continuò & uniformiter agit, & vis illa eſt ut celeritas quam dato tempore generat aut generare poteſt (13), adeòque illa celeritas per rectam D C, exponetur, cum ea recta ſit ut vis ipſa D C, (per hyp.) ſimili argumento liquet rectam E D, eſſe ut celeritatem vi agente per D E eodem tempore dato generandam. Cum igitur celeritates D E, D C, in mediam, D A, æquipollentem componantur (per coroll. 2. Newt.) manifeſtum eſt vires quoque laterales D E, D C, in mediam æquipollentem D A, (35) componi, atque adeò vim ut D A, in laterales D E, D C, æquivalentes reſolvi poſſe. Quare (35. 36) vires quotcumque laterales in unam æquivalentem componi poſſunt, & vis quælibet in alias quaſcumque ipſi ſimul æquipollentes poteſt reſolvi.

42. Producatur A D, ad a, ità ut D A, & D a, æquales ſint & vis, ut D a, juxtà directionem D A, urgeat punctum D, punctum illud D, duabus viribus D A, æqualibus & contrariis ſollicitatum, immotum permanebit; ſed vis media D A, æquivalet viribus ſeparatis D E, D C, (41), ergò ſi punctum D, ſublatâ vi, D A, tribus viribus D a, D E, D C, urgeatur, non movebitur, ſed erit inter vires æquilibrium.

43. Si punctum D, tribus viribus D a, D, E, D C, in æquilibrio conſtitutis urgeatur, com-

quærantur vires ponderum ad movendam rotam: Per centrum *O* agatur recta *K O L* filis perpendiculariter occurrens in *K* & *L*, centroque *O* & intervallorum *O K*, *O L* majore *O L* deſcribatur circulus occurrens filo *M A* in *D*: & actæ rectæ *O D* parallela ſit *A C*, & perpendicularis *D C*. (e) Quoniam nihil refert, utrum filorum puncta, *K*, *L*, *D* affixa ſint an non affixa ad planum rotæ; pondera idem valebunt, ac ſi ſuſpenderentur à punctis *K* & *L* vel *D* & *L*. Ponderis (f) autem *A* exponatur vis tota per lineam *A D*, & hæc reſolvetur in vires *A C*, *C D*, quarum *A C* trahendo radium *O D* directè à centro



completo parallelogrammo E C, recta a D, producta, per angulum A, tranſit, eſtque D A = D a, parallelogrammi diagonalis, & vires ſunt ut latera trianguli D A C, nempè ut D A, A C, ſeu E D, D C.... Dem.... Ductâ diagonali D A, parallelogrammi E C, vis media ut D A, æquipollet viribus per latera D E, D C, (41); ſi virium directiones D A, D a, non eandem efficiant lineam rectam, aliquem angulum in D, continent, ac proindè punctum D, à viribus ſibi invicem directe non oppoſitis impulſum moveri debet (contrà hyp.); ſi verò potentiæ illæ D A, D a, non ſint æquales, major minorem ſuperat, motuſque oritur (etiam contrà hyp.). Ergò recta A D, producta, per angulum A, tranſit, eſtque D A = D a, parallelogrammi diagonalis & quia A C = D E, vires ſunt ut latera trianguli D A C. Q. e. D.

44. Cùm latera trianguli ſint ut ſinus angulorum oppoſitorum, erit vis D a, ſeu D A, ad vim D C, ut ſinus anguli A C D, ſeu complementi illius E D C, ad ſinum anguli D A C, ſeu A D E, ſeu complementi illius E D a; ſimiliter demonſtratur eſſe a D, ad E D, ut ſinus anguli E D C, ad ſinum anguli a D C. Si igitur tres potentiæ in æquilibrio circà punctum quodvis D, conſiſtentes, dicantur ut libet 1a, 2a, 3a, erit 1a, ad 2am, ut ſinus anguli quem 2æ & 3æ potentiarum directiones comprehendunt, ad ſinum anguli quem 1æ & 3æ directiones formant. Omnes illas de virium & motuum compoſitione & reſolutione demonſtrationes accuratiſſimis confirmavit experimentis Clariſſ. Graveſandius in Elementis Phyſices.

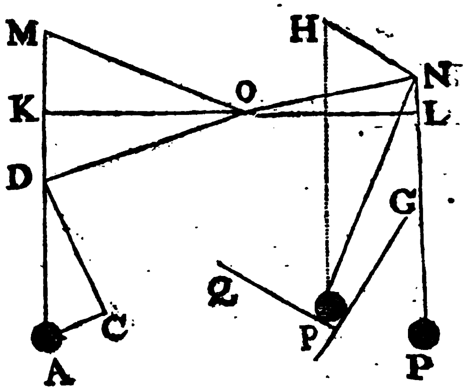
(e) 45. Planum rotæ gravitatis expers & circà centrum fixum O, (fig. Newt.), mobile ſupponitur, fila quoque gravitate deſtituta finguntur; cumque eadem ſit in variis à terrâ diſtantiis corporis gravitas (26) eademque proindè fili longioris vel brevioris quo pondus idem ſuſpenditur tenſio, evidens eſt planum rotæ iiſdem ſemper viribus trahi, ſive fila punctis M, & N, ſive aliis quibuſvis K, D, aut L, in filis M A, N P, ſumptis affixa ſint. Pondera igitur à punctis M, & N, ſuſpenſa idem valebunt ac ſi ſuſpenderentur à punctis K & L, vel D & L.

(f) 46. Ponderis A, quo punctum D, trahitur, vis tota D A, reſolvi poteſt (41) in vires laterales & æquipollentes

 AC,

AXIOMATA, SIVE

tro nihil valet ad movendam rotam; vis autem altera *DC*, trahendo radium *DO* perpendiculariter, idem valet ac ſi perpendiculariter traheret radium *OL* ipſi *OD* æqualem; hoc eſt, idem atque pondus *P*, ſi modo pondus illud ſit ad pondus *A* ut vis *DC* ad vim *DA*, id eſt (ob ſimilia triangula *ADC*, *DOK*,) ut *OK* ad *OD* ſeu *OL*. Pondera igitur *A* & *P*, quæ ſunt reciprocè ut radii in directum poſiti *OK* & *OL*, idem pollebunt, & ſic conſiſtent in æquilibrio: quæ eſt proprietas notiſſima (g) Libræ, Vectis, & Axis in Peritrochio. Sin pondus alterutrum ſit majus quàm in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major. Quod



AC, & DC, ità ut punctum D, urgeatur ſimul vi ut DC, ſecundùm directionem DC, & vi ut CA, ſecundùm directionem rectæ OD, productæ; quia verò centrum O, rotæ fixum ſupponitur, vis ut AC, trahendo punctum O, juxtà directionem radii OD, nullum motum creat, nihilque valet ad rotam circà centrum O, movendam; vis autem altera DC, trahendo radium DO perpendiculariter, idem valet ad rotam circà centrum O, volvendam, ac ſi perpendiculariter traheret alterum radium OL, ipſi OD, æqualem; vires enim æquales æqualibus radiis pariter applicatæ eodem modo rotam movere debent; ſi itaque pondus aliquod P, è puncto L, ſuſpenſum ſit vi DC, æquale, ſeu, quod idem eſt, ſi pondus P, ſit ad pondus A, ut recta DC, ad rectam DA, quæ exponit vim abſolutam ponderis A, rota his duabus viribus A, & P, in partes contrarias æqualiter tracta non movebitur. Verùm in triangulis ADC, DOK, anguli DAC, & KDO, ob parallelas AC, DO, & prætereà anguli ad K & C recti, æquales ſunt, adeòque triangula illa ſunt ſimilia & DC : DA = OK : DO, ſeu OL; pondera igitur A, & P, quæ ſunt reciproce ut radii in directum poſiti OK, & OL, ſeu quæ ſunt reciprocè ut perpendiculares OK, & OL, ex centro O, in eorum directiones ductæ idem pollebunt, & ſic conſiſtent in æquilibrio.

(g) 47. Sit KL, recta inflexilis & gravitatis expers circà punctum fixum ſeu fulcrum O, volubilis, hæc vectem & libram exhibet, atque etiam peritrochium circa axem volubile poteſt exponere, ſeu rotam cujus eſt radius longior OL, & centrum O, circà quod rota & cylindrus cujus eſt radius brevior OK, revolvi poſſunt; ex demonſtratis autem (46) patet eſſe in his tribus machinis, æquilibrium, cum potentiæ ſeu pondera A, & P, ſunt inter ſe reciprocè, ut rectæ à centro O, ad eorum directiones normaliter ductæ. Sin pondus alterutrum ſit majus quàm in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tantò major; nam, manente diſtantiâ OL, vis ponderis P, ad movendam rotam eſt ut pondus P abſolutum, & manente pondere P, creſcit vis illius ad movendam rotam in ratione diſtantiæ directionis ponderis à centro; duplicatâ enim vel triplicatâ illâ diſtantiâ, pondus idem P, eſt in æquilibrio cum duplo vel triplo pondere, cujus diſtantia directionis à centro eſt ſubdupla vel ſubtripla (46). Ergò in his tribus machinis vis potentiæ ſeu pon-

Quòd ſi pondus *p* ponderi *P* æquale partim ſuſpendatur filo *Np*, partim incumbat plano obliquo *pG*: agantur *pH*, *NH*, prior horizonti, poſterior plano *pG* perpendicularis: & ſi vis ponderis *p* deorſum tendens, exponatur per lineam *pH*, reſolvi poteſt hæc in vires *pN*, *HN*. Si filo *pN* perpendiculare eſſet planum aliquod *pQ*, ſecans planum alterum *pG* in linea ad horizontem parallela; & pondus *p* his planis *pQ*, *pG* ſolummodo incumberet; urgeret illud hæc plana viribus *pN*, *HN* perpendiculariter, nimirum planum *pQ* vi *pN*, & planum *pG* vi *HN*. Ideoque ſi tollatur planum *pQ*, ut pondus tendat filum; quoniam filum ſuſtinendo pondus jam vicem præſtat plani ſublati, tendetur illud eâdem vi *pN*, quâ planum antea urgebatur. Unde tenſio fili hujus obliqui erit ad tenſionem fili alterius perpendicularis *PN*, ut *pN* ad *pH*. (h) Ideoque ſi pondus *p* ſit ad pondus *A* in ratione quæ componitur ex ratione reciprocâ minimarum diſtantiarum filorum ſuorum *pN*, *AM* à centro rotæ, & ratione directâ *pH* ad *pN*; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atque ideò ſe mutuò ſuſtinebunt, ut quilibet experiri poteſt.

Pondus autem *p*, planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet cunei inter corporis fiſſi facies internas: & inde vires cunei & mallei innoteſcunt: utpote cum vis quâ pondus *p* urget planum *pQ* ſit ad vim, quâ idem vel gravitate ſuâ vel ictu mallei impellitur ſecundum lineam *pH* in plana, ut *pN* ad *pH*; atque ad vim, quâ urget planum alterum *pG*, ut *pN* ad *NH*. Sed & vis Cochleæ per ſimilem virium diviſio-

ponderis ad movendam machinam circà centrum motûs eſt ſemper in ratione compoſitâ ponderis abſoluti ſeu intenſitatis potentiæ, & diſtantiæ directionis illius à centro motûs. Vim autem illam ponderis aut potentiæ ad machinam movendam momentum potentiæ aut ponderis vocant Mechanici.

(h) 48. Vis quâ pondus p, tendit filum obliquum pN, dicatur π, & normalis ex centro O, in filum pN, ducta dicatur n, & erit ex demonſtratis π : P, ſeu p, = pN : pH. Præterea ſi vis π, in æquilibrio cum pondere A, conſiſtat, erit etiam (47) A : π = n : KO; undè per compoſitionem rationum erit A × π : p × π = n × pN : KO × pH, ſeu A : p = n × pN : KO × pH; & p : A = KO × pH : n × pN; ideóque ſi pondus p, ſit ad pondus A, in ratione quæ componitur ex ratione reciprocâ minimarum diſtantiarum, n, & KO, filorum ſuorum pN, AM à centro rotæ, & ratione directâ pH, ad pN, erit æquilibrium.

viſionem colligitur; quippe quæ cuneus eſt à vecte impulſus. (i) Uſus igitur Corollarii hujus latiſſimè patet, & latè patendo veritatem ejus evincit; cùm pendeat ex jam dictis Mechanica tota ab Auctoribus diverſimode demonſtrata. Ex hiſce enim facile derivantur vires Machinarum, quæ ex Rotis, Tympanis, Trochleis, Vectibus, nervis tenſis & ponderibus directè vel obliquè aſcendentibus, cæteriſque potentiis Mechanicis componi ſolent, ut & vires Tendinum ad animalium oſſa movenda.

COROLLARIUM III.

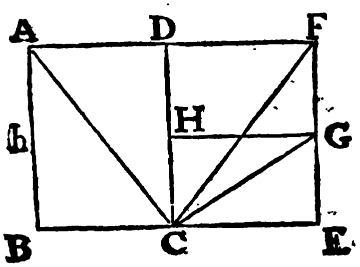
Quantitas motus quæ colligitur capiendo ſummam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter ſe.

Etenim actio eique contraria reactio æquales ſunt per Legem III, adeoque per Legem II æquales in motibus efficiunt mutationes verſus contrarias partes. Ergo ſi motus fiunt ad eandem partem; quicquid additur motui corporis fugientis, ſubducetur motui corporis inſequentis ſic, ut ſumma maneat eadem quæ priùs. Sin corpora obviam eant; æqualis erit ſubductio de motu utriuſque, ideoque differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem. (k) Ut

(i) 49. Cunei & cochleæ vires totamque ferè mechanicam hiſce theorematibus demonſtravit Clariſſ. Varignonius. Quam latè pateat eorum uſus manifeſtum eſt ex præclaro opere Joannis Alphonſi Borelli de motibus animalium, & ex variis, inter quas Bernoullianæ eminent, de muſculorum motu diſſertationibus; ſed hæc fuſiùs proſequi præſentis non eſt inſtituti; in proximo ſcholio machinarum vires generali mechanicæ principio determinare ſatis erit; ut autem ea quæ nobis illuſtranda occurrent in meliori lumine collocentur; generales motuum leges, ne omiſſis quidem definitionibus, præmittendas eſſe judicavimus.

(k) 50. Corpus perfectè elaſticum dicitur cujus partes ex ictu flectuntur, ſeu introcedunt, & deindè eâdem vi quâ flexæ ſunt, ſeſe in priorem ſtatum contrariâ directione reſtituunt. Corpus imperfectè elaſticum eſt cujus partes ex ictu flexæ in priorem quidem ſtatum redire nituntur, ſed minori vi eâ quâ flexæ ſunt. Corpus non elaſticum vocatur cujus partes ictu percuſſæ nullâ vi ſeſe reſtituere conantur. Corpus unum in alterum directè impingere dicitur, ſi ſecundùm rectam ad contactum perpendicularem impingat; obliquè verò ſi ſecundùm rectam ad contactum obliquam. Cùm corpora in ſe mutuò non agant, niſi per maſſam & velocitatem, tanquam axioma ex legibus 2ª & 3ª notiſſimum innumeriſque confirmatum experimentis ſupponimus quantitates motûs æquales & contrarias in conflictu ſibi mutuò æquipollere.

51. Si



51. Si globus A, in planum immobile BE, incurrat, quæritur illius motus poſt impactum.... 1°. Globus ille in planum directè impingat per AB; ſi globus & planum omni elaſticitate deſtituantur, globi motus poſt impactum in B, omninò extinguitur, cùm nulla vis globum repellat; ſi autem planum & globus perfecto elatere donentur, globus per BA, poſt impactum reſiliet eâdem quâ advenit celeritate BA; nam in corporibus perfectè elaſticis (50) vis reſtitutiva æqualis eſt vi compreſſivæ, unde ſi imperfecta fuerit vis elaſtica, globus minori velocitate Bh, reſiliet.... 2°. Globus A, in planum BE, velocitate & directione AC, obliquè impingat, illius motus reſolvatur in motus laterales quorum unus AD, ſit plano BE, parallelus, alter autem AB, eidem plano perpendicularis (37), globus A, motu ſecundùm AD, ad planum non accedit, ſed tantùm motu ſecundùm perpendicularem AB, vel DC; velocitas globi reſpectu plani BE, eſt tantùm ut perpendicularis AB; at verò ſi AC, foret perpendicularis ad planum BE, velocitas quâ ad planum accederet, foret ut AC; ergò cùm impetus ejuſdem corporis in planum, ſint ut velocitates quibus ad planum accedit, ictus obliquus eſt ad perpendicularem, ut AB, ad AC; ſeu ſumptâ AC, tanquam radio, ut ſinus anguli incidentiæ ACB, ad ſinum totum..... 3°. Si nulla ſit in corporibus A, & BE, elaſticitas, globus A, per AC; incurrens movebitur per CE, celeritate ut CE = AD; nam motus perpendicularis AB, vel DC, ex demonſtratis, extinguitur, remanetque tantùm motus CE, cui planum ut potè parallelum non opponitur; ſi verò perfectum fuerit elaterium, reſiliet globus per CF, celeritate CF = AC, & angulus reflexionis FCE, æqualis erit angulo incidentiæ ACB; nam per vim reſtitutivam elateris reſilit per normalem CD, celeritate CD, ſeu BA, & prætereà motu ad planum parallelo progreditur per CE, celeritate ut CE = AD; ergò motu compoſito (coroll. 1. Newt.) percurret diagonalem CF; & cùm in parallelogrammis DB, DE, omnia ſint paria, erit FC = AC, & angulus FCE = ACB. Tandem ſi corpora imperfectè fuerint elaſtica, manebit quidem poſt impactum velocitas AD, ſeu CE, plano parallela; ſed velocitas perpendicularis CH, minor erit velocitate DC, ſeu AB, & completo parallelogrammo HE, globus per diagonalem CG, reſiliet.

52. Si globi non elaſtici in ſe mutuò directè impingant, quæritur illorum motus poſt conflictum.... 1°. Globi in eandem plagam ferantur, ſubſequens fugientem impellet, donec ambo ſimul tanquam unum corpus eâdem directione ac velocitate incedant, eritque (coroll. 3. Newt.), ſumma quantitatum motûs eadem antè & poſt conflictum; communis ergò poſt conflictum velocitas invenitur, ſummâ quantitatum motûs antè conflictum per ſummam maſſarum diviſâ (6).... 2°. Globi contrariis directionibus ſibi mutuò occurrant, ſi æqualis in utroque fuerit motûs quantitas, poſt conflictum ambo quieſcunt (50). Si verò inæquales ſint motûs quantitates, per conflictum extinguitur in ſingulis quantitas motûs globi debiliùs moti (50), & ambo ſimul poſt impactum communi velocitate ac directione quaſi unicum corpus progrediuntur, eſtque quantitas motûs in utroque ſimul reſidua, differentiæ quantitatum motûs antè conflictum æqualis (coroll. 3. Newt.). Hinc communis poſt conflictum velocitas habetur, ſi differentia illa quantitatum motûs antè conflictum ad ſummam maſſarum applicetur (6). In hoc utroque caſu communis poſt conflictum velocitas in globi cujuſque maſſam ducta, eſt illius quantitas motûs poſt impactum (6), ex quâ & quantitate motûs ejuſdem globi antè conflictum, per ſubtractionem invenitur quantitas motûs in conflictu acquiſita vel amiſſa; quia verò in omni globorum non elaſticorum conflictu directo, vel motus omnis ceſſat, vel globi poſt impactum communi celeritate feruntur, manifeſtum eſt.

(1) Ut ſi corpus ſphæricum *A* ſit triplo majus corpore ſphærico *B*, habeatque duas velocitatis partes; & *B* ſequatur in eâdem rectâ cum velocitatis partibus decem, ideoque motus ipſius *A* ſit ad motum ipſius *B*, ut ſex ad decem: ponantur motus

eſt reſpectivam globorum velocitatem per conflictum extingui.

53. Globi elaſtici in ſe invicem directè incurrant, quæritur eorum motus poſt conflictum . . . . . 1°. Mutatio quæ ex mutuo corporum perfectè elaſticorum conflictu in utriúſque corporis motu naſcitur, dupla eſt mutationis quam ictus idem in iiſdem corporibus omni elaterio deſtitutis produceret,) in corporibus imperfectè tantùm elaſticis mutatio major eſt quàm in non elaſticis, ſed duplâ minor.) Nam partes in utroque corpore æquali vi ex ictu comprimuntur (Leg. 3.). Si corpora omni elatere deſtituerentur, poſt conflictum vel quieſcerent, vel in eandem plagam velocitate communi progrederentur (52) nec partes flexæ reſtituerentur; ſi autem accedat vis elaſtica partes flexæ ſeſe reſtituent vi & directione (50) quæ ſemper contraria erit vi compreſſivæ, & in corporibus perfectè elaſticis huic æqualis, in aliis minor; actio igitur corporum in ſe mutuò ex elateris reſtitutione orta, actioni ex impactu naſcenti æqualis eſt in corporibus perfectè elaſticis, minor in aliis, ex quibus & Lege 2ª conſtat quod erat primò propoſitum. . . . 2°. Corpora perfectè elaſtica eâdem velocitate reſpectivâ poſt conflictum recedunt, quâ antè conflictum ad ſe invicem accedebant; in corporibus verò imperfectè tantùm elaſticis, velocitas reſpectiva quâ poſt ictum diſcedunt eſt ad velocitatem quâ antè ictum ad ſe mutuò accedebant, in ratione vis reſtitutivæ ad vim compreſſivam; nam cum in conflictu corporum non elaſticorum omnis velocitas reſpectiva, quâ ad ſe mutuò accedebant, deſtruatur ex ictu (52), ſitque vis reſtituva elateris perfecti vi compreſſivæ æqualis & contraria, manifeſtum eſt in corporum perfectè elaſticorum conflictu, velocitatem reſpectivam ex ſolo impactu amiſſam, contrariâ directione reſtitui; in corporibus verò imperfectè elaſticis eam tantùm reſtitui velocitatis reſpectivæ partem quæ eſt vi reſtitutivæ proportionalis . . . . 3°. Ut igitur corporum perfectè elaſticorum motus poſt conflictum directum inveniatur, conſiderentur corpora tanquam omni elatere deſtituta & in eâ hypotheſi, quæratur (52) quantitas motûs ex conflictu in unoquoque corpore acquiſita vel amiſſa ſecundùm eam directionem quâ corpus antè conflictum movebatur; eadem motûs quantitas duplicata, erit quantitas motûs in corpore perfectè elaſtico acquiſita vel amiſſa, quæ proindè quantitati motûs corporis antè conflictum addita vel dempta, dat quantitatem motûs illius corporis poſt conflictum . . . . . 4°. Corporum imperfectè elaſticorum motus poſt conflictum invenitur, ſi data ſit ratio vis reſtitutivæ elateris ad vim compreſſivam, ſive, quod ex demonſtratis idem eſt, ratio velocitatis reſpectivæ poſt impactum ad velocitatem reſpectivam antè impactum, quam rationem in iiſdem corporibus conſtantem eſſe experimentis probavit Newtonus, niſi tamen partes corporum ex congreſſu lædantur, vel extenſionem aliquatem quaſi ſub malleo patiantur. Corpora omni elaterio deſtituta ſupponantur, & in eâ hypotheſi quæratur quantitas motûs in unoquoque corpore ex ictu acquiſita vel amiſſa, cui motûs quantitati ſi addatur quantitas motûs vi elaſticæ proportionalis, ſumma erit vera quantitas motûs ex conflictu corporum imperfectè elaſticorum in unoquoque acquiſita vel amiſſa, ex quâ datâ & ex quantitate motûs corporis cujuſque antè conflictum, reperitur, ut ſuprà, omnis quantitas motûs illius poſt conflictum. Exemplo lux affulgebit.

(1) 54. Globus A, ſit triplo major globo B, habeatque duos velocitatis gradus, illius motus quantitas (6) erit ut 3×2, ſeu 6. B, ſequatur in eâdem rectâ cum velocitatis gradibus, 10, eritque quantitas motûs globi B, 1×10, ſeu, 10. . . . . 1°. Si globi elaſtici non ſunt,

motus illis eſſe partium ſex & partium decem, & ſumma erit partium ſexdecim. In corporum igitur concurſu, ſi corpus *A* lucretur motus partes tres vel quatuor vel quinque, corpus *B* amittet partes totidem; adeoque perget corpus *A* poſt reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, & *B* cum partibus ſeptem vel ſex vel quinque, exiſtente ſemper ſummâ partium ſexdecim ut prius. Si corpus *A* lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, ideoque progrediatur poſt concurſum cum partibus quindecim vel ſexdecim vel ſeptemdecim vel octodecim, corpus *B*, amittendo tot partes quot *A* lucratur, vel cum unâ parte progredietur amiſſis partibus novem, vel quieſcet amiſſo motu ſuo progreſſivo partium decem, vel cum unâ parte regredietur amiſſo motu ſuo & (ut ita dicam) unâ parte amplius, vel regredietur cum partibus duabus ob detractum motum progreſſivum partium duodecim. Atque ita ſummæ motuum conſpirantium $15 + 1$ vel $16 + 0$, & differentiæ contrariorum $17 - 1$ & $18 - 2$ ſemper erunt partium ſexdecim, ut ante concurſum & reflexionem. (m) Cognitis autem motibus quibuſcum corpora poſt reflexionem pergent, invenietur cujuſque velocitas, ponendo eam eſſe ad velocitatem ante reflexionem, ut motus poſt eſt ad mo-

ſunt, velocitas communis poſt conflictum (52) erit 16 : 4, ſeu 4; quare quantitas motûs ipſius A, poſt conflictum erit 3×4, ſeu 12. B, verò quantitas motûs erit 1×4, ſeu 4. Itaque quantitas motûs à corpore B, amiſſa eſt, 6, & corpori A, acquiſita eſt etiam, 6 . . . . . 2°. Si globi ſunt perfectè elaſtici, quantitates illæ duplicari debent (53), erunt igitur 12 & 12. Si quantitati motûs, 6, globi A, antè conflictum jungas, 12, ſumma erit, 18, quantitas motûs illius poſt conflictum; ſi verò ex quantitate motûs, 10, ipſius B, antè conflictum ſubduxeris, 12, quantitatem motûs per conflictum amiſſam, reſiduum eſt -2, quod ſignum $-$, ut notum eſt, contrariam poſitionem ſignificat, ſeu corpus B, poſt ictum in contrariam plagam reſilit cum hâc motûs quantitate 2 . . . .

3°. Si globi A & B, ſint imperfectè elaſtici, ſitque v. gr., eorum vis reſtitutiva ſubdupla vis compreſſivæ, erit vis compreſſiva ad vim reſtitutivam (ſeu 2, ad 1) ut quantitas motûs, 6, ex ictu acquiſita vel amiſſa ad quantitatem motûs, 3, ſolâ vi reſtitutivâ acquiſitam vel amiſſam; quare hæc quantitas, 3, addatur quantitati, 6, ex ictu acquiſitæ in corpore A, & amiſſæ in corpore B, ſumma, 9, erit quantitas motûs integra tam ex ictu quàm ex elatere acquiſita vel amiſſa; unde quantitas motûs globi A, poſt conflictum eſt, $6 + 9$, ſeu, 15, globi B, $10 - 9$, ſeu 1, quarum ſumma eſt, 16.

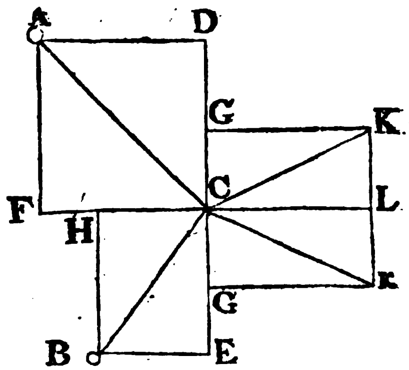
(m) 55. Cognitis quantitatibus motuum quibuſcum corpora poſt conflictum pergent, invenietur cujuſque velocitas dividendo quantitatem motûs cujuſque corpo-ris

motum ante. Ut in caſu ultimo, ubi corporis *A* motus erat partium ſex ante reflexionem & partium octodecim poſtea, & velocitas partium duarum ante reflexionem; invenietur ejus velocitas partium ſex poſt reflexionem, dicendo, ut motûs partes ſex ante reflexionem ad motûs partes octodecim poſtea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes ſex poſtea.

(n) Quod ſi corpora vel non Sphærica vel diverſis in rectis moventia incidant in ſe mutuo obliquè, & requirantur eorum motus poſt reflexionem; cognoſcendus eſt ſitus plani à quo cor-

ris per illius maſſam (6), aut etiam quia ejuſdem corporis diverſæ quantitates motûs ſunt ut velocitates (6), dicendo, ut quantitas motûs antè conflictum ad quantitatem motûs poſt conflictum, ità velocitas corporis antè conflictum ad illius velocitatem poſt conflictum.

(n) 56. Si corpora quæcumque A & B, diverſis in rectis A C, B C, moventia, incidant in ſe mutuò obliquè in C, & requirantur eorum motus poſt impactum. Cognoſcendus eſt ſitus plani F L, à quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concurſûs C; deindè corporis utriuſque motus A C, B C, (per coroll. 2.) diſtinguendus eſt in duos A D, & A F, B E & B H, unum nempè A F ſeu D C, & B H ſeu E C, huic plano F L perpendicularem, alterum A D, B E, eidem parallelum. Quia verò corpora ſecundùm parallelas A D, B E, ad ſe mutuò non accedunt, ſed tantùm ſecundùm perpendiculares D C, E C, in ſe invicem agunt, motus paralleli A D, B E, per impactum non mutantur, adeòque retinendi ſunt iidem poſt conflictum qui erant ante conflictum; & motibus perpendicularibus D C, E C, mutationes æquales in partes contrarias C D, C E, tribuendæ ſunt ſic ut ſumma conſpirantium & differentia contrariorum maneat eadem antè & poſt conflictum (coroll. 3. Newt.) Ut itaque corporum A & B, in ſe mutuò obliquè incidentium motus poſt ictum inveniantur, mota duntaxat ſupponantur per lineas D C & E C, velocitatibus D C & E C, atque

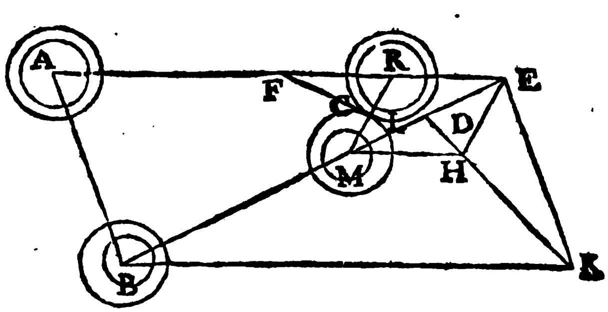


in eâ hypotheſi quærantur (52, ſi fuerint elaſtica, 53, ſi non fuerint elaſtica) eorum velocitas poſt conflictum in lineâ C D, vel C E, ex quâ datâ, & ex velocitate parallelâ plano F L, etiam datâ, compoſitus corporis motus (per coroll. 1. Newt.) facilè reperietur. Sit, exempli causâ, C G, velocitas corporis A, poſt impactum per D E, in C; ſumptâ C L, æquali & parallelâ velocitati ſecundùm A D, quæ eadem poſt conflictum remanet, compleatur parallelogrammum G L & A, movebitur per illius diagonalem C K, velocitate ut C K, (per coroll. 1. Newt.) Si corpora anguloſa ſibi per angulos occurrant, orientur motus circulares, dum pars corporis ex vi inſitâ in unam plagam movetur, altera verò ex conflictu fertur in alteram plagam circà corporis centrum.

57. Da-

corpora concurrentia tanguntur in puncto concurſûs: dein corporis utriuſque motus (per Corol. 11.) diſtinguendus eſt in duos, unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum: motus autem paralleli, propterea quod corpora agant in ſe invicem ſecundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi ſunt iidem poſt reflexionem atque antea; & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ ſunt ſic, ut ſumma conſpirantium & differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. Ex hujuſmodi reflexionibus oriri etiam ſolent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos caſus in ſequentibus non conſidero, & nimis longum eſſet omnia huc ſpectantia demonſtrare. LEGES MOTUS.

CO-



57. Datis duorum globorum A & B, directionibus, celeritatibus & diametris, unà cum eorum ſitu antè conflictum, facile eſt determinare punctum concurſûs C, & ſitum plani F L, utrumque globum in puncto C, contingentis. Globus A, feratur per lineam A E, & celeritate ut A E, globus B verò ſecundùm directionem B E, celeritate ut B D, moveatur. Junctis A & B globorum centris per lineam A B, compleatur parallelogrammum A B K E. Jungantur puncta D & K, & recta D K, ex centro E, interſecetur arcu qui deſcribitur radio E H, ſummæ ſemidiametrorum globorum A & B, æquali. Ex puncto interſectionis H, ducatur recta H M, ipſi E A parallela, erunt M & R, loca in quibus globorum centra conſtituentur, ubi ſecum invicem concurrent, & ſumptâ lineâ R C, æquali radio globi A, recta F L, ad R C perpendicularis, in puncto C, ſitum plani deſignabit.... Dem... Quoniam recta H M, eſt lineæ B K parallela (per conſt.) erit D M : D B = M H : B K = R E : E A, ob R E = M H, & E A = B K; ergò dividendo B M : B D = A R : A E, & alternando B M : A R = B D : A E. Cum igitur ſit B M ad A R, ut celeritas globi B, ad celeritatem globi A; globus A in R, & B in M, eodem tempore pervenient (6); Cumque ſit M R = E H, globi in puncto C, ſe mutuò contingent, & planum E L, ad radium R C, in puncto C, perpendiculariter ductum utrumque globum continget. Q. e. D.

COROLLARIUM IV.

Commune gravitatis Centrum (°), *corporum duorum vel plurium, ab actionibus corporum inter ſe non mutat ſtatum ſuum vel motus vel quietis; & propterea corporum omnium in ſe mutuo agentium (excluſis actionibus & impedimentis externis) commune Centrum gravitatis vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum.*

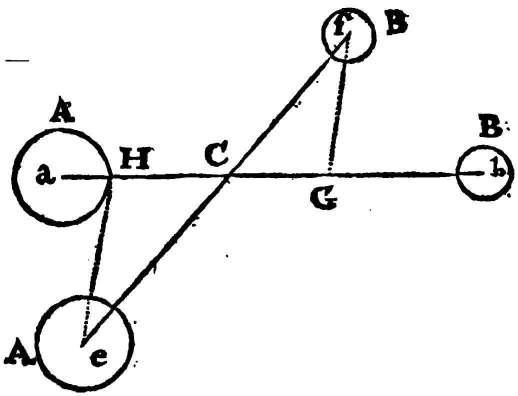
Nam

(°) 58. **Centrum gravitatis corporis cujuſque** eſt punctum intrà vel extrà corpus poſitum, circà quod undique partes in æquilibrio conſiſtunt, ità ut ſi per hoc punctum ducatur planum figuram utcumque ſecans, corporis ſegmenta quæ utrinque ſunt circà planum illud librata æquiponderent; ſi igitur ex centro gravitatis corpus aliquod ſuſpendatur, datum quemcumque ſitum retinebit, & ſemper quieſcet, ſi centri gravitatis deſcenſus impediatur; undè totam corporis gravitatem in centro gravitatis locatam fingunt Mechanici, & pro corpore gravi ſolum gravitatis centrum in ſuis demonſtrationibus ſurrogare ſolent. Planum gravitatis eſt figura plana per centrum gravitatis tranſiens; Diameter verò gravitatis eſt recta per centrum gravitatis ducta; Quare planorum gravitatis, communis interſectio diametrum gravitatis efficit, & in diametrorum gravitatis concurſu centrum gravitatis poſitum eſt. Centrum magnitudinis vocatur punctum illud, per quod diviſa magnitudo relinquit duas partes utrinque æquales; ut in circulo & ellipſi, ductis utcumque per centrum lineis rectis, lineæ illæ totaque figura in partes æquales dividuntur; ac proindè ſi gravia homogenea, id eſt, quorum gravitates ſunt voluminibus proportionales, ſecundum longitudinem in partes ſimiles & æquales ſecari poſſint, centrum gravitatis à centro magnitudinis non differt.

59. Ex hiſce definitionibus facilè colligitur, omnium circulorum, ellipſium, ſphærarum & figurarum quarumvis regularium, centrum gravitatis idem eſſe cum centro magnitudinis, modò tamen gravia ſupponantur homogenea. In figuris autem irregularibus, communi duorum gravitatis diametrorum interſectione determinari poteſt centrum gravitatis (58). Sic in quolibet parallelogrammo, centrum illud in duarum diagonalium concurſu poſitum eſt; in triangulo reperitur in interſectione duarum rectarum quæ à duobus angulis ductæ, latera angulis illis oppoſita, totumque proinde triangulum bifariam, adeoque in partes æquiponderantes ſecant, in priſmatibus & cylindris, centrum gravitatis eſt punctum medium rectæ baſium oppoſitarum centra conjungentis; & generaliter in omnibus corporibus quantumvis difformibus centrum gravitatis mechanicè invenitur, ſi corpus ab aliquâ ſui parte liberè ſuſpendatur, & ab eâdem parte à quâ pendet, demittatur perpendiculum ità ut in corpore linea quam fecerit perpendiculi filum notetur; deindè ab aliâ parte corpus idem liberè ſuſpendatur ut priùs, noteturque iterùm linea perpendiculi ab hâc parte ſuper corpus demiſſi; concurſus enim duorum filorum perpendiculi (quæ ſunt diametri gravitatis) erit centrum gravitatis corporis dati.

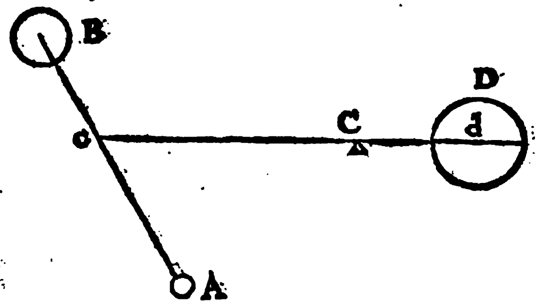
60. Cen-

60. Centra gravitatis a & b, corporum A & B, rectâ ſeu vecte inflexibili & gravitatis experte, a b jungantur; & ità dividatur a b, in C, ut ſit pondus A, ad pondus B, ut C b, ad C a, punctum C, erit centrum gravitatis commune duorum corporum A & B..... Dem... punctum C, fixum maneat, ſitque 1°. a b, horizonti parallela, & quia a b, eſt vectis cujus fulcrum C, ponderis B momentum ſeu conatus ad vectem circà C, movendum, erit ut B × C b, & ponderis A momentum ut A × C a (47); verùm (per hyp.) A: B = C b: C a, adeóque A × C a = B × C b; ergò momenta ponderum A & B, æqualia ſunt, & proinde in æquilibrio circà punctum C, conſiſtunt.... 2°. vectis, a b, circà punctum C fixum, rotetur, & ſitum e f, inclinatum ad horizontem a b, obtineat, ductis F G, E H, rectis horizonti a b, perpendicularibus, quæ ſunt gravium directiones, ponderum A & B, momenta erunt ut A × C H & B × C G, (47); ſed ob triangula H C e, G f G,

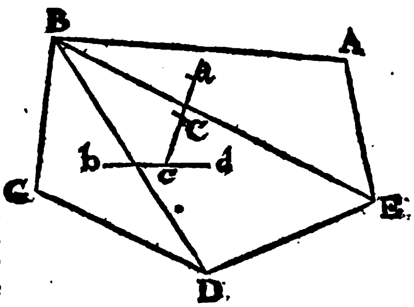


ſimilia G C : H C = C f, ſeu C b : C a, ſive C a = A: B, adeóque G C : H C = A: B & A × C H = B × C G; momenta igitur ponderum A & B, in ſitu quocumque dato æqualia ſunt & ſemper æquilibrantur. Quare (58) punctum C, eſt commune gravitatis centrum duorum corporum A & B. Q. e. D.

61. Coroll. 1..... Duorum corporum A & B, commune gravitatis centrum ſit c, & tertii corporis D, centrum gravitatis proprium ſit d; jungatur recta c d, quæ ità dividatur in C, ut ſit ſumma ponderum A + B ad pondus D, ſicut C d, ad C c, trium corporum A, B, D, centrum gravitatis commune erit in C; nam duo corpora A & B, (58) conſiderari poſſunt tanquam in ſuo communi gravitatis centro c, coacta, adeóque ſi fuerit A + B: D = C d: C c, erit C, centrum gravitatis commune trium corporum A, B, D, (60). Eâdem ratione quatuor, pluriumve, prout quiſque voluerit, corporum commune gravitatis centrum reperietur.

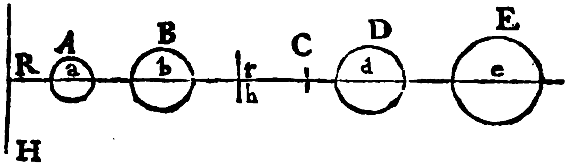


62. Coroll. 2.... figuræ cujuſvis planæ & rectilineæ centrum gravitatis hoc modo inveniri poteſt. Figura data, A B G D E in ſua triangula dividatur, duorumque triangulorum, B G D, B D E, centra gravitatis b & d, rectâ jungantur, & ità dividatur, b d, in c, ut area trianguli B G D, ſit ad aream trianguli B D E, ſicut c d, a d, b c, eritque, c, centrum gravitatis commune duorum triangulorum B G D, B D E, (60). Centrum gravitatis, a, trianguli B A C, & centrum, c, figuræ B G D E, mox inventum jungantur rectâ c a, quæ ità dividatur in C, ut area trianguli B A E, ſit ad aream figuræ B G D E, ſicut C c, ad C a & C, erit centrum gravitatis totius figuræ datæ A B G D E, (61). Hæc omnia clarè intelliguntur, ſi figurarum area quævis, inſtar ponderis centro gravitatis appenſi conſideretur.



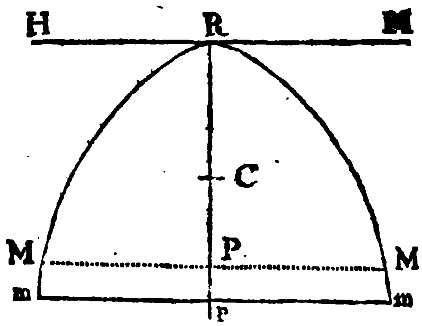
F.63. Sit recta R H, horizonti perpendicularis quæ axis rotationis dicatur, & in eâ ſumatur centrum rotationis R, ſeu punctum fixum circà quod vectis horizontalis R e, cum appenſis ponderibus A, B, D, E, rotari poſſit, ſintque corporum centra gravitatis propria a, b, d, e, & eorum commune gravitatis centrum C, in vecte R e, ad eandem axis R H, partem poſita; diſtantia R C, communis centri gravitatis C, à centro rotationis R, æqualis erit ſummæ factorum unius cujuſque ponderis in ſuam à centro rotationis R, diſtantiam, per ſummam ponderum diviſæ . . . . . . Dem. . . . Momentum cujuſque ponderis ad vectem circà centrum R, movendum, eſt ut factum ex illo pondere in ſuam ab eodem centro R, diſtantiam (47), & omnium momentorum ſumma, ſeu totus omnium ponderum ad vectem circà centrum R, movendum conatus, ut illorum factorum ſumma; verùm quia pondera omnia per vectem R e, diſperſa, tanquam in ſuo communi gravitatis centro C, coacta conſiderari poſſunt (58), erit etiam totus omnium ponderum conatus ad vectem circà R, movendum, ut ſumma ponderum in diſtantiam R C ducta; quare ſumma factorum uniuſcujuſque ponderis in ſuam à centro rotationis R diſtantiam, æqualis eſt facto ex ſummâ ponderum in diſtantiam R C, communis centri gravitatis C, à centro rotationis R; igitur $RC \times \overline{A+B+D+E}$ &c. $= A \times aR + B \times bR + D \times dR + E \times eR$ &c., adeóque $RC = \overline{A \times aR + B \times bR + D \times dR + E \times eR}$ &c. : $\overline{A+B+D+E}$ &c. Q. e. D.

64. Si pondera ad eandem axis rotationis partem ſita non ſint, ſi v. gr. fuerit axis rotationis r h, erit $rC = \overline{D \times dr + E \times er - A \times ar - B \times br} : \overline{A+B+D+E}$. Nam momenta ponderum D & E, ad vectem circà r movendum ſunt $D \times dr$, $E \times er$, & momenta contraria ponderum A & B, ſunt $A \times ar$, $B \times br$; quare vis omnium ponderum ad vectem r e, movendum erit, $D \times dr + E \times er - A \times ar - B \times br$; ſed ſi pondera in centro C, coacta ſupponantur, erit vis illa eadem, $rC \times \overline{A+B+D+E}$,



ergò $rC \times \overline{A+B+D+E} = D \times dr + E \times er - A \times ar - B \times br$; ac proinde $rC = \overline{D \times dr + E \times er - A \times ar - B \times br} : \overline{A+B+D+E}$. Q. e. D.

65. Quapropter ſi omnia pondera ſint ad eandem axis rotationis R H, partem poſita, & quodlibet pondus vocetur p, ſumma verò omnium ponderum S p; prætereà ſi diſtantia à centro rotationis dicatur x, ac proinde factum cujuſque ponderis in ſuam à centro rotationis diſtantiam ſit x p, & omnium factorum ſumma ſ x p; diſtantia communis centri gravitatis omnium ponderum à centro rotationis erit generaliter S x p : S p. Si verò pondera fuerint ad diverſas axis rotationis r h, partes poſita, & diſtantia cujuſlibet ponderis à centro rotationis r, vocetur x, ſingula verò pondera quæ ſunt ad partem r e, poſita, dicantur p, eorumque ſumma ſit S p; inſuper ſingula pondera ad partem R r, ſita dicantur q, & eorum ſumma ſit S q, diſtantia communis centri gravitatis omnium ponderum à centro rotationis r, erit $\overline{ſxp - ſxq} : \overline{ſp + ſq}$, vel $\overline{ſxq - ſxp} : \overline{ſp + ſq}$; unde ſi $Sxp = Sxq$, manifeſtum eſt centrum rotationis idem eſſe cum centro gravitatis.

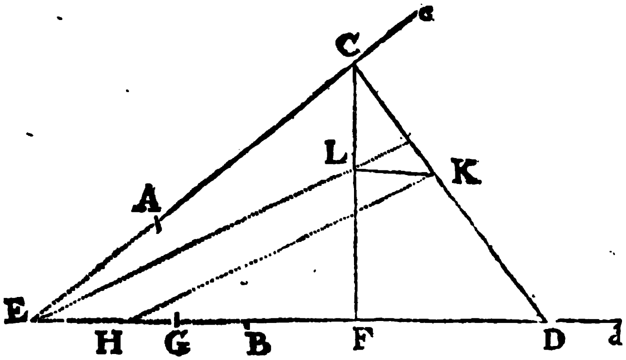


66. Harumce formularum auxilio, centra gravitatis figurarum curvarum reperiun-

(p) Nam ſi puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis, & diſtantia eorum dividatur in ratione datâ, punctum dividens vel quieſcit vel progreditur uniformiter in li-

riuntur; Nam ſi curvæ M R M, axis R P, quo ordinatæ M M m m, biſariam dividuntur, ut vectis habeatur, vertexque R, ut centrum rotationis & ſingula elementa qualia ſunt M M m m, ut pondera vecti appenſa conſiderentur, diſtantia centri gravitatis C, à centro rotationis ſeu vertice R, erit (per primam formulam) æqualis ſummæ factorum ex ſingulis elementis M M m m, in ſuam à vertice R', diſtantiam per ſummam eorumdem elementorum diviſæ.

(p) 67. Duo corpora C & D, æquabiliter moveantur in lineis rectis A C, B D, poſitione datis, jungaturque recta C D, & ità dividatur in K, ut ſit D K, ad C K, ut corpus C, ad corpus D; punctum K, quod eſt centrum gravitatis corporum C & D, (60) vel quieſcet vel movebitur uniformiter in lineâ rectâ poſitione datâ . . . Dem. . . . concurrant lineæ A C & B D, in E. 1°. Corpora C & D, ex punctis fixis A & B, in eandem plagam proficiſcantur & iiſdem temporibus ad puncta C & D, perveniant, ac proindè ſpatia A C & B D, erunt in ratione datâ velocitatum (5). In B E, capiatur B G, ad A E, in ratione datâ B D, ad A C, & cum data ſit A E, dabitur quoque linea B G; ſit F D, ſemper æqualis datæ E G, erit E F = G D, & quia B G: A E = B D: A C, (per conſt.) erit B G + B D, ſeu G D : A E + A C, ſeu E C = B D: A C, adeóque A C: B D = E C: G D, ſeu E F; eſt igitur E C ad E F; in ratione datâ, & propterea ex datis angulo C E F, & laterum E C, E F, ratione, dabitur ſpecie triangulum E F C, id eſt dantur tres anguli. Deindè ſecetur C F, in L, ut ſit C L, ad C F, in ratione datâ C K, ad C D, id eſt in ratione corporis D, ad ſummam corporum C + D; & quia in triangulo E F C, ſpecie dato datur ratio laterum E F, F C, dataque eſt ratio C F, ad F L, dabitur quoque ratio ex his duabus compoſita E F, ad F L, adeóque ob angulum E F C, etiam datum dabitur ſpecie triangulum E F L; Quare dum progrediuntur corpora C & D, punctum L, ſemper locabitur in rectâ E L, poſitione datâ, utpote quæ eſt baſis trianguli E F L, in quo angulus F, idem conſtanter manet, & latus E F, poſitione datum ad latus F L, datam habet rationem. Junge L K, & quia C L : C F = C K : C D (per conſt.), ſimilia erunt triangula C L K, C F D, & ob datam F D = E G, & datam rationem F D, ad L K, ſeu C D, ad C K; dabitur L K, magnitudine; lineæ L K, æqualis capiatur E H, & ductâ H K, erit ſemper E L K H, parallelogrammum, ob L K, æqualem & parallelam ipſi L H, locabitur ergò punctum K, in parallelogrammi illius latere H K, quod poſitione datum eſt; nam latus E L, poſitione, latus verò E H, poſitione & magnitudine datur. Quare punctum K, ſeu centrum gravitatis in lineâ rectâ poſitione datâ progreditur. Quoniam verò, ex demonſtratis, triangula C E F, L E F, ſpecie, & tria latera E C, E L, E F, poſitione data ſunt, manifeſtum eſt rationem rectæ E L, ſeu lineæ æqualis H K, ad E C, datam eſſe. Verùm quia punctum C, uniformiter movetur (per hyp.) uniformiter creſcit recta E C, ergò pariter recta H K, uniformiter augetur, adeoque punctum K, æquabiliter progreditur in lineâ rectâ H K, poſitione datâ. Q. e. 1°. demonſtrandum . . . . . .

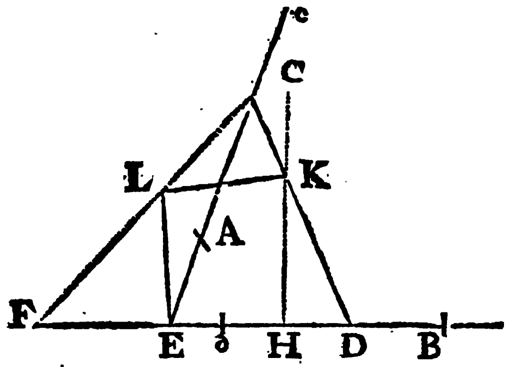


2°. Cor-

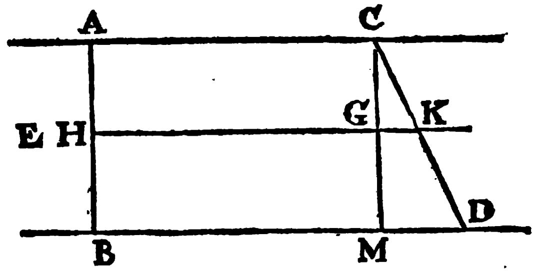
AXIOMATA, SIVE

neâ rectâ. Hoc poſtea in Lemmate XXIII. ejuſque Corollario demonſtratur, ſi punctorum motus fiant in eodem plano; & (q) eâdem

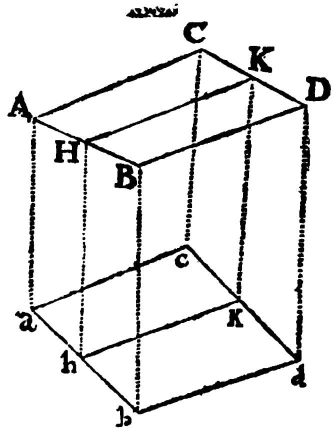
2°. Corpora ex punctis fixis A & B, in diverſas plagas progrediantur, ſemperque capiatur B G, in partem oppoſitam directioni B D, F D, verò ſecundùm directionem B D, cætera fiant ut in ſuperiori conſtructione eadem manebit demonſtratio pro 2°. caſu.



68. Si punctum concurſus E, in infinitum abeat, parallelæ fient lineæ A C, B D, & ex ſuperiori demonſtratione patet centrum gravitatis K, vel quieſcere vel uniformiter moveri, in lineâ H K, poſitione datâ, lineis A C, B D, parallelâ; ſi autem lineæ parallelæ A C & B D, ad ſe mutuò accedant tandemque coincidant, eadem ſemper valet demonſtratio, ac proindè ſi corpora in eâdem rectâ moveantur, in hâc eâdem lineâ centrum gravitatis vel quieſcet vel movebitur uniformiter.



(q) 69. Si rectæ A C & B D, non in uno, ſed in diverſis planis poſitæ fuerint, ex ſingulis eorum punctis A & B, C & D, in quibus eodem tempore reperiuntur, in planum quodvis a b d c, pro lubitu aſſumptum demittantur perpendicula A a, B b, C c, D d; & ex centris gravitatis H & K, perpendicula H h, K k, excitentur, ob motum uniformem punctorum A & B, in lineis A C, B D, evidens eſt puncta a & b, uniformiter moveri in lineis a c, b d; & quia A a, B b, H h, parallelæ ſunt; lineæ A B, a b, in eâdem ratione datâ in H, & h, dividuntur; idemque dicendum de punctis K, & k, in lineis C D, & c d; Quare, ex demonſtratis (67), punctum h, uniformiter progreditur in rectâ h k, adeóque centrum gravitatis H, ſemper movetur in plano H h K k, ad planum a b d c, normali; ſi loco plani, a b d c, aliud quodvis ad arbitrium aſſumeretur, eodem modo



dem ratione demonſtrari poteſt, ſi motus illi non fiant in eodem plano. Ergo ſi corpora quotcunque moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis vel quieſcit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quod linea, horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens, dividitur ab hoc centro communi in ratione datâ. Similiter & commune centrum horum duorum & tertii cujuſvis vel quieſcit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quod ab eo dividitur diſtantia centri communis corporum duorum & centri corporis tertii in datâ ratione. Eodem modo & commune centrum horum trium & quarti cujuſvis vel quieſcit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quod ab eo dividitur diſtantia inter centrum commune trium & centrum quarti in datâ ratione, & ſic in infinitum. Igitur in ſyſtemate corporum quæ actionibus in ſe invicem aliiſque omnibus in ſe extrinſecus impreſſis omnino vacant, ideoque moventur ſingula uniformiter in rectis ſingulis, commune omnium centrum gravitatis vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum.

(r) Porro in ſyſtemate duorum corporum in ſe invicem agentium cum diſtantiæ centrorum utriuſque à communi gravitatis centro ſint reciprocè ut corpora; erunt motus relativi cor-

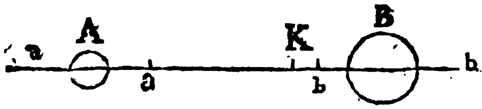
modo demonſtrari poſſet centrum gravitatis H, moveri in plano ad aſſumptum perpendiculari; neceſſe igitur eſt ut centrum illud H, moveatur in communi illorum planorum ad alia pro lubitu aſſumpta perpendicularium interſectione, quæ cum ſit linea recta H K, poſitione data, & punctum h, per rectam h k, uniformiter progrediatur, punctum H, æquabiliter fertur in lineâ H K. In omni igitur caſu centrum commune gravitatis duorum corporum quæ motu uniformi per lineas rectas poſitione datas progrediuntur, ſemper quieſcit vel movetur uniformiter in rectâ poſitione datâ.



(r) 70. Si duobus corporibus A & B, quorum commune gravitatis centrum ſit K, æquales motûs quantitates in partes contrarias de novo imprimantur, quibus eodem tempore percurrunt ſpatia A a, B b, centri gravitatis ſtatus non mutatur; Cum enim K, ſit commune centrum gravitatis corporum A & B, (per hyp.) erit A : B = K B : K A (60) & quia impreſſæ quantitates motûs (6) A × A a, B × B b æqua-

corporum eorundem, vel accedendi ad centrum illud vel ab eodem recedendi, æquales inter ſe. Proinde centrum illud à motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atque ideo ab actionibus horum corporum inter ſe, nec promovetur nec retardatur nec mutationem patitur in ſtatu ſuo quoad motum vel quietem. In ſyſtemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in ſe mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus mutat ſtatum ſuum; & reliquorum, quibuſcum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; diſtantia autem horum duorum centrorum dividitur à communi corporum omnium centro in partes ſummis totalibus corporum quorum ſunt centra reciprocè proportionales, ideoque centris illis duobus ſtatum ſuum movendi vel quieſcendi ſervantibus, commune omnium centrum ſervat etiam ſtatum ſuum: manifeſtum eſt quod commune illud omnium centrum ob actiones binorum corporum inter ſe nunquam mutat ſtatum ſuum quoad motum & quietem. In tali autem ſyſtemate actiones omnes corporum inter ſe vel inter bina ſunt corpora, vel ab actionibus inter bina compoſitæ; & propterea communi omnium centro mutationem in ſtatu motus ejus vel quietis nunquam inducunt. Quare cum centrum illud ubi corpora non agunt in ſe invicem, vel quieſcit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter; perget idem, non obſtantibus corporum actionibus inter ſe, vel ſemper quieſcere, vel ſemper progredi uniformiter in directum; niſi à viribus in ſyſtema extrinſecus impreſſis deturbetur

de

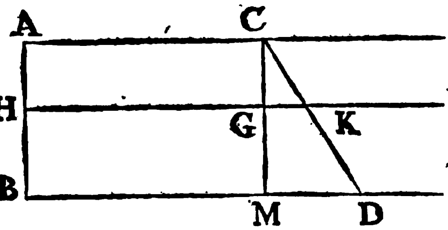


æquales ſunt (per hyp.), erit etiam A : B = B b : A a, adeoque K B : K A = B b : A a, & componendo vel dividendo K b : K a = B b : A a = A : B; dum igitur corpora A & B, ad puncta a & b, motibus impreſſis perveniunt, centrum K, immotum remanſit (60); ac proindè ab æqualibus motuum mutationibus in contrarias partes factis non mutat ſtatum ſuum motûs vel quietis. Quapropter cum mutua corporum actio (per leg. 2. 3.) æquales mutationes in utroque corpore versùs partes contrarias producat, commune gravitatis centrum duorum corporum ab actionibus horum corporum inter ſe, nec promovetur, nec retardatur, nec mutationem patitur in ſtatu ſuo quoad motum vel quietem.

71. Mo-

de hoc ſtatu. (f) Eſt igitur ſyſtematis corporum plurium Lex eadem quæ corporis ſolitarii, quoad perſeverantiam in ſtatu motus vel quietis. Motus enim progreſſivus ſeu corporis ſolitarii ſeu

LEGES MOTUS.



(f) 71. Motus progreſſivus ſeu corporis ſolitarii ſeu ſyſtematis corporum ex motu centri gravitatis ſemper æſtimari debet.... Dem.... 1°. Corpora duo A & B, in lineis AC & BD, parallelis progrediantur cum velocitatibus, ut AC, BD, eorumque commune gravitatis centrum H, per rectam HK, lineis AC & BD, parallelam feratur, ducatur CM, rectæ AB parallela. Quoniam $B : A = AH : BH$ (60) erit $B : B+A = AH : AB$, & ob parallelas AB, & CM; GK & MD, erit $AH : AB = CG : CM = GK : MD$, adeóque $GK : MD = B : A+B$, & $B \times MD = \overline{A+B} \times GK$; verum quia $AC = HG = BM$, erit $HK = AC + GK$, & $BD = AC + MD$; quarè $\overline{A+B} \times HK = \overline{A+B} \times AC + \overline{A+B} \times GK = A \times AC + B \times AC + B \times MD$, ob $\overline{A+B} \times GK = B \times MD$, ergò $\overline{A+B} \times HK = A \times AC + B \times BD$, ſeu ſumma corporum A & B, in velocitatem centri gravitatis HK, ducta, æqualis eſt ſummæ factorum in ſingulis corporibus A & B, in ſuam velocitatem AC, BD.... 2°. Si corpora contrariis directionibus CA & BD, moveantur, negativa erit quantitas motûs corporis A, propter contrariam directionem CA, adeóque differentia quantitatum motûs corporum, in plagas oppoſitas tendentium, ſeu quod idem eſt, quantitas motûs in eandem plagam, æqualis erit facto ex ſummâ corporum, in velocitatem centri gravitatis.... 3°. Si parallelæ AC, BD, ad ſe mutuò accedant tandemque coincidant, eadem ſemper manet demonſtratio, quæ proindè etiam obtinet, dum corpora in eâdem rectâ feruntur.... 4°. Si corpora non moveantur in lineis parallelis nec in eodem plano, uniuſcujuſque ponderis directio ac velocitas in duas alias reſolvatur, quarum una ſit viæ centri gravitatis parallela, altera verò ipſi perpendicularis, & ex demonſtratis liquet ſummam quantitatum motûs corporum in plagam versùs quam movetur centrum gravitatis eſſe æqualem facto ex ſummâ corporum in velocitatem centri gravitatis.... 5°. Si æquabilis non ſit corporum motus, ſed quâcumque ratione acceleretur vel retardetur, temporibus infinitè parvis tanquam æquabilis ſpectari poteſt, iiſque tempuſculis ſumma quantitatum motûs corporum æqualis eſt facto ex ſummâ corporum in velocitatem centri gravitatis; undè quovis tempore quantitas motûs ſingulorum corporum æqualis eſt quantitati motûs quam habuiſſent omnia corpora, ſi communi velocitate centri gravitatis ſimul lata fuiſſent.... 6°. Si trium corporum ſyſtema moveatur, duo ex hiſce corporibus in ſuo gravitatis centro coacta fingi poſſunt (ex Dem) ac proindè trium plurimve corporum aut etiam ejuſdem corporis partium ſyſtema ad duorum duntaxat corporum ſyſtema reducitur; ergò quantitas motûs progreſſivi ſeu corporis ſolitarii ſeu ſyſtematis corporum, ex motu centri gravitatis æſtimari debet. Q. e. D.

72. Coroll. 1.... Si differentia quantitatum motûs versùs partes contrarias in ſyſtemate corporum ſit nihilo æqualis, commune centrum gravitatis quieſcit; ſi inæqualis eſt progreditur in eam partem versùs quam prævalet motus.

73. Coroll. 2.... Motus ſyſtematis corporum in plagam datam habetur, ſi centri gravitatis motus in duos motus reſolvatur, quorum unus in plagam datam dirigatur, alter verò ſit ipſi perpendicularis; nam ſumma corporum ducta in veloci-

AXIOMATA, SIVE ſeu ſyſtematis corporum ex motu centri gravitatis æſtimari ſemper debet.

COROLLARIUM V.

(t) *Corporum dato ſpatio incluſorum iidem ſunt motus inter ſe, ſive ſpatium illud quieſcat, ſive moveatur idem uniformiter in directum ſine motu circulari.*

Nam differentiæ motuum tendentium ad eandem partem, & ſummæ tendentium ad contrarias, eædem ſunt ſub initio in utroque caſu (ex hypotheſi) & ex his ſummis vel differentiis oriuntur congreſſus & impetus quibus corpora ſe mutuo feriunt. Ergo per Legem II. æquales erunt congreſſuum effectus in utroque caſu; & propterea manebunt motus inter ſe in uno caſu æquales motibus inter ſe in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modo ſe habent in Navi, ſive ea quieſcat, ſive moveatur uniformiter in directum.

COROLLARIUM VI.

Si corpora moveantur quomodocunque inter ſe, & à viribus acceleratricibus æqualibus ſecundum lineas parallelas urgeantur; per-

locitatem centri gravitatis verſûs datam directionem exponit quantitatem motûs totius ſyſtematis in eandem partem progredientis.

(t) 74. Si navi quieſcenti in quâ continentur corpora variis motibus agitata, motus in directum æquabilis imprimatur, omnia hæc corpora navis velocitatem æquè participant (leg. 1. 2.), adeóque ſingulis corporibus additur in eandem plagam æqualis velocitas, ac proinde motus navi impreſſus reſpectivas corporum velocitates non mutat; quare differentiæ velocitatum in corporibus quæ ad eandem partem tendunt, & ſummæ velocitatum in corporibus quæ ad partes contrarias tendunt, eædem manent antè & poſt motum navi impreſſum; ſed ex his ſummis vel differentiis quæ ſunt reſpectivæ corporum velocitates, oriuntur congreſſus & ictûs magnitudines quibus corpora ſe mutuò feriunt; nam ſi corpus aliquod M, velocitate C, in corpus quieſcens m, incurrat, eadem eſt ictûs magnitudo ac ſi utrique corpori nova velocitas c, in eandem partem accederet, & corpus M, cum velocitate C + c, in corpus m, velocitate c, motum impingeret; corpus enim M, in m, non agit per velocitatem c, utrique corpori communem, ſed per ſolam velocitatum differentiam C + c − c, ſeu C; hæc autem differentia eſt ipſamet velocitas quâ corpus M, in aliud m, quieſcens agit. Iidem ergò erunt congreſſus ac proindè æquales congreſſuum effectus in utroque caſu (per leg. 2.), & propterea manebunt motus reſpectivi in uno caſu æquales motibus reſpectivis corporum in altero; ſi autem motus circularis navi imprimeretur, corpora, propter vim centrifugam (18) in varias partes cum variâ velocitate propellerentur.

75. Vis

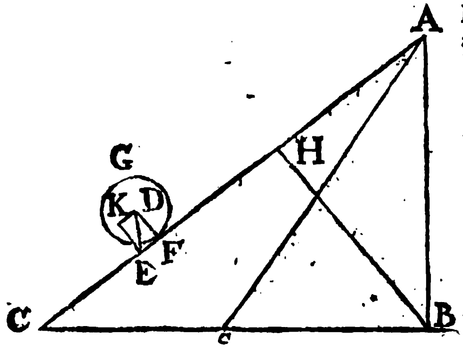
pergent omnia eodem modo moveri inter ſe, ac ſi viribus illis non eſſent incitata.

Nam vires illæ æqualiter (pro quantitatibus movendorum corporum) & ſecundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter (quoad velocitatem) movebunt per legem II. ideoque nunquam mutabunt poſitiones & motus eorum inter ſe.

Scholium. (a)

Hactenus principia tradidi à mathematicis recepta & experientia multiplici confirmata. Per leges duas primas & corollaria

(a) 75. Vis acceleratrix gravitatis, quâ corpus in plano ad horizontem inclinato juxtà plani directionem urgetur, eſt ad vim gravitatis acceleratricem quâ ſecundum directionem horizonti perpendicularem ſollicitatur, ut altitudo plani ad ipſius longitudinem .... Dem....



Globus G, plano AC, ad horizontem CB, inclinato incumbat; ex A, ad horizontem CB, demittatur perpendiculum AB, & ex centro D, globi ad planum AC, ducatur recta DE, perpendiculo AB, parallela quæ exponat vim gravitatis acceleratricem quâ globus ſecundum directionem DE, horizonti perpendicularem urgetur; vis illa, DE, in duas vires reſolvatur (41), quarum altera DF, ſit ad planum AC, normalis quæ proindè tota plano ſuſtinetur, altera verò DK, ſeu FE, plano parallela quâ ſolâ globus ad motum ſecundum directionem plani AC, ſollicitatur, & erit vis acceleratrix juxtà plani inclinati directionem agens, ad vim acceleratricem perpendiculariter ſollicitantem, ut EF, ad DE; ſed quoniam triangula EFD, ABC, ob parallelas DE, AB, & angulos rectos F & B, æquales, ſimilia ſunt, eſt FE : DE = AB : AC. Vis igitur acceleratrix gravitatis ſecundum directionem plani inclinati AC, eſt ad vim gravitatis acceleratricem ſecundum directionem horizonti perpendicularem, ut plani inclinati altitudo AB, ad ipſius longitudinem AC. Q. e. D.

76. Coroll. I .... Quoniam vis acceleratrix gravitatis juxtà directionem DE, horizonti perpendicularem conſtans eſt (26), & vis acceleratrix FE, ſecundum directionem plani inclinati AC, eſt ad vim DE, in ratione datâ AB, ad AC; vis acceleratrix FE, conſtans quoque erit; ea igitur omnia quæ de motibus vi acceleratrice conſtanti genitis demonſtrata ſunt, transferre licet ad motus vi gravitatis acceleratrice in plano inclinato productos; nempe. 1°. Grave per planum inclinatum motu uniformiter accelerato deſcendit, & motu uniformiter retardato aſcendit (25). 2°. Velocitates ſunt ut tempora quibus acquiruntur (25); ſpatia è quiete cadendo deſcripta ſunt in ratione duplicatâ temporum quibus percurruntur, item-

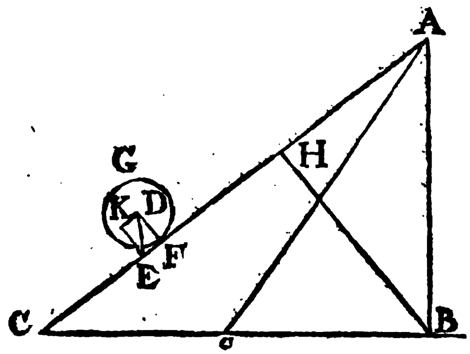
laria duo prima *Galilæus* invenit deſcenſum gravium eſſe in duplicata ratione temporis, & motum projectilium fieri in parabola; conſpirante experientia, niſi quatenus motus illi per aëris reſiſtentiam aliquantulum retardantur. Corpore cadente gravitas uniformis, ſingulis temporis particulis æqualibus æqualiter agendo imprimit vires æquales in corpus illud, & velocita-

que velocitatum quæ his temporibus acquiruntur; tempora verò itemque velocitates ſunt in ratione ſubduplicatâ ſpatiorum (27, 28). 3°. Spatium à gravi in plano inclinato percurſum ab initio motûs computatum, dimidium eſt illius quod eodem tempore ab eodem mobili uniformiter percurri poteſt cum velocitate ultimò acquiſitâ (29).

77. Coroll. 2. Quia vires acceleratrices conſtantes ſunt inter ſe in ratione velocitatum, quas eodem tempore producunt (13), velocitas lapſu perpendiculari per A B, acquiſita erit ad velocitatem eodem tempore in plano inclinato acquiſitam, ut longitudo plani, A C, ad ipſius altitudinem A B (75).

78. Coroll. 3. Si ex puncto B, perpendiculi A B, ad planum inclinatum agatur perpendicularis B H; ſpatium A H, in plano inclinato eodem tempore percurritur, quo lapſu perpendiculari deſcribitur A B; nam ob ſimilitudinem triangulorum A H B, A B C; A H : A B = A B : A C, adeóque A H, eſt ad A B, ut velocitas in plano inclinato acquiſita ad velocitatem, eodem tempore in perpendiculo A B, acquiſitam (77). Sed velocitates motu uniformiter accelerato acquiſitæ, ſunt ut dupla ſpatia, ſeu, quod idem eſt, ut ſpatia eodem tempore percurſa (76); ergò A H, A B, ſunt ſpatia eodem tempore percurſa.

79. Coroll. 4. Tempus quo planum A C percurritur, eſt ad tempus quo percurritur ipſius altitudo A B, ut longitudo plani A C, ad ejus altitudinem A B; tempus enim per A C, eſt ad tempus per A H, in ratione ſubduplicatâ A C, ad A H (76). Sed ob continuam rectarum A C, A B, A H, analogiam A C, eſt ad A B, in ratione ſubduplicatâ A C, ad A H; tempus igitur per A C, eſt ad tempus per A H, hoc eſt, (78), ad tempus per A B, ut A C, ad A B.



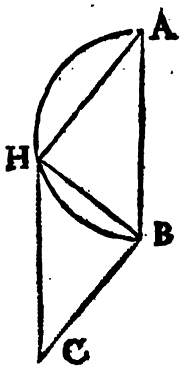
80. Coroll. 5. Cum ſit A C, ad A B, ut tempus per A C, ad tempus per A B; & A c, ad A B, ut tempus per A c, ad tempus per A B (79), tempora quibus percurruntur diverſa plana A C, A c, ejuſdem altitudinis A B, ſunt ut planorum longitudines.

81. Coroll. 6. Celeritates gravium in plano quovis inclinato A C, & in perpendiculo A B, æquales ſunt, ubi gravia ex eâdem altitudine ad eandem rectam horizontalem C B, pervenerint, adeóque velocitates in planis inclinatis A C, A c, ejuſdem altitudinis in C & c, ſunt æquales; eſt enim velocitas in B, ad velocitatem in H, ut A B ad A H (ea enim ſpatia eodem tempore deſcripta ſunt) & ob ſimilitudinem triangulorum A H B, A B C, ſicut A C ad A B: velocitas autem in C, eſt ad velocitatem in H, in ratione ſubduplicatâ A C, ad A H, hoc eſt, ob continuam analogiam rectarum A C, A B, A H, in ratione A C, ad A B; quare velocitas in B, eſt ad velocitatem in H, ut velocitas in C, ad eandem velocitatem in H, adeóque velocitas in C, æqualis eſt velocitati in B.

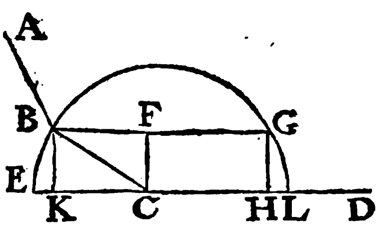
82. Co-

citates æquales generat: & tempore toto vim totam imprimit & velocitatem totam generat tempori proportionalem. Et ſpatia temporibus proportionalibus deſcripta, ſunt ut velocita-
tes

82. Coroll. 7. Tempus deſcenſûs per chordas quaſlibet A H, H B, circuli cujus diameter, A B, eſt ad horizontem perpendicularis, æquale eſt tempori deſcenſûs per totam diametrum A B, ac proinde tempora deſcenſûs per omnes chordas ſunt æqualia; Cum enim angulus A H B, in ſemicirculo rectus ſit, tempus deſcenſûs per A H, æquale eſt tempori deſcenſûs per A B, (78), & ductâ H C, diametro A B, æquali & parallelâ junctâque C B, erit ob angulum H B C, rectum, tempus per H B, æquale tempori per H C, ſeu per A B.



83. Si corpus in curvâ immotâ incedit, vis quâ ſingula curvæ puncta premit, cum vi finitâ quâ movetur corpus comparata, major non eſt quantitate infiniteſimâ primi ordinis; vis ſeu celeritas quam in ſingulis curvæ punctis amittit, major non eſt quantitate infiniteſimâ ſecundi ordinis; tandem vis ſeu celeritas per finitum curvæ arcum amiſſa major non eſt quantitate infiniteſimâ primi ordinis, adeóque corpus in curvâ progreditur eâdem celeritate finitâ ac ſi nihil omninò virium amitteret....

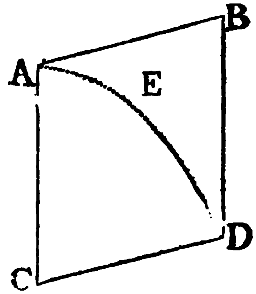


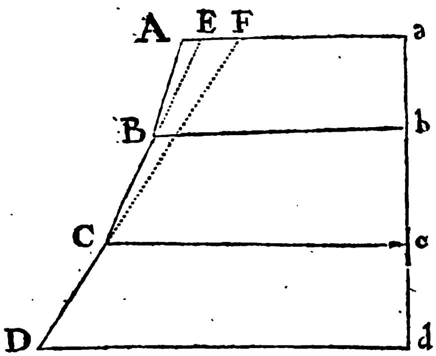
Dem.... Curva quælibet, ut notum eſt, conſiderari poteſt tanquam polygonum A B C D, ex innumeris atque infiniteſimis lateribus rectis A B, B C, C D, compoſitum, quorum duo quævis B C, C D, angulum comprehendunt à duobus angulis rectis, nonniſi quantitate infiniteſimâ deficientem, ità ut producto latere C D, in E, angulus externus B C E, ſit infiniteſimus. Centro C, & radio C B, deſcribatur ſemicirculus E B G L, ex puncto B verò demittatur in rectam E D, perpendicularis B K, & completo rectangulo K F, motus corporis latere B C, expoſitus, in binos B K, B F, ſeu K C, reſolvitur (coroll. 1. Newt.). His poſitis manifeſtum eſt (51) vim ſeu celeritatem quâ corpus in latus C D, incurrit, illudque premit ſeu percutit, perpendiculari F C, ſive B K, repræſentari; celeritatem poſt ictum, (ſupponendo corpora eſſe elaterio deſtituta) rectâ K C, ſeu C H, exhiberi, & celeritatem ex impactu in C, amiſſam rectâ E K, exponi, cum E K, ſit differentia rectarum B C, K C; hoc eſt, celeritatum ante & poſt impactum. Jam ſi angulus B C K, finitæ quantitatis eſſet, recta B K, finitam haberet ad rectas B C, K C, rationem, quæ decreſcente angulo B C K, ſemper minuitur adeóque infiniteſima evadit, dum angulus B C K eſt infiniteſimus; eſt igitur B K, ſeu vis quâ corpus curvam premit in C, quantitas non major infiniteſimâ primi ordinis; verùm quia in circulo E K : B K = B K : K L, erit E K, quantitas infiniteſima reſpectu B K, quemadmodum, ex demonſtratis B K, infiniteſima eſt reſpectu B C, aut K C, adeóque reſpectu K L; ergò celeritas ſeu vis in puncto C amiſſa non ſuperat quantitatem infiniteſimam ſecundi ordinis. Quarè cùm velocitas quam corpus per ſingula curvæ latera A B, B C, C D, amittit, non excedat quantitatem infiniteſimam ſecundi ordinis, per latera curvæ numero infinita, hoc eſt, per arcum curvæ finitum, non poteſt celeritatem amittere majorem quantitate infiniteſimâ primi ordinis quæ eſt ſumma quantitatum infiniteſimarum ſecundi ordinis; eâ igitur quantitate neglectâ, corpus eodem modo motum ſuum in curvâ continuat ac ſi nihil virium amiſiſſet. Q. e. D.

84. Si

AXIOMATA, SIVE

tes & tempora conjunctim; id eſt in duplicata ratione temporum. Et corpore ſurſum projecto gravitas uniformis vires imprimit & velocitates aufert temporibus proportionales; ac tempora aſcendendi ad altitudines ſummas ſunt ut velocitates auferendæ, & altitudines illæ ſunt ut velocitates ac tempora conjunctim: ſeu in duplicata ratione velocitatum. Et corporis ſecundum rectam quamvis projecti motus à projectione oriundus cum motu à gravitate oriundo componitur. Ut ſi corpus *A* motu ſolo projectionis dato tempore deſcribere poſſet rectam *A B* & motu ſolo cadendi eodem tempore deſcribere poſſet altitudinem *A C*: compleatur parallelogrammum *ABDC*, & corpus illud motu compoſito reperietur in fine temporis in loco *D*; & curva linea *A E D*, quam corpus illud deſcribet, erit parabola quam recta *A B* tangit in *A*, & cujus ordinata *B D* eſt ut *A B q*. Ab iiſdem legibus & corollariis pendent demonſtrata de





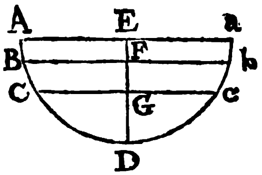
84. Si grave ex quiete in A, per plana contigua A B, B C, C D, deſcendat, & flexus ſeu anguli B, C, motui non officiant, velocitas gravis per plana inclinata deſcendentis, æqualis eſt velocitati quam lapſu perpendiculari haberet in pari ab horizonte diſtantiâ .... Dem.... Ductis rectis A a, B b, C c, D d, horizonti parallelis & perpendiculo, a d, demiſſo, producantur C B, D C, donec occurrant rectæ A a, in E & F; velocitas lapſu per A B, acquiſita æqualis eſt velocitati quæ acquireretur lapſu per E B, aut etiam per A B, (81), adeóque cum flexus B, motui non officiat (per hyp.) grave motum ſuum per planum B C, eodem modo continuat, ac ſi ex puncto E, per planum unicum E C, deſcendiſſet; eſt igitur velocitas in C, æqualis velocitati lapſu perpendiculari per, a c, acquiſitæ. Similiter oſtenditur velocitatem in D æqualem eſſe velocitati in d. Q. e. D.

85. Augeatur planorum numerus, & ſingulorum longitudo minuatur in infinitum ut linea A B C D curva evadat, & quia anguli B, C, D, velocitati corporis non officiunt (83), manifeſtum eſt gravis per curvam deſcendentis velocitatem in ſingulis curvæ punctis B, C, D, æqualem eſſe velocitati lapſu perpendiculari acquiſitæ in punctis correſpondentibus b, c, d.

86. Si

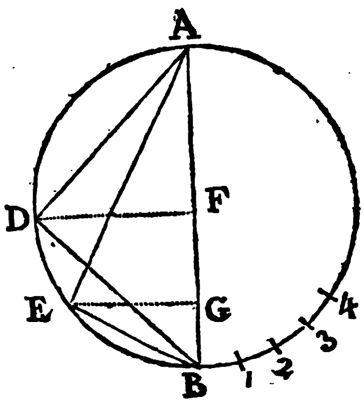
de temporibus oſcillantium pendulorum, ſuffragante horologiorum experientiâ quotidianâ: Ex his iiſdem & lege tertiâ *Chriſtophorus Wrennus* Eques auratus, *Johannes Wallisius S. T. D.* & *Chriſtianus Hugenius*, ætatis ſuperioris geometrarum facile principes, regulas congreſſuum & reflexionum durorum corporum ſeorſim invenerunt, & eodem fere tempore cum *Societate Regiâ* communicarunt, inter ſe (quoad has leges) omnino conſpirantes: & primus quidem *Wallisius*, deinde *Wrennus* & *Hugenius* inventum prodiderunt. Sed & veritas comprobata eſt à *Wrenno* coram *Regiâ Societate* per experimentum pendulorum: quod etiam

Leges Motus.



86. Si grave deſcendat per curvam quamlibet A B C D, ductis lineis A a, B b, C c, horizonti parallelis, & ex puncto curvæ infimo D, rectâ D E, ad horizontem normali, patet (85) gravis per arcum A D, vel a D, deſcendentis eandem eſſe velocitatem in punctis æquè altis B & b, C & c. Quarè cum ex A, pervenit ad punctum infimum D, ex impetu per lapſum acquiſito aſcendit per arcum D a, ad punctum a, æquè altum, in quo omnis velocitas extinguitur, & in punctis correſpondentibus B & b, C & c, eandem tam in aſcenſu quam in deſcenſu habet velocitatem (26). Si verò arcus D a, arcui D A, ſimilis & æqualis fuerit, ſinguli arcus æquè alti C D & D c, B D & D b, A D & D a, æqualibus reſpectivè temporibus percurruntur (26).

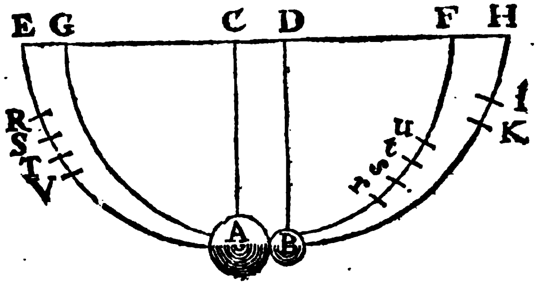
87. Velocitas gravis per quemvis circuli arcum E B, deſcendentis in puncto infimo B, eſt ad velocitatem quam lapſu perpendiculari per totam diametrum A B acquireret, ut chorda E B, ad diametrum A B..... Dem... Ductâ E G, horizonti parallelâ adeóque ad diametrum A B, perpendiculari, velocitas per arcum E B, acquiſita, æqualis eſt velocitati acquiſitæ per G B (85). Eſt ergò ad velocitatem per A B, acquiſitam in ratione ſubduplicatâ G B, ad A B (28). Sed



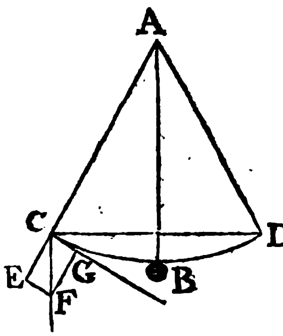
propter triangula rectangula ſimilia A E B, B G E, G B : E B = E B : A B, adeóque E B, ad A B, in ratione ſubduplicatâ G B ad A B; velocitas igitur per arcum E B, acquiſita in B, eſt ad velocitatem per A B, acquiſitam ut chorda E B, ad diametrum A B. Q. e. D.

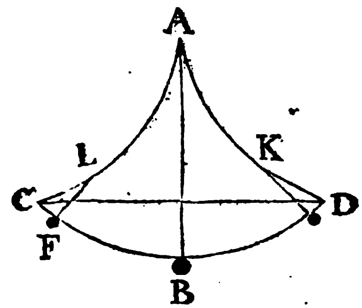
88. Coroll. Ductâ quâvis alterâ chordâ D B, erit etiam velocitas per arcum D B, acquiſita in B, ad velocitatem per diametrum A B, ut D B, ad A B, ac proindè velocitates per arcus D B, E B, acquiſitæ in puncto infimo B, ſunt inter ſe ut horum arcuum chordæ; undè ſi capiantur arcus B 1, B 2, B 3, B 4, quorum chordæ ſint reſpectivè ut 1. 2. 3. 4. velocitas gravis per arcus illos deſcendentis in puncto B, erunt ut 1. 2. 3. 4.

etiam *Clariſſimus Mariottus* libro integro exponere mox dignatus eſt. Verùm, ut hoc experimentum cum theoriis ad amuſſim congruat, habenda eſt ratio, cùm reſiſtentiæ aëris, tum etiam vis elaſticæ concurrentium corporum. Pendeant corpora ſphærica *A*, *B* filis parallelis & æqualibus *A C*, *B D*, à centris *C*, *D*. His centris & inter-



89. Si pendulum B, circa punctum fixum A, rotetur, & globus B, filo A B, appenſus inſtar puncti conſideretur, arcum circuli C B D, deſcribet, idemque globo huic motus accidet ac ſi in ſuperficie ſphæricâ immotâ & perfectè lævigatâ ſublato filo volveretur . . . . Dem . . . Ad punctum C, adducatur globus B, & exindè demittatur; & recta C F, horizonti perpendicularis vim gravitatis acceleratricem in perpendiculo exponat; ea vis reſolvatur in duas vires, quarum una exhibeatur rectâ C E, ad arcum ſeu tangentem in C, perpendiculari; altera verò tangente C G; vis C E, quâ filum A C, directè trahitur ad globi motum nihil confert & ſolâ vi ut C G, urgetur; arcus verò C B D, conſiderari poteſt ut polygonum cujus latus unum in C, poſitionem habet tangentis C G, & ſi globus per planum C G, vi gravitatis urgeatur, ſublato filo vis C E, plano C G, tota ſuſtinetur, & globus ſolâ vi C G, ad motum in plano C G, ſollicitatur. Cum igitur idem in omnibus punctis arcûs C B D, eodem modo demonſtrari poſſit, patet filum A C, ſuperficiei C B D, vices ſubire, & in utroque caſu motum globi per arcum C B D, eâdem ratione perfici. Q. e. D.





90. Coroll. 1. Pendulum A B, inter duas laminas curvas A L C, A K D, immotas & ſeſe contingentes in A, ità oſcilletur ut filum A B, in ſitu ad horizontem perpendiculari utramque laminam tangat in A; dum verò oſcillatur pendulum, curvis laminis filum circumplicetur eaſque perpetuò tangat ut in L & K; per hanc fili ad laminas applicationem continuò impeditur motus penduli in circulo, aliamque curvam C B D, deſcribere cogitur; & eodem quo uſi fuimus ratiocinio (89), demonſtratur pendulum in hac curvâ eodem modo moveri ac ſi grave B, liberè & abſque filo per curvam immotam & perfectè lævigatam C B D, incederet.

91. Coroll. 2. Quapropter omnia quæ de motu gravium in curvis ſuperficiebus demonſtrata fuere, motui penduli per eaſdem curvas oſcillantis conveniunt. Nempe 1°. Penduli velocitas ſemper æqualis eſt velocitati quam acquireret cadendo per altitudinem perpendicularem arcui percurſo correſpondentem (85). 2°. Pendulum ex C demiſſum, vi gravitatis urgen-

ſo

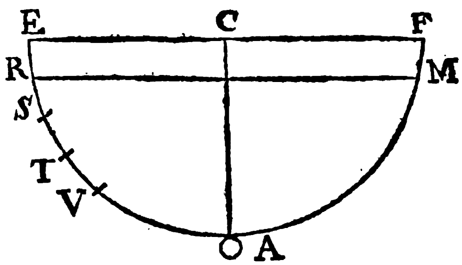
intervallis deſcribantur ſemicirculi *EAF*, *GBH* radiis *CA*, *DB* biſecti. (b) Trahatur corpus *A* ad arcûs *EAF* punctum quodvis *R*, & (ſubducto corpore *B*) demittatur inde, redeatque poſt unam oſcillationem ad punctum *V*. Eſt *RV* retardatio ex reſiſtentia aeris. Hujus *RV* fiat *ST* pars quarta ſita in medio, ita ſcilicet ut *RS* & *TV* æquentur, ſitque *RS* ad *ST* ut 3 ad 2. Et iſta *ST* exhibebit retardationem in deſcenſu ab *S* ad *A* quam proximè. Reſtituatur corpus *B* in locum ſuum. Cadat corpus *A* de puncto *S*, & velocitas ejus in loco reflexionis *A* ſine errore ſenſibili tanta erit, ac ſi in vacuo cecidiſſet de loco *T*. Exponatur igitur LEGES MOTUS.

te ad punctum infimum B, deſcendet, & ex impetu concepto, per arcum B D, aſcendet ad eandem altitudinem D, ibique omni velocitate amiſsâ, vi gravitatis impellente ad punctum infimum B, relabetur, amiſſamque recuperans velocitatem redibit ad punctum C, atque ità continuas oſcillationes itu & reditu in curvâ C B D, perficiet (86).

92. Coroll. 3. Si nulla foret medii reſiſtentia, nullaque circà laminas incurvatas aut centrum rotationis frictio, æquales & perpetuæ forent pendulorum oſcillationes; verùm has ob cauſas ſingulis vibrationibus, licet inſenſibiliter, minuitur penduli velocitas, arcuſque continuò breviores deſcribit ac tandem omninò quieſcit.

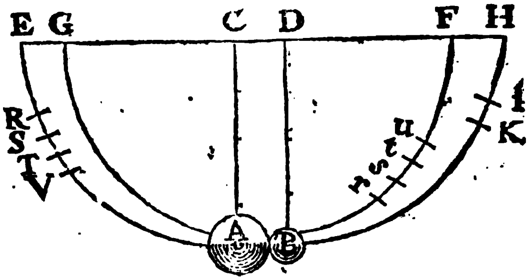
93. Coroll. 4. Velocitates ejuſdem penduli in circuli peripheriam excurrentis, ſunt in puncto infimo ut arcuum deſcriptorum chordæ (88).

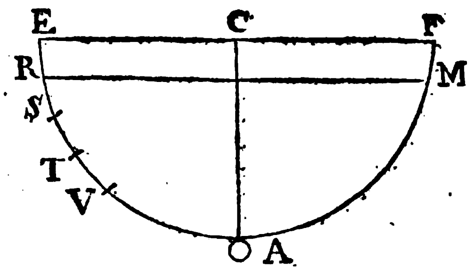
(b) 94. Trahatur corpus A, ad arcûs E A F, punctum quodvis R, & demittatur indè, ſublatâ medii réſiſtentiâ ad eandem altitudinem M, aſcendere & rurſus ad punctum R, redire debet (92). Cum autem poſt unam oſcillationem ex itu & reditu compoſitam perveniat (ex hyp.) ad punctum V, arcus R V exponet medii retardationem in duplici aſcenſu & deſcenſu; quarè ut habeatur medii retardatio in uno tantum deſcenſu ſumenda eſt quarta pars totius retardationis id eſt quarta pars arcus R V, dummodo ille deſ-



cenſus neque ex puncto ſupremo R neque ex infimo V ordiatur, nam cum major ſit medii retardatio in arcu majori quam in minori, ſemperque fiant minores arcus à pendulo oſcillante deſcripti, inæquales quoque erunt retardationes in ſingulis arcubus, & retardatio deſcenſus per R A, major erit quartâ parte totius retardationis R V ut retardatio ultimi aſcenſus A V, minor erit quartâ parte totius retardationis R V. Hoc autem aut ſimili calculo determinavit Newtonus punctum S tale ut retardatio in deſcenſu per S A ſit quarta pars totius retardationis R V. Dicatur arcus R A, 1, arcus R V, 4 *b*, arcus quæſitus S A *x*; ſintque retardationes arcubus deſcriptis proportionales, erit arcus S A (*x*) ad arcum R A (1) ut retardatio arcus S A quæ ſtatuitur eſſe *b*, ſeu quarta pars totius R V, ad retardationem primi arcus R A quæ erit *b* : *x*. Quærantur ſucceſſivè

tur hæc velocitas per chordam arcus *T A*. Nam velocitatem penduli in puncto infimo eſſe ut chordam arcûs, quem cadendo deſcripſit, propoſitio eſt geometris notiſſima. Poſt reflexionem perveniat corpus *A* ad locum *s*, & corpus *B* ad locum *k*. Tollatur corpus *B* & inveniatur locus *v*; â quo ſi corpus *A* demittatur & poſt unam oſcillationem redeat ad locum *r*, ſit *s t* pars quarta ipſius *r v* ſita in medio, ita videlicet ut *r s* & *t v* æquentur; & per chordam arcus *t A* exponatur velocitas, quam corpus *A* proxime poſt reflexionem habuit in loco *A*. (c) Nam *t* erit locus ille verus & correctus, ad quem corpus *A*, ſublatâ aeris reſiſtentiâ, aſcendere debuiſſet. Simili methodo corrigendus erit locus *k*, ad quem corpus *B* aſcendit, & inveniendus locus *l*, ad quem corpus illud aſcen-





ſivè retardationes ſecundi, tertii, quartive arcus eâdem ratione; arcus autem ſecundus eſt æqualis primo R A, dempta ejus retardatione *b* : *x*. Tertius arcus æqualis ſecundo demptâ ejus retardatione, & ſic deinceps, omnes verò illæ retardationes ſimul ſumptæ æquabuntur toti retardationi R V ſeu 4 *b*; unde fit æquatio ex quâ valor arcus S A, ſeu *x*, obtinebitur, per approximationem autem invenietur æqualis 1—[illegible] . ; ſumatur itaque R S æqualis quartæ parti cum ejus ſemiſſe totius retardationis R V, retardatio per arcum S A erit æqualis S T quartæ parti totius retardationis R V, ideòque cadat corpus ex puncto S, ejus celeritas in A eadem eſt ſine errore ſenſibili, ac ſi in vacuo decidiſſet ex T.

(c) 95. t, (fig. Newt.), erit locus verus & correctus ad quem corpus A, ſublatâ aëris reſiſtentiâ aſcendere debuiſſet; nam corpus A, ex t, in medio non reſiſtente deſcendens, in puncto infimo A, eam haberet velocitatem quâ poſſet arcum A t, aſcendendo deſcribere (91), & quâ ob aëris reſiſtentiam, nonniſi arcum A s, (94) percurreret, ergò cum poſt reflexionem aſcendat ad s, eam habet in A velocitatem, quâ in medio non reſiſtente ad punctum t aſcenderet.

96. Ex-

aſcendere debuiſſet in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia, perinde ac ſi in vacuo conſtituti eſſemus. Tandem ducendum erit corpus *A* (ut ita dicam) in chordam arcûs *TA*, quæ velocitatem ejus exhibet, ut habeatur motus ejus in loco *A* proximè ante reflexionem; deinde in chordam arcus *t A*, ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime poſt reflexionem. Et ſic corpus *B* ducendum erit in chordam arcûs *B l*, ut habeatur motus ejus proximè poſt reflexionem. Et ſimili methodo, ubi corpora duo ſimul demittuntur de locis diverſis, inveniendi ſunt motus utriuſque tam ante, quam poſt reflexionem; & tum demum conferendi ſunt motus inter ſe & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis ampliſſimis, putà pedum octo vel duodecim vel ſexdecim, concurrerent; reperi ſemper ſine errore trium digitorum in menſuris, ubi corpora ſibi mutuo directè occurrebant, æquales eſſe mutationes motuum corporibus in partes contrarias illatæ, atque ideo actionem & reactionem ſemper eſſe æquales. Ut ſi corpus *A* incidebat in corpus *B* quieſcens cum novem partibus motûs, & amiſſis ſeptem partibus pergebat poſt reflexionem cum duabus; corpus *B* reſiliebat cum partibus iſtis ſeptem. Si corpora obviam ibant, *A* cum duodecim partibus & *B* cum ſex, & redibat *A* cum duabus; redibat *B* cum octo, factâ detractione partium quatuordecim utrinque. De motu ipſius *A* ſubducantur partes duodecim & reſtabit nihil: ſubducantur aliæ partes duæ, & fiet motus duarum partium in plagam contrariam: & ſic de motu corporis *B* partium ſex ſubducendo partes quatuordecim, fient partes octo in plagam contrariam. Quod ſi corpora ibant ad eandem plagam, *A* velocius cum partibus quatuordecim, & *B* tardius cum partibus quinque, & poſt reflexionem pergebat *A* cum quinque partibus; pergebat *B* cum quatuordecim, facta tranſlatione partium novem de *A* in *B*. Et ſic in reliquis. A congreſſu & colliſione corporum nunquam mutabatur quantitas motus, quæ ex ſummâ motuum con-

AXIOMATA, SIVE

ſpirantium & differentiâ contrariorum colligebatur. Nam errorem digiti unius & alterius in menſuris tribuerim difficultati peragendi ſingula ſatis accuratè. Difficile erat, tum pendula ſimul demittere ſic, ut corpora in ſe mutuo impingerent in loco infimo *A B*; tum loca *s*, *k* notare, ad quæ corpora aſcendebant poſt concurſum. Sed & in ipſis corporibus pendulis inæqualis partium denſitas, & textura aliis de cauſis irregularis, errores inducebant.

Porro nequis objiciat regulam, ad quam probandam inventum eſt hoc experimentum, præſupponere corpora vel abſolutè dura eſſe, vel ſaltem perfectè elaſtica, cujuſmodi nulla reperiuntur in compoſitionibus naturalibus; (d) addo quod experimenta jam deſcripta ſuccedunt in corporibus mollibus æque ac in duris, nimirum à conditione duritiei neutiquam pendentia. Nam ſi regula illa in corporibus non perfectè duris tentanda eſt, debebit ſolummodo reflexio minui in certâ proportione pro quantitate vis elaſticæ. In theoriâ *Wrenni* & *Hugenii* corpora abſolutè dura redeunt ab invicem cum velocitate congreſſus. (e) Certius id affirmabitur de perfectè elaſticis. (f) In imperfectè elaſticis velocitas reditus minuenda eſt ſimul cum vi elaſticâ; propterea quod vis illa, (niſi ubi partes corporum ex congreſſu læduntur, vel extenſionem aliqualem quaſi ſub

(d) 96. Experimenta jam deſcripta ſuccedunt in corporibus mollibus & non elaſticis æquè ac in duris & elaſticis, ut potè non à conditione duritiei & elaſticitatis, ſed tantum ab actionis & reactionis æqualitate & oppoſitione pendentia; nam ſi regula illa in corporibus non perfectè elaſticis tentanda eſt, ut ex ipſorum motibus antè conflictum inveniantur motus poſt conflictum, debebit ſolum modò reflexio minui in certâ proportione, pro quantitate vis elaſticæ (52).

(e) 97. Certius id affirmabitur de perfectè elaſticis; corpora enim perfectè dura ſeu quorum partes nullâ vi finitâ ſeparari aut flecti poſſunt, nullâ quoque vi reſtitutivâ aut repulſivâ pollere videntur; adeóque cum nihil ſine causâ fiat, corporum perfectè durorum concurrentium nulla videtur eſſe poſſe reflexio.

(f) 98. In imperfectè elaſticis, velocitas reditûs minuenda eſt cum vi elaſticâ, proptereà quod vis illa, licet imperfecta, certa tamen ac determinata eſt, in iiſdem corporibus, niſi ubi partes corporum ex congreſſu læduntur, vel extenſionem aliqualem quaſi ſub malleo patiuntur; dum enim corporis elaſtici fibræ ex ictu flectuntur, ſi aliqua abrumpatur fibra, ea non ſeſe reſtituit, adeóque vis corporis reſtitutiva minuitur; ſi verò fibræ extendantur, ut ferri lamina repetitis mallei ictibus in longum diducitur, pars ictûs huic fibrarum extenſioni adhibita, vi reſtitutivæ detrahitur. His cauſis addi poteſt inteſtinus partium corporis percuſſi motus ſon

ſub malleo patiuntur,) certa ac determinata ſit (quantum ſentio) faciatque ut corpora redeant ab invicem cum velocitate relativâ, quæ ſit ad relativam velocitatem concurſus in datâ ratione. Id in pilis ex lanâ arctè conglomeratâ & fortiter conſtrictâ ſic tentavi. Primum demittendo pendula & menſurando reflexionem, inveni quantitatem vis elaſticæ; deinde per hanc vim determinavi reflexiones in aliis caſibus concurſuum, & reſpondebant experimenta. Redibant ſemper pilæ ab invicem cum velocitate relativâ, quæ eſſet ad velocitatem relativam concurſus ut 5 ad 9 circiter. Eadem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe: aliæ ex ſubere cum paulo minore: in vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atque hoc pacto lex tertia quoad ictus & reflexiones per theoriam comprobata eſt, quæ cum experientiâ plane congruit.

LEGES MOTUS.

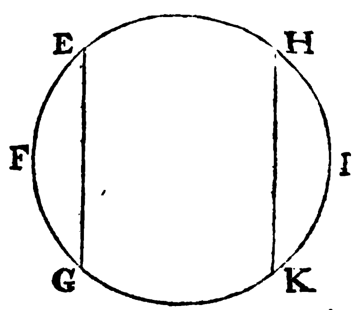
In

ſono ipſo ſatis indicatus, qui in reflexionem non impenditur. Hæc materia variis Rizzeti experimentis illuſtratur in Commentariis inſtituti Bononienſis. Tria globulorum vitreorum paria ſibi paravit Rizzetus; globuli primi paris diametrum habebant trium unciarum, ſecundi duarum, tertii unius, ità ut eſſent diverſorum parium diametri inter ſe, ut 3. 2. 1. fecit ut globuli primi paris filo appenſi ſimul congrederentur, notavitque velocitatem reſpectivam quam habuerunt vel antè vel poſt ictum, detractâ tamen more Newtoniano aëris reſiſtentiâ; idemque tentavit tum in 2°. tum in 3°. pari. In 1°. globulorum pari cum velocitas reſpectiva antè ictum fuiſſet 11, fuit poſt ictum 10; in 2°. pari cum fuiſſet antè ictum 16, fuit poſt ictum 15; in 3°. pari cum fuiſſet antè ictum 31; fuit poſt ictum 30. Undè velocitatis reſpectivæ defectus erat in primo pari 1:11. in 2°. pari 1:16. in 3°. pari 1:31; illi autem defectus ſunt fere diametris 3, 2, 1. proportionales. Aliud experimentum tentavit Rizzetus. Chordam calybeam duos pedes longam horizontaliter poſitam variis modis tendebat, donec tandem repererit tres chordæ tenſiones, quæ efficerent ut tempora quibus chorda pulſa ſeſe reſtituebat, forent ut 3. 2. 1. Eas autem tenſiones ſe aſſecutum eſſe ex graviori vel acutiori chordarum ſono intelligebat; in ſingulis tenſionibus globum eburneum cujus diameter erat duarum unciarum, filo decem pedes longo appenſum & in medio tantiſper complanatum in chordam demittebat, & detractâ aëris reſiſtentiâ, velocitatem reſpectivam ante & poſt ictum notabat. Obſervavit autem velocitatem antè ictum eſſe ad velocitatem poſt ictum, ut 11, ad 10, in 1â tenſione, cum chorda pulſa reſtitueretur tempore 3; ut 16 ad 15 in 2â tenſione, cum chorda reſtitueretur tempore 2; tandem ut 31, ad 30, in 3â tenſione, cum chorda reſtitueretur tempore 1; undè concludit defectus ſingulos velocitatis poſt ictum, temporibus reſtitutionum eſſe proportionales. Manente igitur corporum homogeneorum magnitudine & figurâ, conſtans obſervatur ratio velocitatis reſpectivæ poſt ictum ad velocitatem reſpectivam antè ictum; ſed mutatâ magnitudine, experimenta Rizzeti oſtendunt defectus velocitatis reſpectivæ poſt ictum in globis homogeneis eſſe in ratione diametrorum, aut etiam in ratione temporum quibus globi compreſſi reſtituuntur.

99. Si

In attractionibus rem ſic breviter oſtendo. Corporibus duobus quibuſvis *A*, *B*, ſe mutuo trahentibus, concipe obſtaculum quodvis interponi, quo congreſſus eorum impediatur. Si corpus alterutrum *A* magis trahitur verſus corpus alterum *B*, quam illud alterum *B* in prius *A*, obſtaculum magis urgebitur preſſione corporis *A* quam preſſione corporis *B*; proindeque non manebit in æquilibrio. Prævalebit preſſio fortior, facietque ut ſyſtema corporum duorum & obſtaculi moveatur in directum in partes verſus *B*, motuque in ſpatiis liberis ſemper accelerato abeat in infinitum. Quod eſt abſurdum & legi primæ contrarium. Nam per legem primam debebit ſyſtema perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, proindeque corpora æqualiter urgebunt obſtaculum, & idcirco æqualiter trahentur in invicem. (g) Tentavi hoc in magnete & ferro. Si hæc in vaſculis propriis ſeſe contingentibus ſeorſim poſita, in aquâ ſtagnante juxta fluitent; neutrum propellet alterum, ſed æqualitate attractionis utrinque ſuſtinebunt conatus in ſe mutuos, ac tandem in æquilibrio conſtituta quieſcent.

Sic etiam gravitas inter terram & ejus partes mutua eſt. Secetur terra *F I* plano quovis *E G* in partes duas *E G F* & *E G I*: & æqualia erunt harum pondera in ſe mutuo. Nam ſi plano alio *H K* quod priori *E G* parallelum ſit, pars major *E G I* ſecetur in partes duas *EGKH* & *H K I*, quarum *H K I* æqualis ſit parti prius abſciſſæ *E F G*: manifeſtum eſt quod pars media *E G K H* pondere proprio in neutram partium extremarum propendebit, ſed



(g) 99. Si magnes ſuberis fruſto, ſimiliterque ferrum alio ſuberis fruſto imponantur, ut tam magnes quam ferrum in aquâ liberè ſtagnent, æquali motûs quantitate ſibi mutuo obviam eunt, ità ut eorum celeritates ſint in ratione ponderum reciprocâ; dum verò ad contactum pervenerunt, in æquilibrio conſiſtunt. Quarè hoc experimento manifeſtum eſt æqualem eſſe ferri in magnetem & magnetis in ferrum actionem. Similiter ſi quis in cymbâ aquis innatante poſitus, cymbam alte-

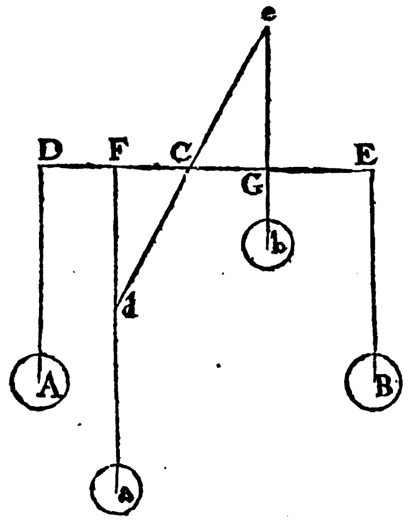
ſed inter utramque in æquilibrio, ut ita dicam, ſuſpendetur, & quieſcet. Pars autem extrema *HKI* toto ſuo pondere incumbet in partem mediam, & urgebit illam in partem alteram extremam *EGF*; ideoque vis quâ partium *HKI* & *EGKH* ſumma *EGI* tendit verſus partem tertiam *EGF*, æqualis eſt ponderi partis *HKI*, id eſt ponderi partis tertiæ *EGF*. Et propterea pondera partium duarum *EGI*, *EGF* in ſe mutuo ſunt æqualia, uti volui oſtendere. Et niſi pondera illa æqualia eſſent, terra tota in libero æthere fluitans ponderi majori cederet, & ab eo fugiendo abiret in infinitum.

Ut corpora in concurſu & reflexione idem pollent, quorum velocitates ſunt reciprocè ut vires inſitæ: (h) ſic in movendis inſtrumentis mechanicis agentia idem pollent & conatibus contrariis ſe mutuo ſuſtinent, quorum velocitates ſecundum determinationem virium æſtimatæ, ſunt reciprocè ut vires. Sic pondera æquipollent ad movenda brachia libræ, quæ oſcillante librâ ſunt reciprocè ut eorum velocitates ſurſum & deorſum: hoc eſt pondera, ſi rectà aſcendunt & deſcendunt, æquipollent, quæ ſunt reciprocè ut punctorum à quibus ſuſpenduntur diſtantiæ ab axe libræ; ſin planis obliquis aliiſve admotis obſtaculis impedita aſcendunt vel deſcendunt obliquè, æquipollent, quæ ſunt reciprocè ut aſcenſus & deſcenſus, quâtenus facti ſecundum perpendiculum: idque ob determinationem gravitatis deorſum. Similiter in trochlea ſeu polyſpaſto vis manûs funem directè trahentis, quæ ſit ad pondus vel directè vel obliquè aſcendens ut velocitas aſcenſus perpendicularis ad velocitatem manus funem trahentis, ſuſtinebit pondus. In horologiis & ſimilibus inſtrumentis, quæ ex rotulis commiſſis conſtructa ſunt, vires contrariæ ad motum rotularum promovendum

alteram liberè fluitantem ope funis trahat, vel conto aliove inſtrumento repellat, cymbæ in partes contrarias cum æquali motûs quantitate ferentur, ità ut earum velocitates ſint in ratione reciprocâ ponderum.

(h) 100. In movendis inſtrumentis mechanicis, agentia idem pollent & conatibus contrariis ſe mutuo ſuſtinent, quorum velocitates ſecundùm directionem virium æſtimatæ ſunt reciprocè ut vires abſolutæ.... Dem.....

dum & impediendum, ſi ſunt reciprocè ut velocitates partium rotularum in quas imprimuntur, ſuſtinebunt ſe mutuò. (i) Vis cochleæ ad premendum corpus eſt ad vim manûs manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii eâ in parte ubi à



Duæ potentiæ, ſeu, quod idem eſt, duo pondera ope machinæ cujuſvis datæ in ſe mutuò ità agant, ut pondus unum ſecundum propriam directionem moveri nequeat, quin pondus alterum contrà propriam illius directionem rapiat; ſi loco machinæ datæ ſubſtituatur vectis cujus longitudo & hypomoclion talia ſint, ut duo pondera data, vectis extremitatibus appenſa, eâdem celeritate ac in machinâ datâ ſeſe mutuò moveant, iidem erunt in vecte & in machinâ datâ conatus ponderum in ſe mutuò, eadem ipſorum momenta; vis enim eadem requiritur ad eandem velocitatem ſecundùm eandem directionem in iiſdem corporibus producendam. Itaque vectis D E, horizontalis, cum appenſis ponderibus A & B, rotetur circa hypomoclion C, ut ſitum d e, obtineat, & producatur filum a d, uſque ad F; pondus A, ſecundum propriam directionem percurrit ſpatium F d; & pondus B, contrà propriam directionem eodem tempore percurrit ſpatium G e; adeóque horum ponderum velocitates ſunt ſemper ut ſpatia F d, G e, eodem tempore percurſa. Momentum ponderis a, eſt ut a × F C; momentum ponderis b, eſt ut b × C G (47). Sed ob ſimilitudinem triangulorum F C D, e C G; F C : C G = F d : G e. Ergò momenta ponderum a & b, ſunt inter ſe ut a × F d, & b × G e; ſeu ſunt ut facta ex ponderibus in ſua reſpectivè ſpatia eodem tempore percurſa, adeóque etiam ut facta ex ponderibus in ſuas reſpectivè velocitates; quarè ſi facta illa æqualia ſint, aut quod idem eſt, ſi pondera ſeu vires ſint reciprocè ut velocitates ſecundùm directiones virium æſtimatæ, erit æquilibrium. Q. e. D.

101. Coroll. Cum ex demonſtratis, momenta virium ſint ſemper ut facta ex vi quâlibet in ſuam velocitatem, ſeu in ſpatium quod dato tempore ſecundùm propriam directionem ex diſpoſitione machinæ percurrere debet, omnium machinarum vires metiri licet.

(i) 102. Vis cochleæ ad premendum corpus eſt ad vim manûs manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii eâ in parte ubi à manu urgetur, ad velocitatem progreſſivam cochleæ verſus corpus preſſum. Nam ſi reſiſtentia corporis comprimendi ut pondus movendum conſideretur, erit (101) momentum vis manubrium circumagentis, ut factum ex vi illâ in ſuam velocitatem, & momentum reſiſtentiæ ut factum ex reſiſtentiâ in ſuam quoque velocitatem; ut ergò ſit æquilibrium, debet eſſe reſiſtentia ad vim manûs, ut circularis velocitas manûs ad velocitatem reſiſtentiæ, ſive ad velocitatem progreſſivam cochleæ; aut quia manus deſcribit circulum cujus radius eſt manubrii longitudo, è centro cochleæ uſque ad manum ſumpta, dum interea cochlea per altitudinem ſeu diſtantiam duarum helicum progreditur, vis cochleæ ad premendum corpus erit ad vim manûs manubrium

à manu urgetur, ad velocitatem progreſſivam cochleæ verſus corpus preſſum. (k) Vires quibus Cuneus urget partes duas ligni fiſſi ſunt ad vim mallei in cuneum, ut progreſſus cunei ſecundum determinationem vis à malleo in ipſum impreſſæ, ad velocitatem quâ partes ligni cedunt cuneo, ſecundum lineas faciebus cunei perpendiculares. Et par eſt ratio machinarum omnium.

Harum efficacia & uſus in eo ſolo conſiſtit, ut diminuendo velocitatem augeamus vim, & contra: Unde ſolvitur in omni aptorum inſtrumentorum genere problema, *Datum pondus datâ vi movendi*, aliamve datam reſiſtentiam vi datâ ſuperandi. Nam ſi machinæ ita formentur, ut velocitates agentis & reſiſtentis ſint reciprocè ut vires; agens reſiſtentiam ſuſtinebit: & majori cum velocitatum diſparitate (l) eandem vincet. Certè ſi tanta ſit velocitatum diſparitas, ut vincatur etiam reſiſtentia omnis, quæ tam ex contiguorum & inter ſe labentium corporum attritione, quam ex continuorum & ab invicem ſeparandorum cohæſione & elevandorum ponderibus oriri ſolet; ſuperatâ omni eâ reſiſtentiâ, vis redundans accelerationem motus ſibi proportionalem, partim in partibus machinæ, partim in corpore reſiſtente producet. Cæterum mechanicam tractare

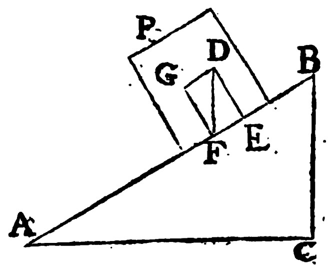
rubrium circumagentis ut peripheria circuli prædicto radio deſcripti ad diſtantiam duarum helicum.

(k) 103. Momentum cunei eſt ut factum (101), ex vi impreſſâ à malleo in cunei velocitatem, ſeu in ſpatium quod dato tempore percurrit cuneus ſecundùm directionem vis à malleo impreſſæ; momentum verò reſiſtentiæ ligni cuneo findendi eſt ut factum ex illâ reſiſtentiâ in velocitatem, quâ partes ligni cedunt cuneo ſecundùm lineas faciebus cunei perpendiculares, juxtà quarum directionem partes ligni à cuneo moventur; eſt etiam momentum reſiſtentiæ ut factum ex reſiſtentiâ ligni in ſpatium quod partes ligni dato tempore deſcribunt, ſecundùm lineas faciebus cunei perpendiculares. Quoniam igitur cuneus agens ſecundùm lineam baſi ipſius perpendicularem, totam ſuam altitudinem percurrit, dum partes ligni totâ baſis cunei latitudine à ſe invicem removentur, erit (in caſu æquilibrii) vis cunei ad ligni reſiſtentiam, ut cunei altitudo ad latitudinem ipſius baſis.

(l) 104. Attritionem ſeu frictionem, aliaſque reſiſtentias ex craſſitie rigiditate & funium flexione ortas in machinis conſiderare neceſſum eſt, graves alioquin in praxi errores naſcerentur.

Hanc difficilem materiam Sturmius, Leibnitius, Amontonius, Parentius, La-Hirius & alii tractarunt. Bulfingerus Tom. 2°. Comment. Acad. Petropol. ad tentandam experimentis frictionum menſuram duo proponit theoremata quæ ob eorum facilitatem & uſum hic exſcribere non abs re erit.

re non eſt hujus inſtituti. Hiſce volui tantùm oſtendere, quàm latè pateat quàmque certa ſit lex tertia motûs. Nam ſi æſtimetur agentis actio ex ejus vi & velocitate conjunctim; & ſimiliter reſiſtentis reactio æſtimetur conjunctim ex ejus partium ſingularum velocitatibus & viribus reſiſtendi ab earum attritione, cohæſione, pondere, & acceleratione oriundis; erunt actio & reactio, in omni inſtrumentorum uſu, ſibi invicem ſemper



Suprà horizontem A C, experimento ſæpius inſtituto, elevetur planum A B, ad angulum B A C, ita ut ſi corpus plano A B, ad hunc angulum elevato imponatur, tantùm non deſcendat; deſcendat autem ſi angulus nonnihil augeatur; & hæreat cum aliquâ adverſus deſcenſum renitentiâ, ſi angulus minuatur. Hic angulus dicitur angulus quietis, eoque invento ſic inferatur.

Uti ſinus totus ad ſinum rectum anguli quietis, ità pondus abſolutum P, ad frictionem ejus ſuper plano ad prædictum angulum inclinato. Atque iterùm,

Uti Radius ad tangentem anguli quietis, ità pondus abſolutum P, ad frictionem ejus ſuper plano horizontali, cùm trahitur in directione ad horizontem parallelâ .... Dem ... Linea D F, horizonti perpendicularis, pondus abſolutum P, ſeu vim totam quâ corpus in perpendiculo deſcendere nititur, exponat; & ductâ D E, ad planum A B, normali; vis D F, in binas vires nempè D E, plano perpendicularem, & E F, ſeu D G, plano parallelam reſolvitur (41); vis D E, à plano A B, etiam perfectè lævigato tota ſuſtinetur, & ſolâ vi D G, ſeu E F, pondus P, nititur juxtà plani directionem deſcendere; Cùm igitur ob frictionem in plano aſpero A B, tantùm non deſcendat, erit frictio æqualis vi E F; eſt itaque pondus abſolutum P, ad frictionem ejus ſuper plano inclinato A B, ut D F, ad F E, hoc eſt, ob angulum E rectum & angulum F D E æqualem angulo quietis B A C, ut ſinus totus ad ſinum anguli quietis. Q. erat 1um.

Jam ut idem transferatur ad planum horizontale, debet vis D E, plano perpendicularis, conſiderari ut pondus abſolutum, & ità planum A B, ſe habebit ut planum horizontale reſpectu ponderis D E; vis autem F E, ſeu frictio conſideranda eſt tanquam vis in æquilibrio conſtituta cum vi æquali trahente pondus D E, ſecundùm directionem plano A B, parallelam; & ob triangulorum F D E, B A C, ſimilitudinem, manifeſtum eſt pondus D E, eſſe ad frictionem E F, ſeu pondus abſolutum in plano horizontali horizontaliter tractum, eſſe ad frictionem ejus, ut Radius ad tangentem anguli quietis. Q. erat 2um.

105. Coroll. In his duobus caſibus, frictiones, cæteris omnibus paribus, ſunt preſſionibus proportionales; nam frictio in plano inclinato dicatur f; in plano horizontali F, & erit per 1um. theor. $P : f = A B : B C$; & per 2um. theorema $P : F = A C ; B C$. ſeu $F : P = B C : A C$; adeóque per compoſitionem rationum $P. F : P. f = A B \times B C : B C \times A C$, ac proindè $F : f = A B : A C = F D : D E$; hoc eſt, frictio in plano horizontali

per æquales. Et quatenus actio propagatur per inſtrumentum & ultimò imprimitur in corpus omne reſiſtens, ejus ultima determinatio determinationi reactionis ſemper erit contraria. LEGES MOTUS.

tali eſt ad frictionem in plano ad angulum quietis, inclinato, ut preſſio in plano horizontali ad preſſionem in plano inclinato.

DE MOTU CORPORUM LIBER PRIMUS.

SECTIO I.

De methodo rationum primarum & ultimarum, cujus ope ſequentia demonſtrantur.

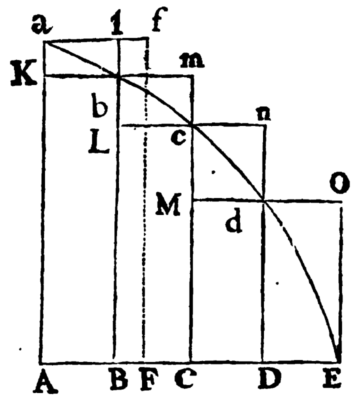
LEMMA I.

Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito conſtanter tendunt, & ante finem temporis illius propiùs ad invicem accedunt quàm pro datâ quavis differentiâ, fiunt ultimò æquales.

SI negas; fiant ultimò inæquales, & ſit earum ultima differentia *D*. Ergo nequeunt propiùs ad æqualitatem accedere quam pro datâ differentiâ *D*: contra hypotheſin.

LEMMA II.

Si in figurâ quâvis A a c E, *rectis* A a, A E *& curvâ* a c E *comprehensâ, inſcribantur parallelogramma quotcunque* A b, B c, C d, &c. *ſub baſibus* A B, B C, C D, &c. *æqualibus, & lateribus* B b, C c, D d, &c. *figuræ lateri* A a *parallelis contenta; & compleantur parallelogramma* a K b l, b L c m, c M d n, &c. *Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes quas habent ad ſe invicem figura inſcripta* A K b L c M d D, *circumſcripta* A a l b m c n d o E, *& curvilinea* A a b c d E, *ſunt rationes æqualitatis.*



Nam

Nam figuræ inſcriptæ & circumſcriptæ differentia eſt ſumma parallelogrammorum *K l*, *L m*, *M n*, *D o*, hoc eſt (ob æquales omnium baſes) rectangulum ſub unius baſi *K b* & altitudinum ([m]) ſumma *A a*, id eſt, rectangulum *A B l a*. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus *A B* in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per lemma 1) figura inſcripta & circumſcripta & multo magis figura curvilinea intermedia fiunt ultimò æquales. *Q. E. D.*

LEMMA III.

Eædem rationes ultimæ ſunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines AB, BC, CD, &c. *ſunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.*

Sit enim *A F* æqualis latitudini maximæ, & compleatur paralle-

(m) 106. Si fuerint quotcumque & cujuſvis generis quantitates decreſcentes, A a, B b, C c, D d, erunt omnium differentiæ ſimul ſumptæ æquales exceſſui maximæ ſuprà minimam. Nam perſpicuum eſt A a − B b + B b − C c + C c − D d = A a − D d: unde ſi ultima ſeriei quantitas ſit o, ut in ſerie A a, B b, C c, D d, o, ſumma differentiarum K a + L b + M c + D d, æqualis erit quantitati maximæ A a.

107. Linea B b, motu ſibi ſemper parallelo accedat ad lineam A a, & interim punctum b, ita moveatur in linea B b, ut ſemper reperiatur in arcu b a; decreſcente linearum A a, B b, diſtantiâ A B, decreſcit quoque earum differentia K a, ac tandem evaneſcente A B, evaneſcit K a, & B b, ſeu A K, fit ultimò æqualis lineæ A a; evaneſcunt autem A B & K a, cum lineæ A a, B b, neque diſtantes, neque prorſus congruentes dici poſſunt, ſed ſimul, ut ita dicam, conjungi incipiunt. In illo ſtatu evaneſcentiæ, linearum A a, B b, differentia K a, minor eſt quâvis lineâ datâ, ſeu infinitè parva eſt, aut inaſſignabilis reſpectu A K & B b; quantitas autem evaneſcens, ſeu infinitè parva, eſt ad quantitatem finitam ut finitum ad infinitum; quare cum notum ſit infinitum ex finiti additione vel ſubtractione non mutari, aut tanquam immutatum haberi poſſe, liquet lineas B b ſeu A K & A a, ſeu A K + K a, pro æqualibus poſſe uſurpari. Similiter, quia evaneſcente K a, trianguli K a b, & parallelogrammi K l, areæ infiniteſimæ ſunt reſpectu parallelogrammi evaneſcentis A b, parallelogrammum iſtud A b, uſurpari poteſt pro parallelogrammo A l, aut etiam pro figurâ A B b a, hoc eſt, pro differentia arearum curvilinearum A E c a, B E c b.

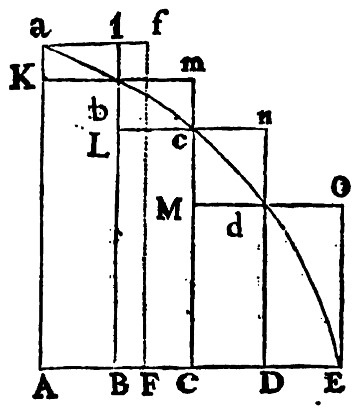
108. Ex his ſequitur diverſos eſſe infiniteſimorum ordines; nam oſtenſum eſt (107) parallelogrammum K l, infiniteſimum eſſe reſpectu parallelogrammi A b, hoc verò parallelogrammum infiniteſimum eſſe reſpectu areæ curvilineæ A E c a.

109. Figura A E c a, circa axem ſuum A E, revolvatur, & quælibet ordinata A a, B b, deſcribet circulum, cujus eſt ordinata ipſa radius, quodlibet rectangulum evaneſcens ut K B, a B, deſcribet cylindrum evaneſcentem, & rectangula, K l, L m, M n, D o, ſingula deſcribent annulos ſolidos, quorum ſumma æqualis erit

De Motu Corporum.

rallelogrammum *FAaf*. (ⁿ) Hoc erit majus quàm differentia figuræ inſcriptæ & figuræ circumſcriptæ; at latitudine ſuâ *AF* in infinitum diminutâ, minus fiet dato quovis rectangulo. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc ſumma ultima parallelogrammorum evaneſcentium coincidit omni ex parte cum figurâ curvilineâ.



Corol. 2. Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evaneſcentium arcuum *ab*, *bc*, *cd*, &c. comprehenditur, coincidit ultimo cum figurâ curvilineâ.

Corol. 3. Ut & figura rectilinea circumſcripta quæ tangentibus eorumdem arcuum comprehenditur.

Corol. 4. (°) Et propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros *acE*,) non ſunt rectilineæ, ſed rectilinearum limites curvilinei.

LEMMA IV.

Si in duabus figuris AacE, PprT, *inſcribantur (ut ſupra) duæ parallelogrammorum ſeries, ſitque idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ*

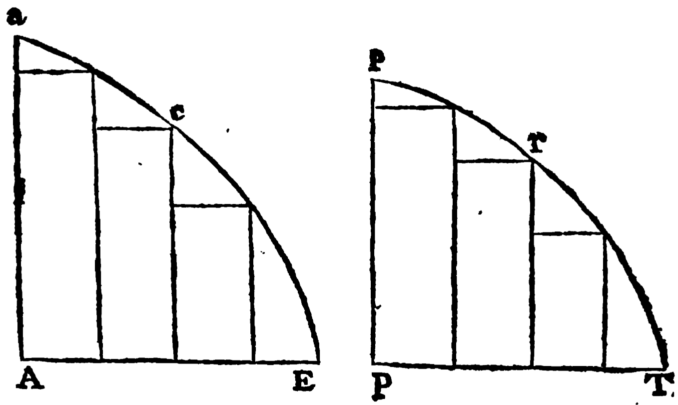
erit cylindro ex rotatione rectanguli A l deſcripto. Quare cum hic cylindrus ſit infiniteſimus, patet (per lemma 1) ultimam rationem ſolidi ex cylindris omnibus compoſiti ad ſolidum ex rotatione figuræ curvilineæ AEca, genitum eſſe rationem æqualitatis.

(ⁿ) 110. Nam ſi ſingulorum parallelogrammorum latitudo æqualis eſſet lineæ AF, figuræ inſcriptæ & figuræ circumſcriptæ differentia foret parallelogrammum Af, (lem. 11); cùm igitur ſingulorum parallelogrammorum latitudo minor ſit latitudine AF, (ex hyp.) prædicta figurarum differentia minor quoque eſt parallelogrammo Af.

(°) 111. Propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros acE) non ſunt rectilineæ, ſeu non ſunt ex lateribus rectis quocumque numero finito compoſitæ, ſed ſunt figurarum rectilinearum quarum latera numero augentur & longitudine minuuntur in infinitum, limites curvilinei. Dum enim ordinatarum Aa, Bb, ac proinde chordarum ab, bc, numerus in infinitum augetur, & diſtantiæ AB, BC, in infinitum minuuntur, puncta a, b, K, l, & b, c, L, m, &c. coeunt & curvam acE formant.

112. De-

timæ parallelogrammorum in unâ figurâ ad parallelogramma in alterâ, ſingulorum ad ſingula, ſint eædem; dico quod figuræ duæ AacE, PprT, *ſunt ad invicem in eâdem illâ ratione.* LIBER PRIMUS.



Etenim ut ſunt parallelogramma ſingula ad ſingula, ita (componendo) ſit ſumma omnium ad ſummam omnium, & ita figura ad figuram; exiſtente nimirum figurâ priore (per lemma III) ad ſummam priorem, & figurâ poſteriore ad ſummam poſteriorem in ratione æqualitatis. *Q. E. D.*

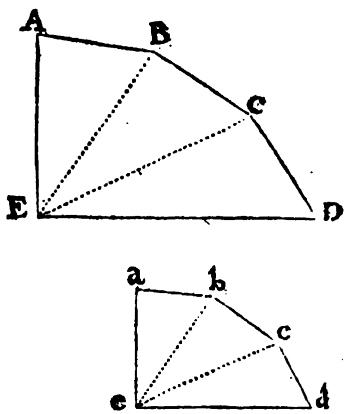
Corol. Hinc ſi duæ cujuſcunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, ſecunda ad ſecundam, cæteræque ſuo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem in eâdem illâ datâ ratione. Nam ſi in lemmatis hujus figuris ſumantur parallelogramma inter ſe ut partes, ſummæ partium ſemper erunt ut ſummæ parallelogrammorum; atque ideo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultimâ ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id eſt (per hypotheſin) in ultimâ ratione partis ad partem.

De Motu Corporum.

LEMMA V.

Similium figurarum latera omnia, quæ ſibi mutuo reſpondent, ſunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea; & areæ ſunt in duplicata ratione laterum. (p)

L E M.

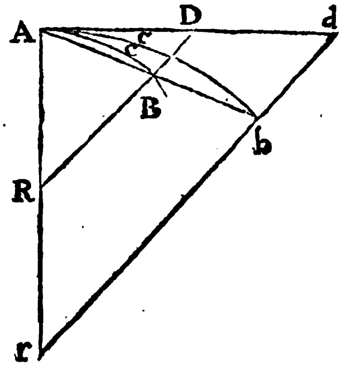


(p) 112. *Demonſtr.* . . . Duæ figuræ, A D E, a d e, ſimiles dicuntur, quarum latera omnia ſibi mutuò reſpondentia, ut A B, a b, B C, b c, proportionalia ſunt, & angulos æquales, ut A B C, a b c, continent; undè jam patet ſummas laterum utriuſque figuræ eſſe inter ſe ut duo quævis latera correſpondentia A B, a b. Ductis ex E, & e, ad omnes angulos lineis E B, E C, e b, e c, figuræ in ſua triangula dividantur; & quòniam anguli D & d, æquales ſunt, lateraque E D, e d, D c, d c, proportionalia, (per definit.), duo triangula E C D, e c d, erunt ſimilia, adeóque anguli E C D, e c d, æquales, & latera E C, e c, lateribus C D, c d proportionalia; quare cùm anguli B C D, b c d ſint etiam æquales (per definit.), æquantur quoque anguli, E C B, e c b, & quia B C : b c = C D : c d = E C : e c, triangula duo E B C, e b c ſimilia erunt. Idem eâdem ratione de aliis triangulis E B A, e b a demonſtratur. Verùm areæ ſingulorum triangulorum ſimilium, quæ in duabus figuris ſibi mutuò reſpondent, ſunt inter ſe in duplicatâ ratione laterum homologorum, ac proindè in datâ ratione; ergò ſummæ triangulorum, in utrâque figurâ, hoc eſt, figurarum areæ rationem habent laterum homologorum duplicatam. Jam numerus laterum A B, B C, &c. a b, b c, &c. augeatur & eorum longitudo minuatur in infinitum, & (per Cor. 4. Lem. III.) figuræ A B C D, a b c d, fiunt curvilineæ; ſimilium igitur figurarum latera omnia, quæ ſibi mutuò reſpondent, ſunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea, & areæ ſunt in duplicatâ ratione laterum. Q. E. D.

113. Cum

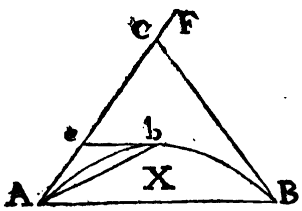
LEMMA VI.

Si arcus quilibet poſitione datus ACB *ſubtendatur chordâ* AB, *& in puncto aliquo* A, *in medio curvaturæ* (9) *continuæ, tangatur à rectâ utrinque productâ* AD; *dein puncta* A, B *ad invicem accedant & coëant; dico quod angulus* BAD, *ſub chordâ & tangente contentus, minuetur in infinitum & ultimò evaneſcet.*



Nam ſi angulus ille non evaneſcit, continebit arcus *ACB* cum tangente *AD* angulum rectilineo æqualem, & propterea curvatura ad punctum *A* non erit continua, contra hypotheſin.

LEM.

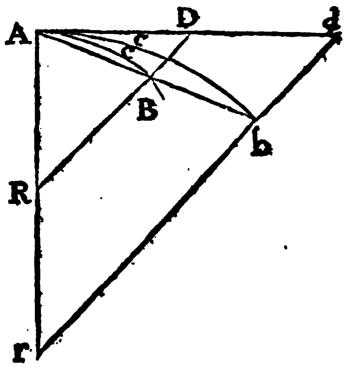


(9) 113. Curva continua BA, conſiderari poteſt tanquam deſcripta motu puncti B continuò mutantis directionem ſuam quâ per rectam tangentem BC, progredi nititur. Undè ſi arcus AB, ſit ubique verſus eamdem partem X, cavus, ſemperque ducantur tangentes AF, BC, ſeſe interſecantes in C, accedente puncto B, ad A, anguli BCF, BAC, CBA, quos tangentes & chordæ complectuntur, continuò, non verò per ſaltum, decreſcunt, & evaneſcente chordâ Ab, evaneſcunt, atque nulli fiunt, dum punctum b, idem omninò eſt cum puncto A. Neceſſe igitur eſt ob continuitatem decrementorum, ut angulus CAb, per omnes magnitudinis gradus inter angulum CAB, & o, ſeu nihilum medios tranſeat priuſquam nullus omnino ſit; quod generatim ſtatuendum eſt de omnibus quantitatibus, quæ naſcuntur & continuò creſcunt, vel quæ continuò decreſcunt & tandem evaneſcunt; non poſſunt enim continuò creſcere vel decreſcere, nec ab uno extremo ad alterum pervenire, quin per omnes gradus magnitudinis inter duo extrema medios tranſeant. Itaque inter tangentem AF, & chordam infiniteſimam Ab, nulla duci poteſt linea recta, quæ angulum finitum cum chordâ vel tangente efficiat; ideoque inter arcum AB, & tangentem AF, nulla duci poteſt linea recta quæ arcum non ſecet.

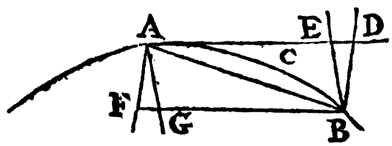
LEMMA VII.

Iiſdem poſitis; dico quod ultima ratio arcûs, chordæ, & tangentis ad invicem eſt ratio æqualitatis.

Nam dum punctum *B* ad punctum *A* accedit, intelligantur ſemper *A B* & *A D* ad puncta longinqua *b* ac *d* produci, & (r) ſecanti *B D* parallela agatur *b d*. Sitque arcus *A c b* ſemper ſimilis arcui *A C B*. Et punctis *A*, *B* coeuntibus, angulus *d A b*, per lemma ſuperius, evaneſcet; ideoque rectæ ſemper finitæ *A b*, *A d*, & arcus intermedius *A c b* coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hiſce ſemper proportionales rectæ *A B*, *A D*, & arcus intermedius *A C B* evaneſcent, & rationem ultimam habebunt æqualitatis. *Q. E. D.*



Corol. 1. Undè ſi per *B* ducatur tangenti parallela *B F*, rectam quamvis *A F* per *A* tranſeuntem perpetuo ſecans in *F*, hæc *B F* ultimo ad arcum evaneſcentem *A C B* rationem habebit æqualitatis, eo quod completo parallelogrammo *A F B D* rationem ſemper habet æqualitatis ad *A D*.



Corol.

(r) 114. Secans R D, ſupponitur ſemper efficere cum tangente A D & chordâ A B, angulos finitos, aut angulos ad quos angulus evaneſcens B A D, rationem habet infiniteſimam; nam ſi anguli A B D, B A D, eſſent ejuſdem ordinis infiniteſimi, trianguli A B D latera finitam haberent inter ſe rationem. Angulus enim externus B D d, æqualis duobus internis oppoſitis D A B, D B A, eſſet ejuſdem ordinis cum illis angulis; & quoniam in omni triangulo latera ſunt ut ſinus angulorum oppoſitorum, latera A B, B D, A D, finitam rationem haberent ſinuum angulorum ejuſdem ordinis B D d, D A B, A B D; cùm autem anguli A & B, ſupponuntur infiniteſimi, angulus A D B eſt obtuſus, adeóque chorda A B, majori angulo oppoſita, ad tangentem A D, datam habebit majoris inæqualitatis rationem.

Corol. 2. Et ſi per *B* & *A* ducantur plures rectæ *B E*, *B D*, *A F*, *A G*, ſecantes tangentem *A D* & ipſius parallelam *B F*; ratio ultima abſciſſarum omnium *A D*, *A E*, *B F*, *B G*, chordæque & arcus *A B* ad invicem erit ratio æqualitatis.

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro ſe invicem uſurpari poſſunt.

LEMMA VIII.

Si rectæ datæ AR, BR *cum arcu* ACB, *chordâ* AB *& tangente* AD, *triangula tria* RAB, RACB, RAD *conſtituunt, dein puncta* A, B *accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evaneſcentium eſt ſimilitudinis, & ultima ratio æqualitatis.*

Nam dum punctum *B* ad punctum *A* accedit, intelligantur ſemper *A B*, *A D*, *A R* ad puncta longinqua *b*, *d* & *r* produci, ipſique *R D* parallela agi *r b d*, & arcui *A C B* ſimilis ſemper ſit arcus *A c b*. Et coeuntibus punctis *A*, *B*, angulus *b A d* evaneſcet, & propterea triangula tria ſemper finita *r A b*, *r A c b*, *r A d* coincident, ſuntque eo nomine ſimilia & æqualia. Unde & hiſce ſemper ſimilia & proportionalia *R A B*, *R A C B*, *R A D* fient ultimo ſibi invicem ſimilia & æqualia. *Q. E. D.*

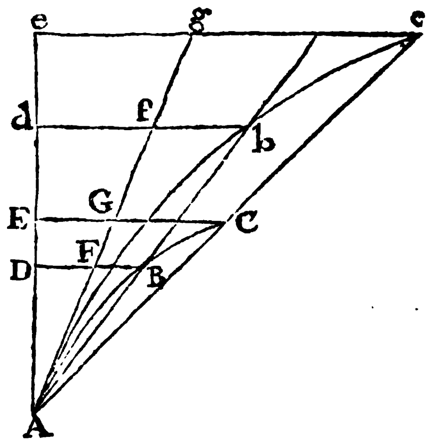
Corol. Et hinc triangula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro ſe invicem uſurpari poſſunt.

De Motu Corporum.

LEMMA IX.

Si recta A E *& curva* A B C *poſitione datæ ſe mutuo ſecent in angulo dato* A, *& ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur* B D, C E, *curvæ occurrentes in* B, C, *dein puncta* B, C, *ſimul accedant ad punctum* A: *dico quod areæ triangulorum* A B D, A C E *erunt ultimo ad invicem in duplicatâ ratione laterum.*

Etenim dum puncta *B*, *C* accedunt ad punctum *A*, intelligatur ſemper *A D* produci ad puncta longinqua *d* & *e*, ut ſint *A d*, *A e* ipſis *A D*, *A E* proportionales, & erigantur ordinatæ *d b*, *e c* ordinatis *D B*, *E C* parallelæ quæ occurrant ipſis *A B*, *A C* productis in *b* & *c*. Duci intelligatur, tum curva *A b c* ipſi *A B C* ſimilis, tum recta *A g*, quæ tangat curvam utramque in *A*, & ſecet ordinatim applicatas *D B*, *E C*, *d b*, *e c* in *F*, *G*, *f*, *g*. (f) Tum manente longitudine *A e* coeant puncta *B*, *C* cum puncto *A*; & angulo *c A g* evaneſcente, coincident areæ curvilineæ *A b d*, *A c e* cum rectilineis *A f d*, *A g e*; ideoque (per lemma v.) erunt in duplicata ratione laterum *A d*, *A e*: Sed his areis proportionales ſemper ſunt areæ *A B D*, *A C E*, & his lateribus latera *A D*, *A E*. Ergo & areæ *A B D*, *A C E* ſunt ultimo in duplicatâ ratione laterum *A D*, *A E*. *Q. E. D.*



L E M-

(f) 115. Tum manente longitudine finitâ A e, & mutatâ, ſi neceſſum fuerit, longitudine A d, ut ſit ſemper A d : A e = A D : A E, coeant puncta B, C, cum puncto A, &c.

116. Spa-

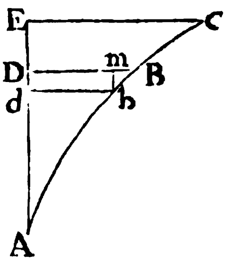
LEMMA X.

Spatia quæ corpus urgente quâcunque vi finitâ deſcribit, ſive vis illa determinata & immutabilis ſit, ſive eadem continuò augeatur vel continuò diminuatur, ſunt ipſo motus initio in duplicatâ ratione temporum.

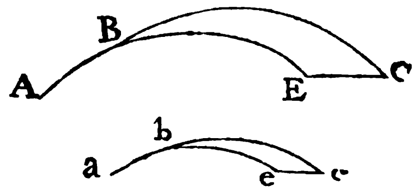
Exponantur tempora per lineas *A D*, *A E*, & velocitates genitæ per ordinatas *D B*, *E C*; (t) & ſpatia his velocitatibus deſcripta, erunt ut areæ *A B D*, *A C E* his ordinatis deſcriptæ, hoc eſt, ipſo motus initio (per lemma IX) in duplicatâ ratione temporum *A D*, *A E*. *Q. E. D.*

Corol. 1. (u) Et hinc facile colligitur, quod corporum ſimiles ſimilium figurarum partes temporibus proportionalibus deſcri-

(t) 116. Spatia his velocitatibus deſcripta erunt ut areæ A B D, A C E, his ordinatis deſcriptæ. Nam ductâ d b, ipſi D B, infinitè propinqua, ita ut D d, ſit infiniteſima ſeu evaneſcens reſpectu A D, A E, lineæ D B, d b, & rectangulum d m, ac figura D d b B, pro æqualibus reſpective uſurpari poſſunt (107), adeò ut per tempuſculum infiniteſimum, D d, velocitas D B, tanquam uniformis haberi poſſit; ſpatium autem æquabili velocitate d b, percurſum, eſt ut factum ex velocitate d b, & tempuſculo D d, (5), hoc eſt, ut rectangulum D d × d b, ſeu ut area D B b d; ſi igitur areæ A C F, A D B, in infinita numero atque infiniteſima rectangula, ut d m, diviſæ concipiantur, erunt ſummæ ſpatiorum percurſorum, ſeu ſpatia temporibus A E, A D, percurſa, ut ſummæ horum rectangulorum, hoc eſt, ut areæ ipſæ A C E, A B D, (Lem. III).



117. Cor. Vis acceleratrix finita, utcumque variabilis, ipſo motûs initio conſiderari poteſt, tanquam vis determinata & immutabilis. Spatia enim, quæ corpus urgente vi acceleratrice conſtante deſcribit, ſunt ſemper in duplicatâ temporum ratione (27); & contra, ſi ſpatia percurſa duplicatam habeant temporum rationem, vis acceleratrix conſtans eſt; nam ſi mutabilis eſſet vis, illa quoque temporum & ſpatiorum proportio mutaretur. Ergò (Lem. X) vis quælibet acceleratrix finita, utcumque variabilis, ipſo motûs initio tanquam immutabilis ſpectari poteſt.



(u) 118. Corpora duo A & a, curvas ſimiles A B E, a b e, illarumque partes ſimiles A B, a b, B E, b e, temporibus proportionalibus deſcribant; duobus hiſce corporibus, cum ad puncta B & b, pervenerint, accedunt novæ vires acceleratrices inter ſe æquales & ſimiliter applicatæ, quæ prioribus viribus additæ corpora deferant per arcus B C, b c. Jun-

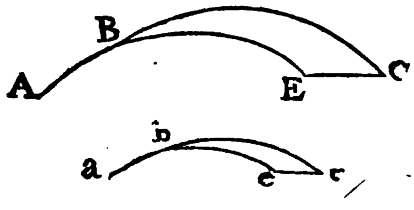
gan-

deſcribentium errores, qui viribus quibuſvis æqualibus ad corpora ſimiliter applicatis generantur, & menſurantur per diſtantias corporum à figurarum ſimilium locis illis, ad quæ corpora eadem temporibus iiſdem proportionalibus ſine viribus iſtis pervenirent, ſunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proximè.

Corol. 2. (x) Errores autem qui viribus proportionalibus ad ſimiles figurarum ſimilium partes ſimiliter applicatis generantur, ſunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 3. (y) Idem intelligendum eſt de ſpatiis quibuſvis quæ corpora urgentibus diverſis viribus deſcribunt. Hæc ſunt, ipſo motus initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 4. Ideoque vires ſunt ut ſpatia, ipſo motus initio, deſcripta directè & quadrata temporum inversè. *Corol.*



gantur rectæ E C, e c, quæ errores ſolâ virium perturbantium actione genitos exponent; Lineæ enim illæ ſunt ſpatia ſolâ virium perturbantium actione deſcripta. Cum autem vires perturbantes ſupponantur æquales & ſimiliter applicatæ, idem contingere debet ac ſi corpus aliquod eâdem vi acceleratrice ſollicitatum ſpatia E C, e c, diverſis temporibus deſcriberet, adeoque ſpatia illa ſunt, ipſo motus initio, ut quadrata temporum quibus percurruntur (Lem. X) B C, b c, & quibus abſque virium perturbantium actione percurrerentur arcus ſimiles B E, b e; ſi igitur vires illæ perturbantes ſupponantur conſtantes, ſpatia E C, e c, non ſolùm motus initio, ſed & tempore finito deſcripta, erunt ut prædictorum temporum quadrata (27). Undè ſi admodum exigua ſit virium perturbantium variatio, ſpatia ſeu errores erunt quam proximè ut quadrata temporum.

(x) 119. Errores autem qui viribus proportionalibus, ſeu viribus in datâ ratione exiſtentibus, ad ſimiles figurarum ſimilium partes ſimiliter applicatis generantur, ſunt ut vires & quadrata temporum conjunctim. Nam ſi tempora ſunt eadem, errores ſunt in data ratione virium; ſi vires ſunt eædem, errores ſunt in duplicata ratione temporum quibus generantur; cum igitur vires & tempora variant, errores ſunt in ratione compoſitâ ex datâ virium ratione & duplicatâ temporum.

(y) 120. Nam vires motus initio tanquam conſtantes haberi poſſunt (117); dupla autem ſpatia, adeóque ſimplicia ſpatia, quæ corpora urgentibus viribus conſtantibus deſcribunt, ſunt ut vires & quadrata temporum conjunctim (30); ergo ſpatia quæ corpora urgentibus diverſis viribus deſcribunt, ſunt, ipſo motus initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim. Si itaque vires acceleratrices, motus initio, ſint G, g, ſpatia S, s, tempora T, t, erit S : s = G T T : g t t, ideoque G : g = S+T T : s+t t, & T T : t t = S+G : s+g, hoc eſt, vires ſunt ut ſpatia motus initio deſcripta directè & quadrata temporum inverſe; Temporum verò quadrata ſunt ut deſcripta ſpatia directè & vires inversè

121. Cir

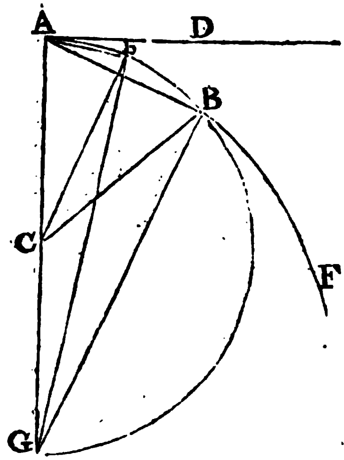
Corol. 5. Et quadrata temporum ſunt ut deſcripta ſpatia directè & vires inversè.

Scholium.

Si quantitates indeterminatæ diverſorum generum conferantur inter ſe, & earum aliqua dicatur eſſe ut eſt alia quævis directè vel inversè: ſenſus eſt, quòd prior augetur vel diminuitur in eâdem ratione cum poſteriore, vel cum ejus reciprocâ. Et ſi earum aliqua dicatur eſſe ut ſunt aliæ duæ vel plures directè aut inversè: ſenſus eſt, quod prima augetur vel diminuitur in ratione quæ componitur ex rationibus in quibus aliæ vel aliarum reciprocæ augentur vel diminuuntur. Ut ſi A dicatur eſſe ut B directè & C directè & D inversè: ſenſus eſt, quod A augetur vel diminuitur in eadem ratione cum $B \times C \times \frac{1}{D}$ hoc eſt, quod A & $\frac{BC}{D}$ ſunt ad invicem in ratione datâ.

LEMMA XI.

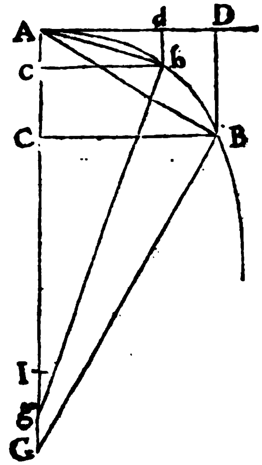
Subtenſa evaneſcens anguli contactus, in curvis omnibus (z) curvaturam finitam ad punctum contactus habentibus, eſt ultimo in ratione duplicatâ ſubtenſæ arcus contermini. Caſ.



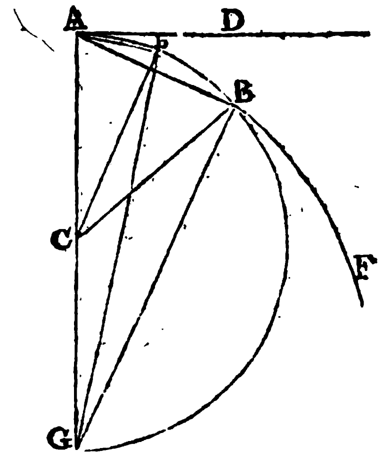
(z) 121. Circuli curvatura eſt in omnibus circumferentiæ punctis eadem, ſeu uniformis; in variis autem circulis eo major eſt, quo minor eſt circuli radius, adeò ut circuli curvatura ſit ſemper in ratione inverſâ radii. Aliarum linearum curvatura in ſingulis punctis determinatur per curvaturam arcus circularis qui cum arcu infiniteſimo curvæ in puncto dato congruit, ſeu, quod idem eſt, qui curvam in puncto dato oſculatur. Eſt igitur lineæ cujuſvis in puncto dato curvatura inversè ut radius circuli curvam lineam in dato puncto oſculantis.

Sumantur duo curvæ A F, puncta A & B, ducanturque rectæ A C, B C, ad curvam perpendiculares, & ex puncto interſectionis C, tanquam centro, radiis C A, C B, duo deſcribantur circuli, quorum unus radio C A, deſcriptus tanget curvam in A, alter autem radio C B, deſcriptus tanget eam in B. Si ad ſe mutuò accedant puncta A & B, donec arcus A B evaneſcat, duæ perpendiculares A C, B C, pro æqualibus uſurpari poterunt (Lem. I), con-

Caſ. 1. Sit arcus ille *A B*, tangens ejus *A D*, ſubtenſa anguli contactus ad tangentem perpendicularis *B D*, ſubtenſa arcus *A B*. Huic ſubtenſæ *A B* & tangenti *A D* perpendiculares erigantur *A G*, *B G*, concurrentes in *G*; dein accedant puncta *D*, *B*, *G*, ad puncta *d*, *b*, *g*, ſitque *J* interſectio linearum *B G*, *A G* ultimo facta ([a]) ubi puncta *D*, *B* accedunt uſque ad *A*. Manifeſtum eſt quod diſtantia *G J* minor eſſe poteſt quam aſſignata quævis. Eſt autem (ex natura circulorum per puncta *A B G*, *A b g* tranſeuntium) *A B quad.* æquale *A G* × *B D*, & *A b quad.* æquale *A g* × *b d*; ideoque ratio *A B quad.* ad *A b quad.* componitur ex rationibus *A G* ad *A g* & *B D* ad *b d*. Sed quoniam *G J* aſſumi poteſt minor longitudine quâvis aſſignatâ, fieri poteſt ut ratio *A G* ad *A g* minùs differat à ratione æqualitatis quam pro differentiâ



quâvis



conjungentur duo puncta contactus A & B, duoque circuli tangentes abibunt in unum; A B G, qui curvam oſculabitur in A, vel B, adeoque curvatura lineæ A F, in A, eſt in ratione inversâ radii A C circuli oſculantis. Si ergo finitus ſit radius oſculi A C, finita quoque erit curvatura in A; ſi vero radius ſit infinitus, curvatura erit infiniteſima; ac tandem ſi radius ſit infiniteſimus, curvatura erit infinita. Quoniam autem eo magis curva à tangente A D deflectit, quo circuli oſculantis radius A C minor eſt, & contra, patet angulum contactûs creſcere & decreſcere cum curvaturâ & in eâdem ratione inversâ radii.

122. Ducantur chordæ A B, B G; angulus A B G, in ſemicirculo rectus eſt; ac proindè ſi in curvâ quâcumque curvaturam finitam in puncto aliquo A habente ducantur chordæ evaneſcentes A b, A B, ad eaſque agantur perpendiculares B G, b G, hæ lineæ convenient in puncto G, junctiſque punctis A & G, recta A G ad tangentem A d perpendicularis erit, & finitam habebit magnitudinem, ut pote quæ æqualis eſt duplo radio finito A C, circuli curvam oſculantis in A.

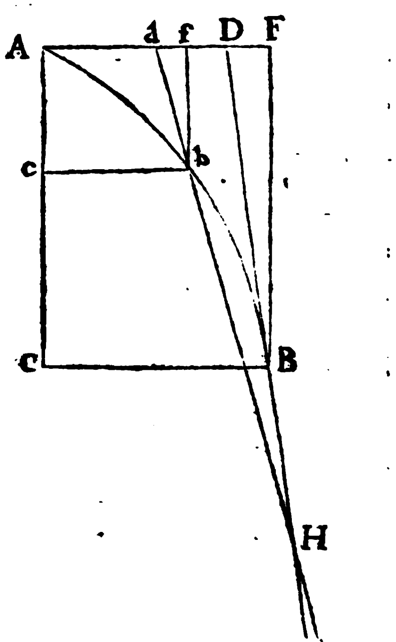
([a]) 123. Ubi puncta D, B, accedunt uſque ad A, linea A J (122) eſt diameter circuli curvam A b B oſculantis

in

quâvis aſſignatâ, ideoque ut ratio *A B quad.* ad *A b quad.* minùs differat à ratione *B D* ad *b d*, quàm pro differentiâ quâvis aſſignatâ. Eſt ergo, per lemma 1, ratio ultima *A B quad.* ad *A b quad.* eadem cum ratione ultimâ *B D* ad *b d.* *Q. E. D.*

Caſ. 2. ([b]) Inclinetur jam *B D* ad *A D* in angulo quovis dato, & eadem ſemper erit ratio ultima *B D* ad *b d*, quæ priùs, ideoque eadem ac *A B quad.* ad *A b quad.* *Q. E. D.*

Caſ. 3. ([c]) Et quamvis angulus *D* non detur, ſed recta *B D* ad datum punctum convergat, vel aliâ quâcunque lege conſtituatur; tamen anguli *D*, *d* communi lege conſtituti ad æqualitatem ſemper vergent & propiùs accedent ad invicem quàm pro differentiâ quâvis aſſignatâ, ideoque ultimo æquales erunt, per lem. 1, & propterea lineæ *B D*, *b d* ſunt in eâdem ratione ad invicem ac priùs. *Q. E. D.* *Co-*



in A, & quoniam accedente puncto B, ad A, accedit punctum G, ad J, atque evaneſcente arcu A B, evaneſcit quoque diſtantia G J, manifeſtum eſt quod diſtantia G J minor eſſe poteſt quam aſſignata quævis; quia verò anguli A b g, A B G, recti ſunt (per hyp.) circuli duo diametris A g, A G, deſcripti per puncta b, B, tranſeunt, adeóque horum circulorum chordæ A b, A B, ſunt mediæ proportionales inter ſuas reſpectivè abſciſſas A c, A C, ſeu æquales d b, D B, & diametros A g, A G, ac proindè $AB^2 = AG \times BD$ & $Ab^2 = Ag \times bd$ &c.

([b]) 124. Inclinentur jam B D, b d, ad A D, in angulo quovis dato B D F, b d f, eadem ſemper erit ratio ultima B D, ad, b d, quæ priùs. Ductis enim B F, b f, ad A C, parallelis, erit ob triangula æquiangula B F D, b f d, B D : b d = B F : b f; ſed (123) B F : b f = $AB^2 : Ab^2$; eſt igitur B D : b d = $AB^2 : Ab^2$.

([c]) 125. Et quamvis angulus D, non detur, ſed rectæ, D B, d b, ad datum punctum H, convergant, vel aliâ quâcumque communi lege conſtituantur, tamen anguli D, d, communi lege conſtituti (punctis b & B ad A & ad ſe mutuò accedentibus) ad æqualitatem ſemper vergent, & evaneſcente arcu B b, adeóque coincidentibus lineis H D, H d, propiùs accedent ad invicem quam pro differentiâ quâvis aſſignatâ ac proinde ultimò æquales erunt (per Lem. I), & propterea lineæ B D, b d, ſunt ultimò parallelæ & in eâdem ratione ad invicem ac priùs (124).

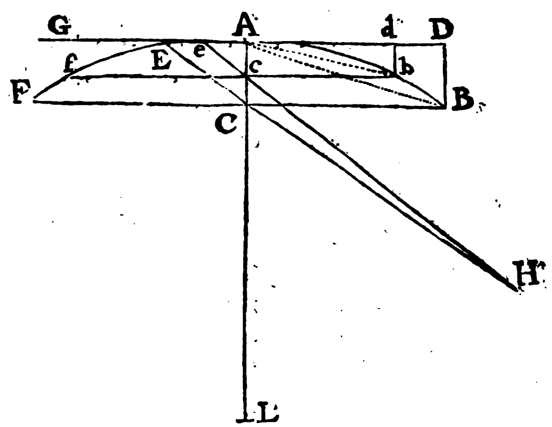
De Motu Corporum.

Corol. 1. Unde cum tangentes *AD*, *Ad*, arcus *AB*, *Ab*, & eorum ſinus *BC*, *bc* fiant ultimo chordis *AB*, *Ab* æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimo ut ſubtenſæ *BD*, *bd*.

Corol. 2. (d) Eorundem quadrata ſunt etiam ultimo ut ſunt arcuum ſagittæ, quæ chordas biſecant & ad datum punctum convergunt. Nam ſagittæ illæ ſunt ut ſubtenſæ *BD*, *bd*.

Corol. 3. (e) Ideoque ſagitta eſt in duplicatâ ratione temporis quo corpus datâ velocitate deſcribit arcum.

Corol. 4. (f) Triangula rectilinea *ADB*, *Adb* ſunt ultimo in triplicatâ ratione laterum *AD*, *Ad*, inque ſeſquiplicata



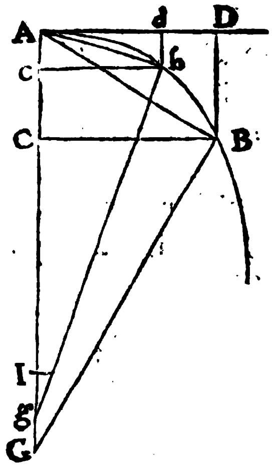
(d) 126. Sit FAB, arcus circuli curvam datam oſculantis in A, tangens AD, radius oſculi AL, chordæ FB, fb, ad radium AL, & rectæ BD, bd, ad tangentem AD, normales, per puncta C, c, ſemper ducantur lineæ EC, ec, ad datum punctum H, convergentes, evaneſcente arcu AB, rectæ DB, db, & ipſis æquales ſagittæ AC, Ac, ſunt ut tangentium AD, Ad, arcuum AB, Ab, & chordarum AB, Ab, quadrata (coroll. 1.) adeóque ut duplorum arcuum FAB, fAb, & chordarum fb, FB, iis arcubus evaneſcentibus (Lem. 7.) congruentium, atque etiam tangentium quadrata. Jam ubi punctum C, uſque ad A, accedit, chorda evaneſcens AE, cum tangente AG, coincidit (Lem. 6.) & coeuntibus quoque lineis EH, eH, triangula CEA, ceA, ſunt ſimilia, ac proinde EC eſt ad ec, ut AC, ad Ac, hoc eſt ut arcuum evaneſcentium FAB, fAb, chordarum FB, fb, & tangentium quadrata.

(e) 127. Ideóque ſagittæ AC, Ac, vel EC, ec, ſunt in duplicatâ ratione temporum quibus corpus datâ velocitate percurrit arcus evaneſcentes FAB, fAb, vel dimidios AB, Ab; ſpatia enim datâ velocitate percurſa ſunt ut tempora (5); adeóque pro temporibus ſubſtitui poſſunt arcus FAB, fAb, ſed ſagittæ ſunt in ratione duplicatâ eorum arcuum, (126), ergò & temporum.

(f) 128. Triangula rectilinea ABD, Abd, ſunt ultimò in triplicatâ ratione laterum AD, Ad, inque ſeſquiplicatâ laterum BD, bd; ductis enim BF, bf, ad tangentem AD, perpendicularibus, erit ob triangulorum BDF, bdf, ſimilitudinem BD : bd = BF : bf, & proptereà areæ triangulorum ABD, Abd, ſunt in ratione compoſitâ laterum AD, ad Ad, & BD, ad bd; ſed (124. 125. cor. 1.) BD : bd = AD² : Ad²; adeóque √BD : √bd = AD : Ad; ergò triangula ABD, Abd, ſunt in ratione compoſitâ AD, ad Ad, & AD², ad Ad², hoc eſt, in ratione triplicatâ laterum AD, Ad; ſunt etiam in ratione compoſitâ BD, ad bd, & √BD, ad √bd, hoc eſt, in ratione BD × √BD ad bd × √bd.

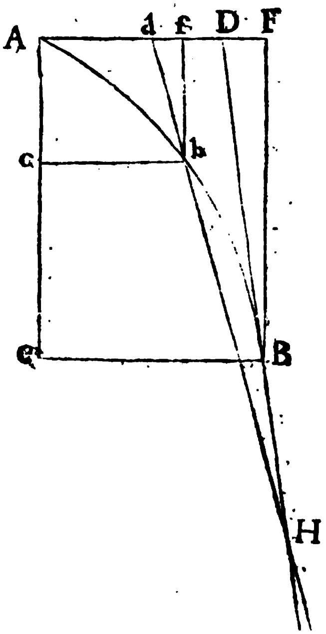
119.

catâ laterum *D B*, *d b*; utpote in compoſitâ ratione laterum *A D* & *D B*, *A d* & *d b* exiſtentia. Sic & triangula *A B C*, *A b c* ſunt ultimo in triplicatâ ratione laterum *B C*, *b c*. Rationem verò ſeſquiplicatam voco triplicatæ ſubduplicatam, quæ nempè ex ſimplici & ſubduplicatâ componitur.



Corol. 5. Et quoniam *D B*, *d b* ſunt ultimo parallelæ & in duplicatâ ratione ipſarum *A D*, *A d*: erunt areæ ultimæ curvilineæ *A D B*, *A d b* ([g] ex naturâ parabolæ) (h) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum *A D B*, *A d b*; & ſegmenta *A B*, *A b* partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ & hæc ſegmenta erunt in triplicatâ ratione tum tangentium *A D*, *A d*; tum chordarum & arcuum *A B*, *A b*.

Scho-



(g) 129. Arcus evaneſcens A B, in curvis omnibus curvaturam finitam ad punctum contactûs A, habentibus, pro arcu parabolæ uſurpari poteſt. Ductâ enim A C, lineis B F, b f, parallelâ, completiſque parallelogrammis A B, A b, erunt, ex demonſtratis, rectæ F B, f b, & ipſis æquales abſciſſæ A C, A c, ut ordinatarum C B, c b, quadrata, quæ eſt notiſſima parabolæ proprietas.

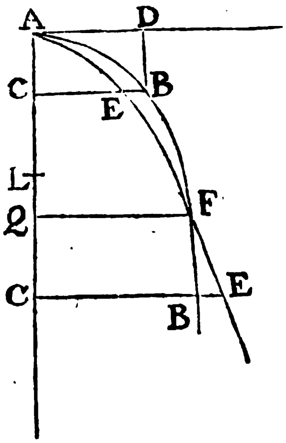
130. Quare arcus evaneſcens ſpectari poteſt tanquam arcus parabolæ cujus latus rectum eſt æquale diametro circuli oſculantis. Nam in arcu circulari A B, (vid. fig. textûs) ordinata C B, ad diametrum perpendicularis, eſt media proportionalis inter abſciſſam A C, & reliquam diametri partem, ſeu totam diametrum, cum A C, evaneſcit (Lem. 1.), adeóque quadratum ordinatæ C B, æquale eſt rectangulo ex abſciſsâ evaneſcente A C, & diametro circuli, quæ eſt proprietas parabolæ cujus latus rectum æquale eſt prædictæ diametro.

(h) 131. Parabolæ ſegmentum A b B, eſt tertia pars trianguli rectilinei A C B, vel æqualis A D B, adeóque area curvilinea A D B b A, æqualis eſt duabus tertiis partibus ejuſdem trianguli rectilinei A D B. Vid. Gregor. à S. Vincentio cor. 1. Prop. 232. Lib. V. quadraturæ circuli, aut Archimed. Prop. 17. quadrat. Parabolæ.

Scholium.

Cæterum in his omnibus ſupponimus angulum contactus nec infinitè majorem eſſe angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus ſuis, nec iiſdem infinitè minorem; hoc eſt, curvaturam ad punctum *A*, nec infinitè parvam eſſe, nec infinitè magnam, ſeu intervallum *AJ* finitæ eſſe magnitudinis. (i) Capi enim poteſt *DB* ut AD^3: quo in caſu circulus.

(i) 132. Sit parabolæ Appollonianæ A E F, axis A C, vertex A, tangens in vertice A D, ordinata C E, latus rectum A L, circulus diametro A L, deſcriptus parabolam oſculatur in A, (130.) eundemque ac parabola contactûs angulum efficit in A. Ad eundem axem A C, & verticem A, deſcribatur ſuperioris generis parabola cujus ordinatæ C B ſint ſemper in ſubtriplicatâ abſciſſarum A C, vel parallelarum & æqualium D B, ratione; & erit angulus contactûs B A D, angulo contactûs E A D, infinitè minor...... Dem... Parabolæ A F E, latus rectum A L, dicatur *A*; parabolæ A B B, latus rectum ſit *B*, & erit ex harum curvarum naturâ $A \times AC = CE^2$ & $B^2 \times AC = CB^3$, adeóque $AC = CE^2 : A = CB^3 : B^2$, undè reperitur $CB^3 = CE^2 \times B^2 : A$, & CB ad $B^2 : A = CE^2$ ad CB^2 ergo cum erit $CB = B^2 : A$, tunc erit $CE^2 = CB^2$, atque adeò parabolæ A E E, A B B, ordinatam habebunt communem quæ dicatur Q F, & ſeſe interſecabunt in puncto F; jam verò ſi fuerit C B minor quam $B^2 : A$, erit quoque CE^2 minor quàm CB^2, adeóque C E minor quàm C B; ſed omnes ordinatæ inter verticem A, & ordinatam communem Q F, (quæ eſt $= B^2 : A$) minores ſunt eâ, ergo omnes C B inter A & F comprehenſæ ſunt minores ordinatis correſpondentibus C B; tota igitur parabolæ Appollonianæ portio A E F, quâ ordinatæ C E terminantur, cadit intrà portionem A B F, alterius parabolæ, ac proindè angulus contactûs B A D, ſemper minor eſt angulo contactûs E A D, cum ergò angulus E A D, aucto in infinitum latere recto A L, poſſit ſine fine minui, manifeſtum eſt angulum contactûs B A D, quovis angulo dato E A D, infinitè minorem eſſe. Q. e. D.



133. Ad eundem axem A C, & verticem A, ſucceſſivè deſcribantur curvæ A E E, ejus naturæ, ut abſciſſarum A C, & ordinatarum C E, relatio exprimatur æquatione generali $A^m AC = CE^{m+1}$. Si loco exponentis, m, ſucceſſivè ponantur in æquatione numeri quilibet poſitivi, integri vel fracti continuò creſcentes vel decreſcentes, obtinebuntur infinitæ ſeries diverſæ angulorum contactuum, quorum quilibet eſt infinitè minor priore, dum numerus, m, ſemper creſcit, & infinitè major dum numerus, m, ſemper decreſcit... Dem... Numerus, m, augeatur numero poſitivo, n, integro vel fracto, & deſcribatur curva A B B, cujus æquatio ſit $B^{m+n} \times AC = CB^{m+n+1}$. Ex hac æquatione & ſuperiori $A^m AC = CE^{m+1}$, reperitur $AC = CB^{m+n+1} : B^{m+n} = CE^{m+1} : A^m$, adeóque $CB^{m+n+1} = CB^{m+1} \times B^{m+n} : A^m$ atque CB^n ad $B^{m+n} : A^m = CE^{m+1}$ ad CB^{m+1}; ſit $CB^n = B^{m+n} : A^m$, & erit $CB^{m+1} = CE^{m+1}$, adeóque CB = CE = Q F. Quarè cum inter verticem A, & communem ordinatam Q F, omnes ordinatæ ſint minores ipsâ Q F, patet ut ſuprà (132), totam portionem A E F, curvæ A E E, cadere intrà portionem A B F, alterius curvæ A B B, ac proindè angulum contactûs B A D, quovis dato angulo contactûs E A D infinitè minorem eſſe, & reciprocè angulum E A D, eſſe angulo B A D infinitè majorem. Q. e. D.

nullus per punctum A inter tangentem AD & curvam AB duci poteſt, proindeque angulus contactus erit infinitè minor circularibus. (k) Et ſimili argumento ſi fiat DB ſucceſſivè ut AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, &c. habebitur ſeries angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet poſterior eſt infinitè minor priore. Et ſi fiat DB ſucceſſivè ut AD^2, $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{5}{4}}$, $AD^{\frac{6}{5}}$, $AD^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia ſeries infinita angulorum contactus, quorum primus eſt ejuſdem generis cum circularibus, ſecundus infinitè major, & quilibet poſterior infinitè major priore. Sed & inter duos quoſvis ex his angulis poteſt ſeries utrinque in infinitum pergens angulorum intermediorum inſeri, quorum quilibet poſterior erit infinitè major minorve priore. Ut ſi inter terminos AD^2, & AD^3, inſeratur ſeries $AD^{\frac{13}{6}}$, $AD^{\frac{11}{5}}$, $AD^{\frac{9}{4}}$, $AD^{\frac{7}{3}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$, $AD^{\frac{8}{3}}$, $AD^{\frac{11}{4}}$, $AD^{\frac{14}{5}}$, $AD^{\frac{17}{6}}$, &c. Et rurſus inter binos quoſvis angulos hujus ſeriei inſeri poteſt ſeries nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem.

(l) Quæ de curvis lineis deque ſuperficiebus comprehenſis demonſtrata ſunt, facilè applicantur ad ſolidorum ſuperficies cur-

(k) 134. In æquatione $A = \times AC = CE^{m+1}$, loco exponentis m, ſucceſſivè ponantur numeri 1, 2, 3, 4, 5 &c., & erit AC ſucceſſivè, ut CE^2, CE^3, CE^4, CE^5 &c., & habebitur (133) ſeries angulorum contactûs pergens in infinitum quorum quilibet poſterior eſt infinitè minor priore. Loco m ſubſtituantur ſucceſſivè numeri decreſcentes, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, &c. erit AC, ſucceſſivè ut CE^2, $CE^{\frac{3}{2}}$, $CE^{\frac{4}{3}}$, $CE^{\frac{5}{4}}$, &c., & habebitur alia ſeries infinita angulorum contactûs, quorum primus eſt ejuſdem generis cum circularibus (132), ſecundus infinitè major, & quilibet poſterior infinitè major priore (133). Loco m, ſubſtituantur numeri 1, $1+\frac{1}{6}$, $1+\frac{1}{5}$, $1+\frac{1}{4}$, $1+\frac{1}{3}$, $1+\frac{1}{2}$, $1+\frac{2}{3}$, $1+\frac{3}{4}$, $1+\frac{4}{5}$, $1+\frac{5}{6}$ &c., erit AC, ſucceſſivè ut CE^2, $CE^{\frac{13}{6}}$, $CE^{\frac{11}{5}}$, $CE^{\frac{9}{4}}$ &c., & habebitur ſeries infinita angulorum contactûs, quorum quilibet poſterior eſt infinitè minor priore (133), & inter binos quoſvis angulos hujus alteriuſve ſeriei inſeri poteſt ſeries nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium; ut enim ea ſeries inveniatur, ſufficit inter duos numeros datos, v. G. 1, $1+\frac{1}{6}$, ſeriem invenire numerorum creſcentium vel decreſcentium, quorum quilibet major ſit altero ex numeris datis, minor altero, quod facillimum eſt.

(l) 135. Id exemplo facili illuſtrare ſatis erit. Pyramidis & coni ſit idem vertex eademque altitudo, & baſis pyramidis ſit polygonum inſcriptum circulo qui baſis eſt coni, numerus laterum polygoni augeatur, & eorum longitudo minuatur in infi-

De Motu Corporum.

curvas & contenta. (m) Præmiſi verò hæc lemmata, ut effugerem tædium deducendi longas demonſtrationes, more veterum geometrarum, ad abſurdum. Contractiores enim redduntur demonſtrationes per methodum indiviſibilium. Sed quoniam durior eſt indiviſibilium hypotheſis, & propterea methodus illa minus geometrica cenſetur; (n) malui demonſtra-

infinitum, & polygoni ac circuli ultima ratio (Lem. 7.) erit ratio æqualitatis, ac proindè ultima ratio pyramidis illiuſque ſuperficiei ad conum & illius ſuperficiem curvam erit quoque ratio æqualitatis; undè curva ſuperficies coni æqualis eſt ſummæ ultimæ triangulorum evaneſcentium, quorum communis vertex eſt vertex coni, baſes verò latera evaneſcentia polygoni circulo inſcripti.

(m) 136. Quam magnos progreſſus geometria fecerit hinc cognoſcere licet. Veteres geometræ in iis quæſtionibus quæ infiniti conſiderationem involvunt, ſuas demonſtrationes ad abſurdum revocabant & ex falſis ſuppoſitionibus verum eruebant. Ut inter duas quantitates quæ ad æqualitatem conſtanter vergunt, & tandem propiùs ad invicem accedunt quàm pro datâ quâvis differentiâ rationem æqualitatis intercedere demonſtrarent, priùs ſupponebant inter eas quantitates eſſe vel majoris vel minoris inæqualitatis rationem, deindè utrumque falſum demonſtrabant, & ex hâc reductione quam ad abſurdum vocant, inter illas quantitates perfectam æqualitatem eſſe concludebant. Quam autem perplexus ſit & tædioſus hic demonſtrandi modus nemo non videt. Verùm licèt imperfecta admodùm fuerit veterum geometria, non iis tamen omninò ignota fuerunt methodi infiniteſimalis principia. Quantitates infinitè parvas ſeu evaneſcentes pro nihilo habendas eſſe in multis demonſtrationibus tanquam axioma poſuerunt Euclides & Archimedes; in exemplum afferemus unicum vulgaris Geometriæ theorema. Ut demonſtrarent circulos eſſe inter ſe ut quadrata diametrorum, fingebant iis circulis inſcripta eſſe vel circumſcripta polygona ſimilia quorum latera numero augerentur & longitudine minuerentur in infinitum, ità ut polygonorum inſcriptorum vel circumſcriptorum à circulo differentia foret quâvis datâ magnitudine minor; quia verò hæc polygona ſunt ut quadrata diametrorum circulorum quibus inſcribuntur vel circumſcribuntur, circulos pariter eſſe ut quadrata diametrorum concludebant. Varios infinitorum ordines ſupponit illud idem theorema licèt non adverterent veteres. Nam conſiderabant polygona circulis inſcripta tanquam compoſita ex infinitis numero atque infinite parvis ſeu evaneſcentibus lateribus; manifeſtum autem eſt differentiam polygoni inſcripti à circulo quâvis datâ minorem componi ex infinitis numero atque infinitè parvis ſeu evaneſcentibus circuli ſegmentis quorum latera polygoni ſunt chordæ; hæc verò ſegmenta ſunt minimæ quantitates illæ quas ſecundi ordinis infiniteſimas dicunt Recentiores. Hic pedem fixerant veteres, primuſque longiùs progredi auſus eſt celeberrimus Geometra Bonaventura Cavalerius qui anno 1635. indiviſibilium methodum in geometriam introduxit. Hoc primum poſuit ſuæ methodi decretum, lineas nempè ex infinitis punctis conſtare, ſuperficies ex infinitis lineis, & ſolida ex infinitis ſuperficiebus; Deindè indiviſibilia illa elementa totamque eorum ſummam comparat in unâ magnitudine cum ſingulis elementis eorumque ſummâ in aliâ magnitudine, & ſic duarum magnitudinum rationem determinat. Hæc autem quantitatum indiviſibilium hypotheſis durior minuſque geometrica Newtono viſa eſt.

(n) 137. Newtonus ut indirectas & perplexas vitaret veterum demonſtrationes, earum tamen certitudinem & evidentiam conſervaret, veterum principium Lemmate primo generaliter expreſſit, illudque in Lemmatis ſequentibus ad curvas generatim applicavit, & indè directas perbreveſque

trationes rerum ſequentium ad ultimas quantitatum evaneſcentium ſummas & rationes, primaſque naſcentium, id eſt, ad limites (o) ſummarum & rationum deducere; & propterea limitum illorum demonſtrationes quâ potui brevitate præmittere. His enim idem præſtatur quod per methodum indiviſibilium; & principiis demonſtratis jam tutiùs utemur. Proinde in ſequentibus, ſi quando quantitates tanquam ex particulis conſtantes conſideravero, vel ſi pro rectis uſurpavero lineolas curvas; nolim indiviſibilia, ſed evaneſcentia diviſibilia, non ſummas & rationes partium (p) determinatarum, ſed ſummarum & rationum limites ſemper intelligi; vimque talium demonſtrationum ad methodum præcedentium lemmatum ſemper revocari.

Objectio eſt, quod quantitatum evaneſcentium nulla ſit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non eſt ultima, ubi evanuerunt, nulla eſt. Sed & eodem argumento æque contendi poſſet nullam eſſe corporis ad certum locum, ubi motus finiatur, pervenientis (q) velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non eſſe ultimam, ubi attingit, nullam eſſe. Et reſponſio facilis eſt: Per velo-

veſque demonſtrationes in toto operis decurſu deduxit. Ut autem methodi indiviſibilium brevitatem aſſequeretur, tutius tamen & accuratius procederet, loco indiviſibilium evaneſcentia diviſibilia ſubſtituit, & quantitates Mathematicas non ut ex partibus quam minimis conſtantes, ſed ut motu continuo deſcriptas conſiderat; ſupponit nimirum lineas deſcribi ac deſcribendo generari non per appoſitionem partium, ſed per motum continuum punctorum, ſuperficies per motum linearum, & ſolida per motum ſuperficierum, angulos per rotationem laterum, tempora per fluxum continuum & ſic in cæteris.

(o) 138. Ubi area curvilinea in parallelogramma rectilinea dividitur, & eorum numerus augetur atque latitudo minuitur in infinitum, horum parallelogrammorum ſumma (Lem. 2.), nunquam poteſt eſſe major areâ curvilineâ, ſed hæc area eſt terminus ad quem parallelogrammorum decreſcentium ſumma ſemper accedit & quem tandem attingit, ubi parallelogramma evaneſcunt aut naſcuntur. Idem dicendum de evaneſcentibus curvarum chordis reſpectu perimetri curvilineæ.

(p) 139. Quantitates evaneſcentes concipi non debent velut determinatæ aut determinabiles quædam portiones quantitatum quæ certam & definitam parvitatem obtineant. Quaſcumque enim portiunculas linearum, ſuperficierum aut corporum acceperimus aut deſignaverimus, hæ ſemper reipsâ finitæ erunt, non evaneſcentes; itaque non ſunt intrà certos terminos quantumvis proximos coarctandæ, undè hæ quantitates ſemper ut decreſcentes ac perpetuò diminuendæ accipi debent.

(q) 140. Exempli cauſâ, gravis ſursùm projecti & ad altiſſimum locum pervenientis.

DE MOTU CORPORUM.

velocitatem ultimam intelligi eam, quâ corpus movetur, neque antequam attingit locum ultimum & motus ceſſat, neque poſtea, ſed tunc cum attingit; id eſt, illam ipſam velocitatem quâcum corpus attingit locum ultimum & quâcum motus ceſſat. Et ſimiliter per ultimam rationem quantitatum evaneſcentium, intelligendam eſſe rationem quantitatum, non antequam evaneſcunt, non poſtea, ſed quâcum evaneſcunt. Pariter & ratio prima naſcentium eſt ratio quâcum naſcuntur. Et ſumma prima & ultima eſt quâcum eſſe (vel augeri aut minui) incipiunt & ceſſant. Extat limes quem velocitas in fine motus attingere poteſt, non autem tranſgredi. Hæc eſt velocitas ultima. Et par eſt ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & ceſſantium. Cumque hic limes ſit certus & definitus, problema eſt verè geometricum eundem determinare. Geometrica verò omnia in aliis geometricis determinandis ac demonſtrandis legitimè uſurpantur.

Contendi etiam poteſt, quod ſi dentur ultimæ quantitatum evaneſcentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines: & ſic quantitas omnis conſtabit ex indiviſibilibus, contra quam *Euclides* de incommenſurabilibus, in libro decimo elementorum, demonſtravit. Verum hæc objectio falſæ innititur hypotheſi. Ultimæ rationes illæ quibuſcum quantitates evaneſcunt, revera non ſunt rationes quantitatum (r) ultimarum, ſed limites ad quos quantitatum ſine limite decreſcentium rationes ſemper appropinquant; & quas propius aſſequi poſſunt quam pro datâ quâ-

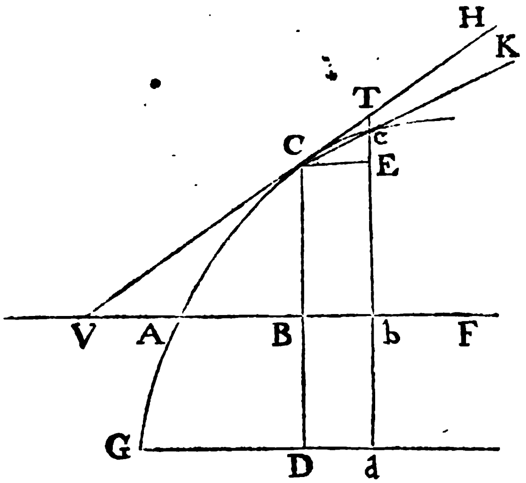
(r) 141. Seu, quantitatum determinatarum & indiviſibilium, ſed &c.

142. Ut quantitatum evaneſcentium aut naſcentium relationes atque proprietates inveniantur, conſiderantur quantitates finitæ, harum inveſtigantur relationes & proprietates & lex quâ continuò creſcunt vel decreſcunt; quibus cognitis facilè intelligitur quænam proprietates quantitatibus illis creſcentibus ac decreſcentibus ſemper conveniant, adeóque & cum in infinitum minuuntur & evaneſcunt vel cum naſcuntur. Imò verò ex Lemmate primo aliiſque ſequentibus invenitur quænam ſint proprietates quæ licèt quantitatibus finitis non conveniant, evaneſcentibus tamen & naſcentibus competunt, cum nempè quantitates finitæ decreſcentes ad illas proprietates, ut ità dicam perpetuò accedunt, & ad eas tempore dato accedunt magis quàm pro differentiâ quâvis datâ.

Ex præcedentibus Lemmatis facilè deducitur ac demonſtratur Newtoniana fluxionum methodus cujus generalia principia ut potè nobis in poſterum profutura breviter explicabimus.

143.

quâvis differentiâ, nunquam verò tranſgredi, neque priùs attingere quàm quantitates diminuuntur in infinitum. Res clariùs intelligetur in infinitè magnis. Si quantitates duæ quarum data eſt differentia augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideò dabuntur quan-



143. Quantitates indeterminatæ quæ continuò creſcunt vel decreſcunt, variabiles aut fluentes dicuntur; conſtantes verò aut determinatæ vocantur, quæ aliis continuò creſcentibus vel decreſcentibus, eædem manent. Ordinatæ B C, B D, ſuper baſi A F, motu ſibi ſemper parallelo ità progrediantur, ut ordinatâ B D, eâdem ſemper manente, punctum D, rectam G D d deſcribat, & interim continuò creſcente vel decreſcente ordinatâ B C, punctum C deſcribat curvam A C c; abſciſſa A B, ordinata B C, curvæ arcûs A c, areæ A C B, A G D B, ſunt quantitates indeterminatæ ſeu fluentes; recta verò B D, eſt quantitas conſtans.

144. Quantitates fluentes, ut A B, B C, æqualibus temporibus creſcentes & creſcendo genitæ, pro velocitate majori vel minori quâ creſcunt, ac generantur, evadunt majores vel minores; Si enim punctum B, velociùs ſemper progrediatur quam punctum C, in lineâ B C, incrementa B b, fluentis A B, majora erunt incrementis E c, fluentis B C, eodem tempore genitis. Velocitates quibus illa incrementa ut B b, E c, eodem tempore genita, primò naſcuntur, dum nempè b c, coincidit cum B C, dicuntur *fluxiones*, & methodus ex fluentibus inveniendi fluxiones, methodus fluxionum directa vocatur; methodus verò ex fluxionibus inveniendi fluentes, methodus fluxionum inverſa appellatur.

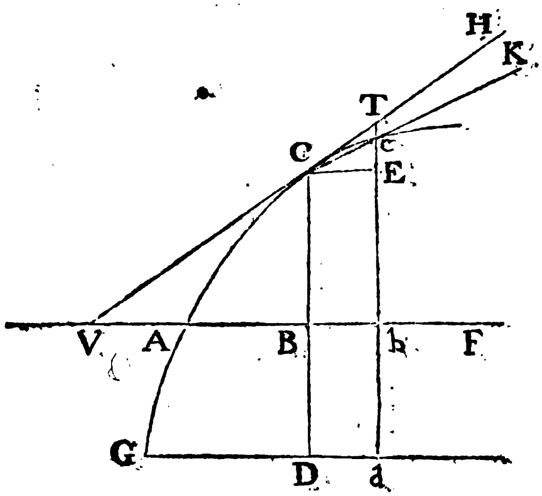
145. Velocitates quibus fluentium quantitatum incrementa eodem tempore genita, primò naſcuntur, ſunt uniformes... Dem... Cum curva A C c, motu puncti C, velocitate quâvis finitâ progredientis deſcribi poſſit, ſi illiùs puncti velocitas ſecundùm directionem C E, lineæ A B parallelam; ſupponatur uniformis, velocitas ejuſdem ſecundùm directionem E c, pro variâ curvæ A C c naturâ, varia quidem erit in diverſis curvæ punctis v. gr. in C, & c; ſed quò magis punctum c, ad C, accedet, eò minor erit velocitatis ſecundùm directionem E c, variatio in punctis C, & c, adeò ut dum punctum c, coincidit cum puncto C, omnis velocitatis per E c, variatio expiret. Quare (Lem. 1.) velocitates quibus fluentium incrementa eodem tempore genita primò naſcuntur, ſunt uniformes. Q. e. D.

146. Cum ergò velocitates uniformes ſint ſpatiis eodem tempore percurrendis proportionales (5), manifeſtum eſt fluxiones (143) eſſe in ratione incrementorum eodem tempore genitorum, dum primò naſcuntur vel ultimò evaneſcunt; adeòque ut fluxionum relatio inveniatur ſumere oportet incrementa fluentium eodem tempore genita, & primam eorum incre-

 men-

DE MOTU CORPORUM.

quantitates ultimæ ſeu maximæ quarum iſta eſt ratio. In ſequentibus igitur, ſi quando facili rerum conceptui conſulens dixero quantitates quàm minimas, vel evaneſcentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, ſed cogita ſemper diminuendas ſine limite.



mentorum naſcentium, vel ultimam evaneſcentium rationem conſiderare tanquam relationem fluxionum.

147. Hinc ſumma fluxionum eſt ut ſumma incrementorum naſcentium vel evaneſcentium, ſumma verò incrementorum omnium naſcentium eſt ipſa quantitas fluens; nam ſi tota area A c b diviſa intelligatur in parallelogramma ut B E, eorumque numerus augeatur & latitudo B b minuatur in infinitum, ſumma omnium incrementorum naſcentium B b, ab A uſque ad b, erit ipſa fluens A b, ſumma omnium incrementorum E c, ab A, uſque ad c, erit fluens b c, ſumma omnium C c, erit arcus fluens A c, & ſumma omnium parallelogrammorum B E, erit area A c b fluens (106. 107.); ergò ſumma fluxionum eſt ut ipſa quantitas fluens.

148. Quoniam in figurâ ſuperiori fluxio aliqua, vel abſciſſæ A B, vel ordinatæ C B, aut arcûs A C, ad arbitrium tanquam uniformis ſpectari poſſit, (Ex dictis 145.) patet ex pluribus fluxionibus unam tanquam conſtantem poſſe conſiderari & quantitate finitâ conſtanti exponi, dum aliæ fluxiones variâ ratione mutari & quantitatibus variabilibus exponi poſſunt.

149. Quare cum quantitates variabiles ſuas habeant fluxiones quæ rursùs poſſunt eſſe variabiles, liquet dari fluxiones fluxionum, ſeu varios imò infinitos fluxionum ordines. Fluentium finitarum fluxiones dicuntur fluxiones primæ; harum fluxiones primæ dicuntur fluentium finitarum fluxiones ſecundæ, & ità porrò in infinitum.

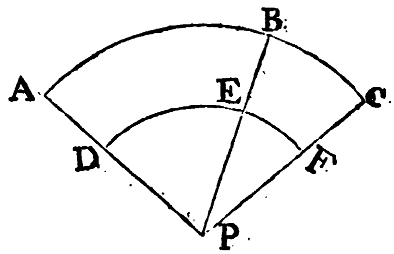
150. Ductâ rectâ V T H, quæ curvam tangat in C, ipſiſque b c & B A productis occurrat in T & V; linea b c in locum ſuum priorem B C redeat, & ultima forma triangulorum evaneſcentium C E c, C E c, C E T, eſt ſimilitudinis & ultima ratio æqualitatis (Lem. VIII.) ideóque fluxiones primæ ipſarum A B, B C,

A C, ſunt (146.) ut trianguli C E T, latera C E, E T, & C T, & per eadem latera exponi poſſunt, vel quod perindè eſt, per latera V B, C B, & V C, trianguli V B C, ſimilis triangulo C E T.

151. Quoniam areæ B b c C, B b d D, eodem tempore deſcribuntur communi ordinatarum B C, B D motu, erunt areæ illæ naſcentes vel evaneſcentes ut fluxiones arearum A C B, A B D G, (146); ſed area naſcens B b c C, non differt à parallelogrammo B E, (107); ergò fluxiones arearum A C B, A B D G, ſunt in ratione primâ parallelogrammorum B E, B d naſcentium, ſeu ob commune latus B b, in ratione ordinatarum C B, B D.

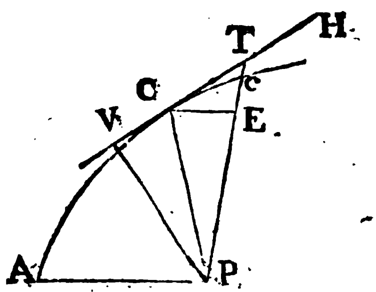
152. Si circulus centro B, radio fluente B C, deſcriptus per longitudinem abſciſſæ A B, ad angulos rectos progrediatur, deſcribet ſolidum idem quod ex rotatione figuræ A C B, circà axem A B generaretur, & fluxio ſolidi geniti erit ut factum ex areâ circuli illius in incrementum naſcens B b, abſciſſæ A B, & fluxio ſuperficiei ſolidi geniti erit ut factum ex perimetro ejuſdem circuli in arcum C c, vel tangentem C T, naſcentem... Dem.... Rectangulum naſcens B E, non differt à figurâ B b c C naſcente (107), adeòque incrementum naſcens ſolidi ex rotatione figuræ A C B, geniti æquale eſt ſolido ex rotatione rectanguli B E, circà latus B b, genito; hoc autem ſolidum eſt cylindrus æqualis facto ex areâ circuli radio C B deſcripti in altitudinem B b; ſolidi igitur motu circuli C B per axem A B geniti incrementum naſcens adeóque & ipſius fluxio (146) eſt ut factum ex areâ circuli in incrementum naſcens B b, abſciſſæ A B. Similiter cum arcus naſcens C c, cum tangente C T coincidat, (Lem. 7.) ſuperficies naſcens ex rotatione figuræ B b c C, genita æqualis eſt ſuperficiei coni truncati, adeóque æqualis facto ex ſemiſummâ peripheriarum, quarum ſunt radii B C, b c, in latus C T; ſeu ob b c = B C (107) æqualis facto ex peripheriâ circuli, cujus radius B C, in latus C T, vel arcum c t, naſcentem; ergò factum iſtud eſt incrementum naſcens ſuperficiei curvæ ex rotatione A C deſcriptæ, adeóque eſt ut illius ſuperficiei fluxio (146) Q. e. D.

153. Anguli rectilinei A P B, E P F, ſunt inter ſe, directè ut arcus A B, E F,



qui angulos ſubtendunt & reciprocè ut arcuum radii A P, E P... Dem... eſt angulus A P B, ad angulum B P C, ſeu E P F, ut arcus A B, ad arcum B C, adeóque ut A B : A P, ad B C : A P; ſed ob arcus ſimiles B C, E F, eſt B C : A P = E F : E P; ergò angulus A P B, eſt ad angulum E P F, ut A B : A P, ad E F : E P. Q. e. D.

154. Hinc ſequitur 1°. quemlibet angulum A P B exprimi poſſe arcu A B qui ipſum ſubtendit diviſo per radium A P. 2°. Quemlibet arcum circuli A B, eſſe ut factum ex angulo A P B in radium A P, atquè adeò hoc facto exprimi poſſe. 3°. Incrementum naſcens anguli fluentis A P B, adeóque & illius anguli fluxionem (146) eſſe in ratione directâ arcûs circularis naſcentis & inverſâ radii illius.



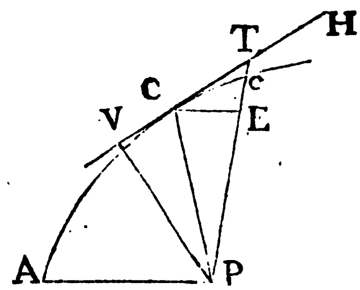
155. Recta P C fluens circà datum polum P revolvatur, & punctum illius extremum C, curvam A C c, deſcribat quam tangit in C recta V C H in quam, ex polo P, demiſſa ſit perpendicularis P V. Sit A punctum in curvâ A C c. fixum, progrediaturque recta P C de lo-

DE MOTU CORPORUM.

co ſuo P C, in locum novum P c, & producta P c, tangentem ſecet in T. Capiatur P E = P C, & producta P c, tangentem ſecet in T, Capiatur P E = P C, ſeu radio P C deſcribatur circuli arcus C E, ut habeantur E c, incrementum rectæ P C, C c, incrementum curvæ A c, P C c, incrementum areæ P A C P, angulus C P c, incrementum anguli A P C, eodem tempore genita. Redeat jam P C, in locum ſuum priorem P C, ut incrementa illa omnia evaneſcant & horum incrementorum evaneſcentium ratio ultima erit ratio fluxionum quantitatum fluentium quarum ſunt incrementa (146).

156. Quoniam autem perveniente P c, in locum P C, triangula C E c, C E T, evaneſcentia ſunt ultimò ſimilia & æqualia (Lem. 8.) circuli arcus C E, cum chordâ ipſius coincidit, ipſique æqualis eſt (Lem. 7), & prætereà evaneſcente angulo C P E, anguli P C E, P E C, ſunt inter ſe & duobus rectis æquales, adeóque C E, ad P T, normalis. Manifeſtum eſt..... 1°. Triangulum T V P eſſe triangulo T E C, adeóque & triangulo evaneſcenti c E C, ſimile, ac proinde fluxiones arcûs A C, & rectæ P C, eſſe inter ſe ut duo latera V T, T P, ſeu V C, P C... 2°. Fluxionem anguli A P C, eſſe ut C E : P C (154)... 3°. Fluxionem areæ A C P, eſſe ut factum ex rectâ C P, in normalem C E evaneſcentem; nam area trianguli P C T, æqualis dimidio rectangulo P T × C E, ſeu ob evaneſcentem E T, dimidio rectangulo P C × C E (Lem. 1.).

157. Similibus argumentis ex fluentibus calculo expreſſis fluxiones inveniri poſſunt, in quantitatibus finitis analyſim inſtituendo, & finitarum naſcentium vel evaneſcentium rationes primas vel ultimas inveſtigando. Hæc autem ſunt calculi fluxionum principia. Nimirùm ... 1°. Cum fluxiones ſint in primâ ratione incrementorum naſcentium & ultimâ evaneſcentium (146), fluxiones iis incrementis primò naſcentibus vel ultimò evaneſcentibus poſſunt exprimi... 2°.... Quantitates quæ nonniſi ſuo incremento naſcente aut evaneſcente differunt ſunt æquales (Lem. 1.)... 3°.... Quantitatum conſtantium nullæ ſunt fluxiones, nulla incrementa vel decrementa.... 4°. Si inter quantitates indeterminatas aliquæ decreſcant, dum aliæ creſcunt, decreſcentium



fluxiones ſunt negativæ, ſunt enim ut incrementa negativa, ſeu ut decrementa.

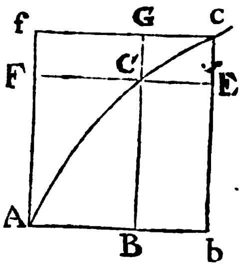
158. Quantitates fluentes deſignantur ultimis alphabeti litteris z, y, x, v; conſtantes indicantur aliis a, b, c &c. fluentium fluxiones primas aut ipſis proportionalia incrementa naſcentia vel evaneſcentia Newtonus notat iiſdem litteris quibus fluentes exponuntur, ſed iis punctuatis ſic $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{v}$; Leibnitius litteram d, incrementi naſcentis vel evaneſcentis notam characteriſticam fluentibus præponit ſic dz, dy, dx, dv. Fluxiones ſecundæ deſignantur ſic $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{v}$, vel ſic ddz, ddy, ddx, ddv; fluxiones tertiæ ſic $\dddot{z}$, $\dddot{y}$, $\dddot{x}$, $\dddot{v}$, vel ſic $dddz$, $dddy$, $dddx$, $dddv$, vel ſic d^3z, d^3y, d^3x, d^3v, & ità deinceps in infinitum.

159. Fluxio quantitatis ex pluribus terminis per additionem vel ſubtractionem compoſitæ, æqualis eſt omnibus ſingulorum terminorum fluxionibus per eadem ſigna + vel − junctis; ità fluxio quantitatis compoſitæ $a+z-y$, erit $dz-dy$... Dem... Totius quantitatis $a+z-y$, incrementum tempore dato genitum æquale eſt differentiæ incrementorum ipſarum z & y, cum nullum ſit conſtantis a, incrementum (156) adeóque incrementum naſcens vel evaneſcens quantitatis $a+z-y$, æquale eſt differentiæ incrementorum naſcentium vel evaneſcentium ipſarum z & y, ſed fluxiones ſunt in primâ ratione incrementorum naſcentium (145), ergò fluxio totius quantitatis $a+z-y$, eſt $dz-dy$. Q. e. D. Si creſcente quantitate z, decreſceret y, ipſius y, fluxio foret negativa nempe $-dy$ (157) adeóque fluxio

dz

$dz - dy$, fieret $dz + dy$. Quod in ſequentibus ſemper eſt obſervandum.

160. Fluxio quantitatis fluentis ex pluribus variabilibus per multiplicationem compoſitæ, æqualis eſt ſummæ factorum ex ſingularum variabilium componentium fluxionibus in aliarum variabilium facta ductis, hoc eſt fluxio quantitatis zy, eſt $zdy + ydz$, fluxio quantitatis az eſt adz, fluxio quantitatis zyx eſt $yxdz + zxdy + zydx$ ... Dem. ... Recta CB, fluens ſuper rectâ AB cui normalis eſt, progrediatur, illiuſque punctum extremum C, deſcribat curvam ACc, perveniat BC in locum bc, & compleantur rectangula BF, bf, BE, cf, EG;



AB, dicatur z, BC dicatur y, adeóque rectangulum BF erit zy. Dum BC, pervenit in bc, incrementum rectanguli BF ſeu zy, æquale eſt ſummæ rectangulorum BE, EG, Cf; eſt autem rectangulum EG, ad rectangulum EB, ut Ec ad BC, & ad rectangulum Cf ut CE, vel Bb, ad FC, ſeu AB; quarè redeunte bc, in locum ſuum priorem BC, & decreſcentibus continuò Ec, & EC atque tandem ultimò evaneſcentibus, decreſcit quoque & tandem evaneſcit, ſeu fit inaſſignabilis ratio rectanguli EG, ad rectangula EB & cf; adeóque (Lem. 1.) ſumma duorum rectangulorum BE, cf, fit ultimò æqualis ſummæ trium rectangulorum BE, EG, Cf; ergò incrementum naſcens rectanguli BF, ſeu zy, æquale eſt ſummæ duorum rectangulorum BE, Cf, naſcentium, ſeu ſummæ factorum ex z, in incrementum naſcens ipſius y, & ex y, in incrementum naſcens ipſius z, adeóque fluxio facti zy (146) eſt $zdy + ydz$. Undè etiam fluxio az, eſt adz, quia a, conſtans nullam habet fluxionem. Q. e. D.

Jam in facto zyx ponatur $zy = v$, & erit $zyx = vx$, adeóque fluxio facti zyx æqualis fluxioni facti vx; fluxio autem facti vx, eſt $xdv + vdx$, & fluxio facti $zy = v$, eſt $zdy + ydz = dv$, id eſt ſi in fluxione $xdv + vdx$, pro v & dv ſcribantur zy, & $zdy + ydz$, fluxio facti zyx, nempè $xdv + vdx$, erit $xzdy + yxdz + zydx$; & par eſt ratio aliorum factorum quorumcumque Q. e. D.

LIBER PRIMUS.

161. Cor 1 ... Ponantur ſingulæ fluentes z, y, x, &c. ſibi mutuò ſemper æquales & ipſius zz, fluxio erit $zdz + zdz = 2zdz$: fluxio cubi z^3 erit $zzdz + zzdz = 3zzdz = 3z^{3-1}dz$: fluxio potentiæ z^4 erit $4z^3dz = 4z^{4-1}dz$: & eodem argumento fluxio potentiæ cujuſcumque z^m erit $mz^{m-1}dz$.

162. Cor. 2 .... Fluxio quantitatis $z^{\frac{1}{2}}$, eſt $\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}-1}dz = \frac{dz}{2z^{\frac{1}{2}}}$ nam ponatur $z^{\frac{1}{2}} = y$ & erit $z = yy$, $dz = 2ydy$ (161) $dy = d.(z^{\frac{1}{2}}) = dz : 2y = dz : 2z^{\frac{1}{2}}$ & generaliter fluxio quantitatis $z^{m:n}$ eſt $\frac{m}{n}z^{\frac{m}{n}-1}dz = \frac{m}{n}z^{\overline{m-n}:n}dz$.

163. Cor. 3 ... Fluxio fractionis $z:y$ ſeu zy^{-1} eſt $\overline{ydz - zdy} : yy$. Nam fiat $z : y = x$, erit $z = yx$, $dz = ydx + xdy$ & $dx = \underline{dz : y - xdy} : y = dz : y - zdy : yy = \overline{ydz - zdy} : yy$: fluxio quantitatis az^my^n eſt $amy^nz^{m-1}dz + anz^my^{n-1}dy$ (160).

164. Fluxiones ſecundæ ex primis fluxionibus, tertiæ ex ſecundis, iiſdem regulis colliguntur quibus primæ fluxiones ex fluentibus finitis eruuntur. Ubi tamen ſic pergitur ad fluxiones ſecundas, tertias & ſequentes, convenit quantitatem aliquam ut uniformiter fluentem conſiderare, & pro ejus fluxione primâ unitatem ſcribere, pro ſecundâ verò & ſequentibus nihil (148). Exemplum unicum afferemus; ſit quærenda fluxio fluxionis $ydy : dx$, ſupponendo quantitatem x uniformiter fluere, adeóque dx conſtantem ſeu $= 1$, invenitur fluxio $yddy + dy^2 : dx$.

165. Ex fluxionibus fluentes inveniuntur operationes inſtituendo iis contrarias quibus ex fluentibus reperiuntur fluxiones; quarè, litterâ S, ſignificante fluentem fluxionis cui præponitur ſeu ſummam primam incrementorum naſcentium, vel ultimam evaneſcentium (147) methodi fluxionum inverſæ fundamentales formulæ erunt.

1\. $S.\, dz = z.$ & $S.\, adz = az.$ $S.\, dz : a = z : a.$

2\. $S.\, mz^{m-1}\, dz = z^m,$
& $S.\, maz^{m-1}\, dz = az^m,$
& $S.\, \frac{m}{n} z^{m-n:n}\, dz = z^{m:n}.$

3\. $S.\, (dz \mp dy) = z \mp y.$
4\. $S.\, (zdy + ydz) = yz.$
& $S.\, (amy^n z^{m-1}\, dz + anz^m y^{n-1}\, dy) = az^m y^n.$
5\. $S.\, (ydz - zdy) : yy = z : y.$

166\. Si fluxio cujus fluens quæritur nulli harum formularum ſimilis fuerit, per novarum variabilium ſubſtitutionem aliaſque artes quas hic tractare nobis non licet, ad illas ſæpè reduci poteſt. Sit in exemplum fluxio $\overline{cb + cx}^{\frac{1}{2}} \times dx$, ponatur $\overline{cb + cx}^{\frac{1}{2}} = z$ & erit $cb + cx = zz$, & $cdx = 2zdz$, & $dx = \frac{2zdz}{c}$ adeóque $\overline{cb + cx}^{\frac{1}{2}} \times dx = 2zzdz : c.$ Hæc autem fluxio ſimilis eſt formulæ $maz^{m-1}\, dz$, eſtque $z^2 = z^{m-1}$, adeóque $m = 3$, $ma = 3a = 2 : c$, & $a = 2 : 3c$, adeóque $S.\, maz^{m-1}\, dz = az^m = 2z^3 : 3c$ loco z, ſcribatur ipſius valor $\overline{cb + cx}^{\frac{1}{2}}$, & invenietur $S.\, \overline{cb + cx}^{\frac{1}{2}} \times dx = \frac{2}{3c} (cb + cx) \times \overline{cb + cx}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} (b + x) \times \overline{cb + cx}^{\frac{1}{2}}.$

167\. Superiorum formularum auxilio ex fluxionibus ſecundis primæ, ex tertiis ſecundæ &c. inveniuntur. Exempla ſint $S.\, ddx = dx.$ $S.\, dx.ddx = \frac{1}{2} dxdx = \frac{1}{2} dx^2.$ Nam ponatur $dx = y$, & erit $ddx = dy$, & $dxddx = ydy$, & per formulam ſecundam invenitur $S : ydy = \frac{1}{2} yy$, & ſi loco y ſubſtituatur ipſius valor, dx, erit $S.\, ydy = S.\, dxddx = \frac{1}{2} dx^2.$ Similiter. $S.\, (dy^2 + yddy) : dx = ydy : dx$, ſupponendo dx conſtantem, nam fiat $ddy = dv$, adeóque $dy = v$, & fluxio propoſita evadet, $\overline{vdy + ydv} : dx$, cujus fluens (per formulam 4am) eſt $vy : dx$, ob dx conſtantem. Cum autem ſit $v = dy$, erit $vy : dx = ydy : dx.$

168\. Poſtquam fluentes ex fluxionibus collectæ ſunt, ſi de veritate concluſionis dubitatur, fluxiones fluentium inventarum viciſſim colligendæ ſunt, & cùm fluxionibus ſub initio propoſitis comparandæ. Nam ſi prodeunt æquales, concluſio rectè ſe habet; ſin minus, corrigendæ ſunt fluentes ſic, ut earum fluxiones fluxionibus ſub initio propoſitis æquentur. Nam & fluens pro lubitu aſſumi poteſt, & aſſumptio corrigi, ponendo fluxionem fluentis aſſumptæ æqualem fluxioni propoſitæ, & terminos homologos inter ſe comparando.

169\. Quoniam conſtantis quantitatis nulla eſt fluxio, & eadem proinde fluxio dz ex fluentibus z, & $z \mp a$, colligitur; fluens omnis quæ ex fluxione primâ colligitur, augeri poteſt vel minui quantitate aliquâ conſtante; quæ ex fluxione ſecundâ colligitur, augeri poteſt vel minui quantitate cujus fluxio ſecunda nulla eſt; quæ ex fluxione tertia colligitur, augeri poteſt vel minui quantitate cujus fluxio tertia nulla eſt. Et ſic deinceps in infinitum.

170\. Cum fluens compoſita, quæ ex propoſitâ fluxione collecta eſt, unicam variabilem includit, ut fluens $\frac{2}{3} (b + x) \times \overline{bc + cx}^{\frac{1}{2}}$, quæ (166) deducta eſt ex fluxione $\overline{cb + cx}^{\frac{1}{2}} \times dx$, ita determinari ſolet conſtans adjungenda vel detrahenda: in fluente inventâ loco variabilis x, ponitur o; tum ſi fluens ipſa ſit etiam o, completa eſt. Si quid verò reſiduum fuerit, ut hic remanet $+ \frac{2}{3} b \sqrt{bc}$, hoc reſiduum cum ſigno contrario fluenti primò inventæ adjicitur, ut habeatur fluens completa, $\frac{2}{3} (b + x) \times \overline{bc + cx}^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} b \sqrt{bc}.$ Hujus regulæ ratio eſt, quod fluens inventa ſupponi poſſit exhibere aream curvæ alicujus, cujus ſit abſciſſa variabilis x, adeo ut dum $x = 0$, area, fluente expreſsâ, ſit etiam o; unde ſi in fluente primò inventâ loco x, ſubſtituatur o, ſitque aliquod reſiduum, illud ex fluente detrahi debet. Generaliter, quantitas conſtans adjicienda vel ſubducenda ex naturâ quæſtionis determinatur, aut arbitraria eſt.

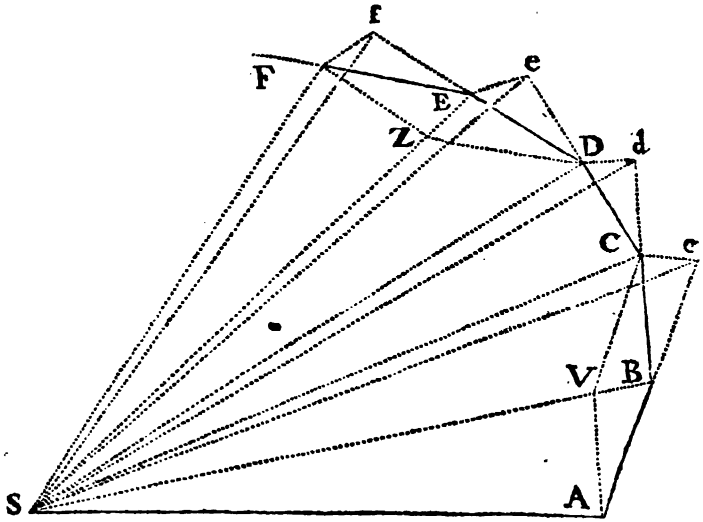
SEC

SECTIO II.

De inventione virium centripetarum.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

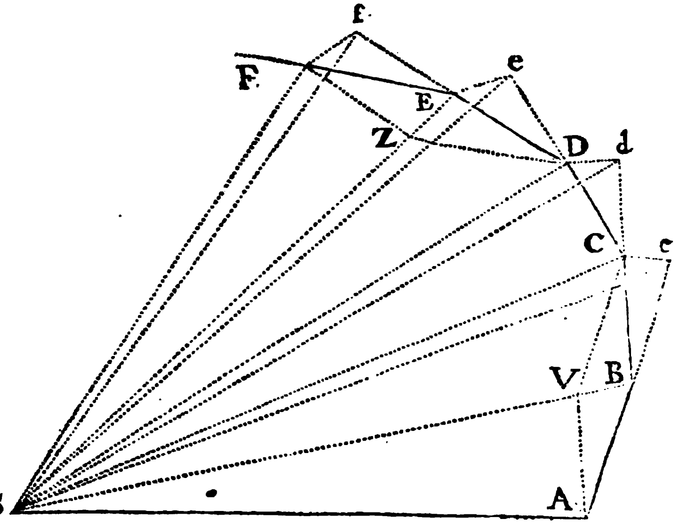
Areas, quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis deſcribunt, & in planis immobilibus conſiſtere, & eſſe temporibus proportionales.



Dividatur tempus in partes æquales, & primâ temporis parte deſcribat corpus vi inſitâ rectam *A B*. Idem ſecundâ temporis parte, ſi nil impediret, rectâ pergeret ad *c*, (per leg. 1.) deſcribens lineam *B c* æqualem ipſi *A B*; adeò ut radiis *A S*, *B S*, *c S* ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ *A S B*, *B S c*. Verum ubi corpus venit ad *B*, agat vis centripeta impulſu unico ſed magno, efficiatque ut corpus de recta *B c* declinet & pergat in rectâ *B C*. Ipſi *B S* parallela agatur *c C*, occurrens *B C* in *C*; & completâ ſecundâ temporis parte, corpus (per legum corol. 1.) reperietur in *C*, in eodem ([a]) plano cum triangulo *A S B*. Junge *S C*; & triangulum *S B C*, ob parallelas *S B*, *C c*, æquale erit triangulo *S B c*, atque ideo etiam

([a]) 171. Reperitur in C, in eodem plano cum triangulo A S B; nam diagonalis B C, quam viribus conjunctis mobile deſcribit eſt in plano parallelogrammi V B C c, cujus latera B V, B c, viribus ſeparatis deſcribenda, ſunt in plano trianguli A S B.

etiam triangulo SAB. Simili argumento ſi vis centripeta ſucceſſivè agat in C, D, E, &c. faciens ut corpus ſingulis temporis particulis ſingulas deſcribat rectas CD, DE, EF, &c. jacebunt hæ omnes in eodem plano; & triangulum SCD triangulo SBC, & SDE ipſi SCD, & SEF ipſi SDE æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto



deſcribuntur: & componendo, ſunt arearum ſummæ quævis $SADS$, $SAFS$ inter ſe, ut ſunt tempora deſcriptionum. Augeatur jam numerus & minuatur latitudo triangulorum in infinitum; & eorum ultima perimeter ADF, (per corollarium quartum lemmatis tertii) erit linea curva: ideóque vis centripeta, quâ corpus à tangente hujus curvæ perpetuò retrahitur, aget indeſinenter; areæ verò quævis deſcriptæ $SADS$, $SAFS$ temporibus deſcriptionum ſemper proportionales, erunt iiſdem temporibus in hoc caſu proportionales. *Q. E. D.*

Corol. 1. Velocitas corporis in centrum immobile attracti eſt in ſpatiis non reſiſtentibus reciprocè ut perpendiculum à centro illo in orbis tangentem rectilineam demiſſum. (b) Eſt enim velocitas in locis illis A, B, C, D, E, ut ſunt baſes æ-

(b) 172. Eſt enim velocitas in locis illis A, B, C, D, E, ut ſunt baſes æqualium triangulorum AB, BC, CD, DE, EF, æqualibus temporibus uniformi motu deſcriptæ (5); æqualium autem triangulorum baſes ſunt reciprocè ut eorum altitudines, hoc eſt, reciprocè ut perpendicula ex centro virium S, in baſes demiſſa.

qualium triangulorum AB, BC, CD, DE, EF; & hæ baſes ſunt reciproce ut perpendicula in ipſas demiſſa. LIBER PRIMUS.

Corol. 2. Si arcuum duorum æqualibus temporibus in ſpatiis non reſiſtentibus ab eodem corpore ſucceſſivè deſcriptorum chordæ AB, BC compleantur in parallelogrammum $ABCU$, & hujus diagonalis BU in eâ poſitione quam ultimò habet ubi arcus illi in infinitum diminuuntur, producatur utrinque; ([c]) tranſibit eadem per centrum virium.

Corol. 3. Si arcuum æqualibus temporibus in ſpatiis non reſiſtentibus deſcriptorum chordæ AB, BC ac DE, EF compleantur in parallelogramma $ABCU$, $DEFZ$; vires in B & E ſunt ad invicem in ultimâ ratione diagonalium BU, EZ, ubi arcus iſti in infinitum diminuuntur. Nam corporis motus BC & EF componuntur (per legum corol. 1.) ex motibus Bc, BU & Ef, EZ: atqui BU & EZ, ipſis Cc & Ff æquales, in demonſtratione propoſitionis hujus generabantur ab impulſibus vis centripetæ in B & E, ideóque ſunt his impulſibus proportionales.

Corol. 4. Vires quibus corpora quælibet in ſpatiis non reſiſtentibus à motibus rectilineis retrahuntur ac detorquentur in orbes curvos, ſunt inter ſe ut arcuum æqualibus temporibus deſcriptorum ſagittæ illæ quæ convergunt ad centrum virium, & chordas biſecant ubi arcus illi in infinitum diminuuntur. ([d]) Nam hæ ſagittæ ſunt ſemiſſes diagonalium, de quibus egimus in corollario tertio.

Corol.

ſa. Cum igitur evaneſcentibus triangulis A S B, B S C &c. ultima perimeter A B C D E F, ſit linea curva quam (113) rectæ A c, B d, C e, D f, tangunt in punctis A, B, C, D, E, manifeſtum eſt velocitates in illis punctis eſſe reciproce ut perpendicula à centro S, in tangentes demiſſa.

([c]) 173. Tranſibit eadem per centrum virium. Nam ex demonſtratione propoſitionis hujus, ſumptâ BV=Cc, erit VC, æqualis & parallela lineæ B c, ſeu A B, adeóque V A, B C, erunt etiam æquales & parallelæ, & B V, quæ producta tranſit per centrum S, erit diagonalis parallelogrammi A B C V.

174. Si ducantur per puncta quævis B, & D, perimetri curvæ vel diverſarum curvarum tangentes B c, D e, & demittantur angulorum contactuum ſubtenſæ C c, E e, radiis S B, S D, ad centrum virium convergentibus parallelæ, ſintque arcus B C, D E, æqualibus temporibus deſcripti, patet ex corollario 3. vires centripetas in B & D, eſſe ad invicem in ultimâ ratione ſubtenſarum C c, E e.

([d]) 175. Nam hæ ſagittæ ſunt ſemiſſes diagonalium B V, E Z; diagonales enim A C, D F, quæ ſunt chordæ arcuum evaneſcentium A B C, D E F, alias diagonales B V, E Z, biſecant.

 176.

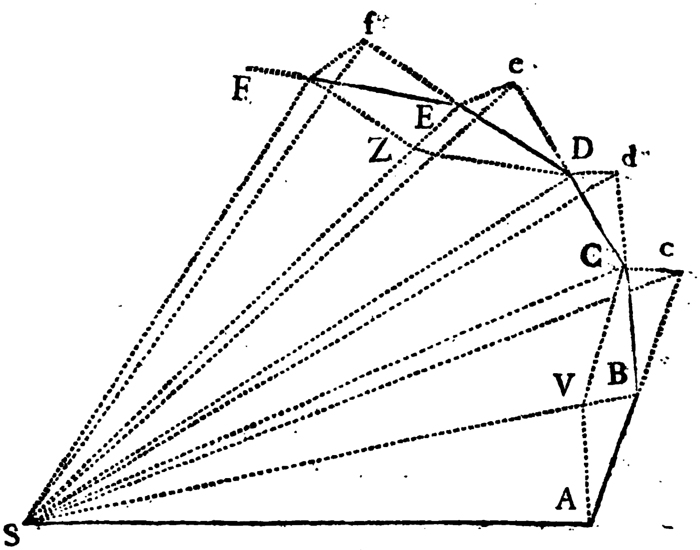
DE MOTU CORPORUM.

Corol. 5. Ideoque vires eædem ſunt ad (e) vim gravitatis, ut hæ ſagittæ ad ſagittas horizonti perpendiculares arcuum parabolicorum, quos projectilia eodem tempore deſcribunt.

Corol. 6. Eadem omnia obtinent per legum corol. v. ubi plana, in quibus corpora moventur, unà cum centris virium, quæ in ipſis ſita ſunt, non quieſcunt, ſed moventur uniformiter in directum.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Corpus omne, quod movetur in lineâ aliquâ curvâ in plano deſcriptâ, & radio ducto ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, deſcribit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur à vi centripetâ tendente ad idem punctum. Caſ.



(e) 176. Vis enim gravitatis per lineas parallelas ad horizontem perpendiculares agit & gravia obliquè projecta parabolas deſcribunt (40), quod etiam in figurâ ſuperiori contingeret, ſi centrum virium S, in infinitum abiret, & vis centripeta in omnibus punctis A, B, C, D, eadem maneret.

177.

Caſ. 1. Nam corpus omne, quod movetur in lineâ curvâ, detorquetur de curſu rectilineo per vim aliquam in ipſum agentem (per leg. 1.) Et vis illa, quâ corpus de curſu rectilineo detorquetur, & cogitur triangula quam minima *SAB*, *SBC*, *SCD*, &c. circa punctum immobile *S* temporibus æqualibus æqualia deſcribere, (f) agit in loco *B* ſecundum lineam parallelam ipſi *c C* (per prop. XL. lib. 1. elem. & leg 11.) hoc eſt, ſecundum lineam *BS*; & in loco *C* ſecundum lineam ipſi *d D* parallelam, hoc eſt, ſecundum lineam *SC*, &c. Agit ergo ſemper ſecundum lineas tendentes ad punctum illud immobile *S*. *Q.E.D.*

Caſ. 2. Et, per legum corollarium quintum, perinde eſt, ſive quieſcat ſuperficies, in quâ corpus deſcribit figuram curvilineam, ſive moveatur eadem unà cum corpore, figurâ deſcriptâ, & puncto ſuo *S* uniformiter in directum.

Corol. 1. In ſpatiis vel mediis non reſiſtentibus, ſi areæ non ſunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concurſum radiorum; (g) ſed indè declinant in conſequentia, ſeu verſus plagam in quam fit motus, ſi modo arearum deſcriptio acceleratur: ſin retardatur, declinant in antecedentia.

Corol.

(f) 177. Agit in loco B, ſecundùm lineam parallelam ipſi C c, hoc eſt, ſecundùm lineam B S; nam ſolâ vi inſitâ in A, corpus uniformi cum motu progrederetur per rectam A B c, & æqualibus temporibus æquales lineas A B, B c, deſcriberet; verùm per vim centripetam in B, detorquetur à rectâ B c, ut aliam rectam B C, eodem tempore deſcribat quo deſcripſiſſet B c; adeóque junctâ C c, vis centripeta agit in B, ſecundùm directionem parallelam ipſi C c (per coroll. 1. Leg.), ſed ob A B = B c, & ob triangulum S B C, æquale triangulo S A B, (per hyp.), erit triangulum S A B = triang. S B c = triang. S B C, adeóque per prop. 40. vel 39. lib. 1. Elem. communis triangulorum S B C, S B c æqualium baſis B S, parallela eſt rectæ C c, quæ illorum triangulorum vertices jungit; cum igitur, per demonſtrata, vis centripeta in B, agat ſecundùm directionem parallelam lineæ C c, neceſſum eſt ut agat ſecundùm directionem rectæ B S, hoc eſt, ut tendat ad centrum S.

(g) 178. Sed indè declinant in conſequentia, ſi modò arearum deſcriptio acceleratur: ſin retardatur, declinant in antecedentia. Nam ſi triangulum S B C, æquale non eſt triangulo S A B, ſeu S B c, eodem tempore deſcripto, recta C c, non erit parallela lineæ B S, ſed producta cum lineâ S B, ità converget ut tendat in plagam motûs, ſi triangulùm S B C, triangulo S B c, majus eſt, & tendat in plagam contrariam ſi triangulum S B C, triangulo S B c, minus. Quarè vis centripeta in B, agens ſecundùm directionem parallelam lineæ C c, in primo caſu declinat in conſequentia, in ſecundo caſu declinat in antecedentia.

De Motu Corporum.

Corol. 2. (h) In mediis etiam reſiſtentibus, ſi arearum deſcriptio acceleratur, virium directiones declinant à concurſu radiorum verſus plagam, in quam fit motus.

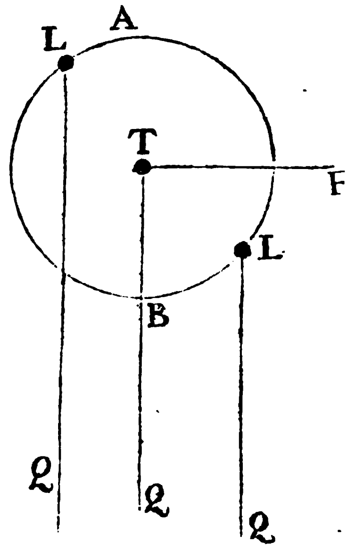
Scholium.

Urgeri poteſt corpus à vi centripetâ compoſitâ ex pluribus viribus. In hoc caſu ſenſus propoſitionis eſt, quod vis illa quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum *S*. (i) Porro ſi vis aliqua agat perpetuò ſecundum lineam ſuperficiei deſcriptæ perpendicularem; hæc faciet ut corpus deflectatur à plano ſui motus: ſed quantitatem ſuperficiei deſcriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compoſitione virium negligenda eſt.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

Corpus omne, quod radio ad centrum corporis alterius utcunque moti ducto deſcribit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi compoſitâ ex vi centripetâ tendente ad corpus illud alterum, & ex vi omni acceleratrice quâ corpus illud alterum urgetur.

(k) Sit corpus primum *L*, & corpus alterum *T*: & (per



(h) 179. Cum enim medium reſiſtat accelerationi deſcriptionis arearum, liquet arearum deſcriptionem etiam ſublatâ medii reſiſtentiâ accelerari oportere, ac proindè per Coroll. 1. virium directiones declinare à concurſu radiorum, in S, verſùs plagam in quam fit motus.

(i) 180. Porrò ſi vis illa perpetuò ſecundùm lineam ſuperficiei deſcriptæ perpendicularem agat, planum ſubjectum duntaxat premit, & corpus in illo plano motum in neutram partem impellit, ac proindè nec ſuperficiei deſcriptæ quantitatem auget nec minuit, & productà in compoſitione virium in plano agentium negligenda eſt.

(k) 181. Corpus L, circà alterum T, in curvâ A L B, itá revolvatur, ut circà illius centrum T, ſemper deſcribat areas temporibus proportionales, dùm interim corpus T, urgetur vi acceleratrice ſecundùm directionem T Q, & per Leg. Coroll. 6. ſi vi novâ acceleratrice quæ æqualis & contraria ſit illi quâ corpus T ſecundùm directionem T Q urgetur, urgea-

legum corol. VI.) ſi vi novâ, quæ æqualis & contraria ſit illi, quâ corpus alterum *T* urgetur, urgeatur corpus utrumque ſecundum lineas parallelas; perget corpus primum *L* deſcribere circa corpus alterum *T* areas eaſdem ac prius: vis autem, qua corpus alterum *T* urgebatur, jam deſtruetur per vim ſibi æqualem & contrariam; & propterea (per leg. I.) corpus illud alterum *T* ſibimet ipſi jam relictum vel quieſcet, vel movebitur uniformiter in directum: & corpus primum *L* urgente differentiâ virium, id eſt, urgente vi reliquâ perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum *T* deſcribere. Tendit igitur (per theor. II.) differentia virium ad corpus illud alterum *T* ut centrum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi corpus unum *L* radio ad alterum *T* ducto deſcribit areas temporibus proportionales; atque de vi totâ (ſive ſimplici, ſive ex viribus pluribus juxta legum corollarium ſecundum compoſitâ) quâ corpus prius *L* urgetur, ſubducatur (per idem legum corollarium) vis tota acceleratrix, qua corpus alterum urgetur: vis omnis reliqua, quâ corpus prius urgetur, tendet ad corpus alterum *T* ut centrum.

Corol. 2. Et, ſi areæ illæ ſunt temporibus quamproximè proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum *T* quamproximè.

Corol. 3. Et vice verſa, ſi vis reliqua tendit quamproximè ad corpus alterum *T*, erunt areæ illæ temporibus quamproximè proportionales.

Corol. 4. Si corpus *L* radio ad alterum corpus *T* ducto deſcribit areas, quæ cum temporibus collatæ ſunt valde inæquales; & corpus illud alterum *T* vel quieſcit, vel movetur uniformiter

geatur corpus utrumque ſecundùm lineas parallelas Q T, Q L; perget corpus L, deſcribere circà corpus T, areas eaſdem ac priùs; vis autem acceleratrix quâ corpus T urgebatur jam deſtruetur per vim ſibi æqualem & contrariam; & proptereà, per Leg. I. corpus illud T, ſibimet ipſi jam relictum vel quieſcet vel movebitur uniformiter in directum; nimirum quieſcet, ſi nullâ aliâ vi præter acceleratricem ſecundùm directionem T Q, antè urgebatur; movebitur verò æquabiliter per rectam aliquam T F, ſi præter vim acceleratricem per T Q, agentem, aliâ vi non acceleratrice ferebatur juxtà directionem T F, &c.

formiter in directum: actio vis centripetæ ad corpus illud alterum *T* tendentis vel nulla eſt, vel miſcetur & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: viſque tota ex omnibus, ſi plures ſunt vires, compoſita ad aliud (ſive immobile ſive mobile) centrum dirigitur. Idem obtinet, ubi corpus alterum motu quocunque movetur; ſi modo vis centripeta ſumatur, quæ reſtat poſt ſubductionem vis totius in corpus illud alterum *T* agentis.

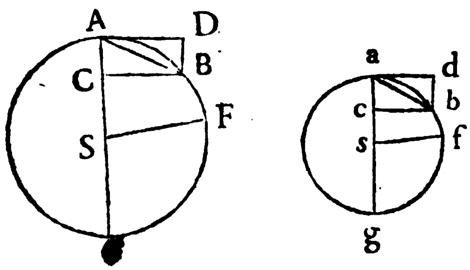
Scholium.

Quoniam æquabilis arearum deſcriptio index eſt centri, quod vis illa reſpicit, quâ corpus maximè afficitur, quâque retrahitur à motu rectilineo, & in orbita ſua retinetur; quidni uſurpemus in ſequentibus æquabilem arearum deſcriptionem ut indicem centri, circum quod motus omnis circularis in ſpatiis liberis peragitur?

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Corporum, quæ diverſos circulos æquabili motu deſcribunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere; & eſſe inter ſe, ut ſunt arcuum ſimul deſcriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.

(1) Tendunt hæ vires ad centra circulorum per prop. II. & corol. 2. prop. I. & ſunt inter ſe ut arcuum æqualibus tempo-



(1) 182. Corpora duo A & a, circulos A B G A, a b g a, æquabili motu deſcribant, & areæ ſeu ſectores A S F, F S G, & a s f, f s g, erunt in ſingulis circulis ut arcus A F, F G, & a f, f g; hoc eſt (5) ut tempora quibus deſcribuntur, ac proindè vires quibus corpora A & a, in peripheriis A B G A, a b g a retinentur tendunt ad contra S & s. Sint arcus A B, a b, æqualibus temporibus quam minimis deſcripti, & ductis tangentibus A D, a d, & ad eas perpendicularibus B D, b d, completiſque parallelogrammis C D, c d, vires centripetæ in A & a, erunt inter ſe ut rectæ D B, d b, ſeu ut ſinus verſi A C, a c, (174). Verum

poribus quàm minimis deſcriptorum ſinus verſi per corol. 4. prop. 1. hoc eſt, ut quadrata arcuum eorundem ad diametros circulorum applicata per lem. VII. & propterea, cum hi arcus ſint ut arcus temporibus quibuſvis æqualibus deſcripti, & diametri ſint ut eorum radii; vires erunt ut arcuum quorumvis ſimul deſcriptorum quadrata applicata ad radios circulorum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Cum arcus illi ſint ut velocitates corporum, vires centripetæ erunt in ratione compoſitâ ex duplicatâ ratione velocitatum directè, & ratione ſimplici radiorum inversè. (m)

Corol. 2. (n) Et, cum tempora periodica ſint in ratione compoſitâ ex ratione radiorum directè, & ratione velocitatum inversè; (o) vires centripetæ ſunt in ratione compoſitâ ex ratione radiorum directè, & ratione duplicatâ temporum periodicorum inversè.

Corol. 3. (p) Unde ſi tempora periodica æquentur, & prop-

rùm ductis chordis A B, a b, eſt A C : A B = A B : A G, & a c : a b = a b : a g, undè $AC = \frac{AB^2}{AG}$, & $ac = \frac{ab^2}{ag}$; cum igitur chordæ & arcus naſcentes æquales ſint (per Lem. VII.) erit A C : a c, hoc eſt, vis centripeta in A, ad vim centripetam in a, ut quadratum arcûs evaneſcentis A B diametro A G diviſum, ad quadratum arcus evaneſcentis, a b, diametro a g, diviſum & propterea cum hi arcus &c.

(m) 183. Vis centripeta quâ corpus in peripheriâ circuli uniformiter incedens retinetur, eſt in omnibus peripheriæ punctis eadem, ut pote ſemper proportionalis conſtantis velocitatis quadrato ad radium conſtantem applicato.

(n) 184. Tempora periodica, hoc eſt, tempora quibus integræ peripheriæ deſcribuntur ſunt in ratione compoſitâ ex ratione radiorum directè & ratione velocitatum inversè. Nam (5) velocitates ſunt ut peripheriæ ad tempora periodica applicatæ, ſed peripheriæ ſunt ut radii, ergo velocitates ſunt ut radii ad tempora periodica applicati, ac proindè tempora periodica ſunt ut radii directè & velocitates inversè. Si corporum A & a, tempora periodica dicantur T & t, celeritates C & c, radii A S, a s, dicantur R & r, erit $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$ ideóque $T : t = \frac{R}{C} : \frac{r}{c}$.

(o) 185. Vires centripetæ ſunt reciprocè ut quadrata temporum periodicorum applicata ad circulorum radios; nam vires centripetæ corporum A & a, dicantur V & v, erit (per coroll. 1.) $V : v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$, ſed quoniam (184) $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$, adeóque $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$, erit $\frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r} = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$, ergò $V : v = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2} = t^2 R : T^2 r = \frac{t^2}{r} : \frac{T^2}{R}$.

(p) 186. Undè ſi tempora periodica æquentur & propterea (184) velocitates ſint ut radii, erunt etiam vires centripetæ ut radii, nam cum ſit (185) $V : v = t^2 R : T^2 r$, ſi $T^2 = t^2$, erit $V : v = R : r$.

Et

propterea velocitates ſint ut radii; erunt etiam vires centripetæ ut radii: & contra.

Corol. 4. (q) Si & tempora periodica, & velocitates ſint in ratione ſubduplicatâ radiorum; (r) æquales erunt vires centripetæ inter ſe: & contra.

Corol. 5. (ſ) Si tempora periodica ſint ut radii, & propterea velocitates æquales; vires centripetæ erunt reciprocè ut radii: & contra.

Corol. 6. (t) Si tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicatâ radiorum, & propterea velocitates reciprocè in radiorum ratione ſubduplicatâ; (u) vires centripetæ erunt reciprocè ut quadrata radiorum: & contra.

Corol.

Et contrà ſi vires centripetæ ſint ut radii, tempora periodica æquantur. Cum enim ſit (185) $V:v=t^2R:T^2r$, ſi ponatur $V:v=R:r$, erit $R:r=t^2R:T^2r$, undè $rt^2R=RT^2r$, adeóque $t^2=T^2$, & $t=T$.

(q) 187. Si tempora periodica ſint in ratione ſubduplicatâ radiorum, velocitates erunt in eâdem ratione. Nam (184) $C:c=\frac{R}{T}:\frac{r}{t}$ adeóque $C^2:c^2=\frac{R^2}{T^2}:\frac{r^2}{t^2}$. Undè ſi fuerit $T:t=R^{\frac{1}{2}}:r^{\frac{1}{2}}$ ac proindè $T^2:t^2=R:r$, erit $C^2:c^2=R:r$.

Et contrà ſi fuerit $C^2:c^2=R:r$, erit $\frac{R^2}{T^2}:\frac{r^2}{t^2}=R:r$, adeóque $\frac{R}{T^2}=\frac{r}{t^2}$, & $Rt^2=rT^2$, undè $T^2:t^2=R:r$.

(r) 188. Si & tempora periodica ac proindè velocitates (187) ſint in ratione ſubduplicatâ radiorum, æquales erunt vires centripetæ inter ſe. Cum ſit (185) $V:v=t^2R:T^2r$, ſi ponatur $T^2:t^2=R:r$, erit $t^2R=T^2r$, undè $V=v$.

Et contrà ſi $V=v$, cum ſit (185) $V:v=t^2R:T^2r$, erit $t^2R=T^2r$, & proindè $T^2:t^2=R:r$.

(ſ) 189. Si tempora periodica ſunt ut radii & propterea (184) velocitates æquales, vires centripetæ erunt reciprocè ut radii. Quoniam enim (per coroll. 1.) $V:v=\frac{C^2}{R}:\frac{c^2}{r}$, ſi $C^2=c^2$, erit $V:v=\frac{1}{R}:\frac{1}{r}$.

Et contrà ſi fuerit $V:v=\frac{1}{R}:\frac{1}{r}$, cum ſit (coroll. 1.) $V:v=\frac{C^2}{R}:\frac{c^2}{r}$, erit $\frac{1}{R}:\frac{1}{r}=\frac{C^2}{R}:\frac{c^2}{r}$, adeóque $C^2=c^2$, & $C=c$.

(t) 190. Si tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicatâ radiorum, erunt velocitates reciproce in ratione radiorum ſubduplicatâ; nam quoniam (184) $C:c=\frac{R}{T}:\frac{r}{t}$, adeóque $C^2:c^2=\frac{R^2}{T^2}:\frac{r^2}{t^2}$ ſi fuerit $T^2:t^2=R^3:r^3$, erit $C^2:c^2=\frac{R^2}{R^3}:\frac{r^2}{r^3}=\frac{1}{R}:\frac{1}{r}=r:R$.

Et contrà ſi fuerit $C^2:c^2=r:R$, erit $\frac{R^2}{T^2}:\frac{r^2}{t^2}=r:R$, adeóque $\frac{R^3}{T^2}=\frac{r^3}{t^2}$ & $R^3:r^3=T^2:t^2$.

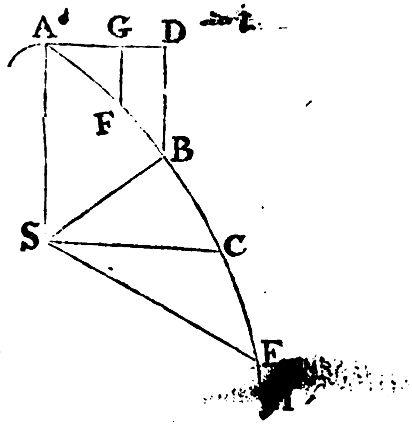
(u) 191. Si tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicatâ radiorum & propterea (190) velocitates reciproce in radiorum ratione ſubduplicatâ, vires centripetæ erunt reciprocè ut quadrata radiorum. Nam cum ſit (185) $V:v=t^2R:T^2r$; ſi fuerit $T^2:t^2=R^3:r^3$, erit $V:v=r^3R:R^3r=r^2:R^2$.

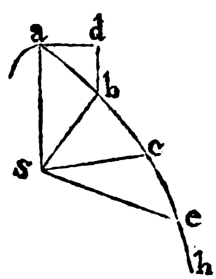
Et contrà ſi $V:v=r^2:R^2$, erit (185) $r^2:R^2=t^2R:T^2r$ ac proindè $t^2R^3=T^2r^3$, & $R^3:r^3=T^2:t^2$.

192.

Corol. 7. Et universaliter, ſi (x) tempus periodicum ſit ut radii *R* poteſtas quælibet R^n, & propterea velocitas reciprocè ut radii poteſtas R^{n-1}; (y) erit vis centripeta reciprocè ut radii poteſtas R^{2n-1}: & contra. LIBER PRIMUS.

Corol. 8. (z) Eadem omnia de temporibus, velocitatibus, & viribus, quibus corpora ſimiles figurarum quarumcunque ſimilium, centraque in figuris illis ſimiliter poſita habentium, par-





(x) 192. Si tempora periodica ſint ut radiorum poteſtates quælibet R^n, r^n, velocitates erunt reciprocè ut radiorum poteſtates R^{n-1}, r^{n-1}. Nam ponatur $T:t=R^n:r^n$, & quoniam (184) $C:c=\frac{R}{T}:\frac{r}{t}$, erit $C:c=\frac{R}{R^n}:\frac{r}{r^n}$ $=\frac{1}{R^{n-1}}:\frac{1}{r^{n-1}}=r^{n-1}:R^{n-1}$.

Et contrà ſi fuerit $C:c=r^{n-1}$, R^{n-1}, erit $\frac{R}{T}:\frac{r}{t}=r^{n-1}:R^{n-1}$, adeóque $\frac{R^n}{T}=\frac{r^n}{t}$, undè $R^n:r^n=T:t$.

(y) 193. Et univerſaliter ſi tempora periodica ſint ut radiorum poteſtates quælibet R^n, r^n, & propterea (192) velocitates reciprocè ut radiorum poteſtates R^{n-1}, r^{n-1}, erunt vires centripetæ reciprocè ut radiorum poteſtates R^{2n-1}, r^{2n-1}. Nam ponatur $T:t=R^n:r^n$, adeóque $T^2:t^2=R^{2n}:r^{2n}$: & cum ſit (185) $V:v=t^2R:T^2r$, erit $V:v=Rr^{2n}:rR^{2n}=r^{2n-1}:R^{2n-1}$.

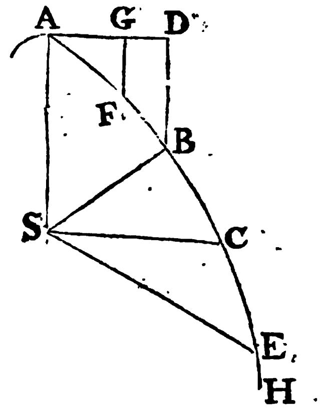
Et contrà ſi fuerit $V:v=r^{2n-1}:R^{2n-1}$; cum ſit $V:v=t^2R:T^2r$, erit $r^{2n-1}:R^{2n-1}=t^2R:T^2r$, adeóque $t^2R^{2n}=T^2r^{2n}$, undè $T^2:t^2=R^{2n}:r^{2n}$ & $T:t=R^n:r^n$.

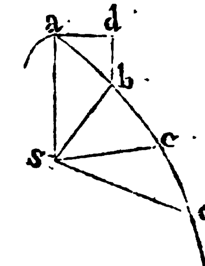
(z) 194. Corpora A & a, figurarum ſimilium A B H, a b h, centra S, s, in figuris illis ſimiliter poſita habentium, partes ſimiles A B E, a b e, ità deſcribant ut areæ A S B, A S C &c. a s b, a s c &c. circà centra S, s, in ſingulis figuris deſcriptæ temporibus quibus deſcribuntur ſint reſpectivè proportionales, & per prop. XI. vires centripetæ ad centra S, s, tendent. Per puncta A & a, in curvis ſimiliter poſita agantur tangentes A D, a d, ſintque arcus minimi, A F, a b, eodem tempore in utrâque curvâ deſcripti, & ductis rectis F G, b d, radiis vectoribus A S, a s, parallelis, vis centripeta in A, eſt ad vim centripetam in a, ut F G, ad b d, (174). Sumatur autem ar-

DE MOTU CORPORUM.

partes deſcribunt; conſequuntur ex demonſtratione præcedentium ad hoſce caſus applicatâ. Applicatur autem ſubſtituendo æquabilem arearum deſcriptionem pro æquabili motu, & diſtantias corporum à centris pro radiis uſurpando.

Co-





arcus AB ſimilis ab, (ita ut ſit as : AS = ab : AB, ac proinde ſit $AB = \frac{ab \times AS}{as}$) ducaturque BD radio AS parallela, erit per coroll. 1. Lem. XI. $FG : BD = AF^2 : AB^2$, & quia figuræ ABD & abd, ſunt ſimiles, eſt $BD : bd = AB : ab$, itaque per compoſitionem rationis eſt $FG : bd = AF^2 \times AB : AB^2 \times ab = AF^2 : AB \times ab$ (& quia $AB = \frac{ab \times AS}{as}$) $= AF^2 : \frac{ab \times AS}{as} \times ab = \frac{AF^2}{AS} : \frac{ab^2}{as}$. Cum igitur demonſtratum fuerit vires centripetas in A & a, eſſe inter ſe ut ſunt GF, bd, erunt vires illæ ut quadrata arcuum AF, ab, ſimul deſcriptorum applicata ad radios homologos AS, as.

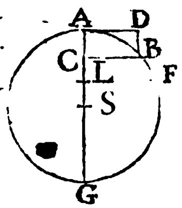
195. Coroll. 1. Quoniam velocitates finitæ corporum A & a, per arcus naſcentes AF, ab, ſunt uniformes, erunt illæ ut arcus AF, ab, æqualibus temporibus deſcripti (5). Unde vires centripetæ in A, & a, erunt ut velocitatum in A & a, quadrata, ad radios AS, as applicata.

196. Corol. 2. Figuræ ſimiles ASE, ase, diviſæ concipiantur in innumeros ſectores æquales ASB, BSC &c., & asb, bsc, &c. ſibi mutuò in duabus figuris ſimiles, & ob æquabilem arearum ſeu ſectorum in ſingulis figuris deſcriptionem, ſectores æquales æqualibus temporibus deſcribentur ac proindè arcus AB, BC, & arcus ab, bc, &c. æqualibus reſpectivè temporibus percurrentur, erit igitur tempus per AB, ad tempus per ab, ut tempus per AE, ad tempus per ae, hoc eſt, tempora quibus deſcribuntur arcus ſimiles, AB, ab, ſunt ut tempora quibus deſcribuntur alii quicumque ſimiles arcus, AE, ae, adeóque ut tempora periodica. Cum igitur (195) velocitates in A & a, ſint inter ſe ut arcus AB, ab, ad ſua reſpectivè tempora applicati, erunt quoque velocitates illæ inter ſe ut arcus AB, ab, ſeu ob figurarum ſimilitudinem, ut radii AS, as, ad tempora periodica applicati, id eſt, celeritates in punctis correſpondentibus A & a, ſunt in ratione compoſitâ ex ratione radiorum homologorum directè & ratione temporum periodicorum inversè, adeóque tempora periodica ſunt ut radii directè & velocitates inversè.

197. Coroll. 3. Celeritates in A & a, dican-

Corol. 9. (a) Ex eâdem demonſtratione conſequitur etiam; quod arcus, quem corpus in circulo datâ vi centripetâ uniformiter revolvendo tempore quovis deſcribit, medius eſt propor-

dicantur C, c, vires centripetæ V, v, radii vectores homologi R, r; tempora periodica T, t, & erit (196) $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$, & $T : t = \frac{R}{C} : \frac{r}{c}$, & $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$. Et quoniam (195) $V : v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$, erit $V : v = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2} = t^2 R : T^2 r = \frac{t^2}{r} : \frac{T^2}{R}$, hoc eſt, vires centripetæ ſunt reciprocè ut quadrata temporum periodicorum ad radios homologos applicata. Cum igitur cætera omnia de temporibus, velocitatibus & viribus in circulis corollaria, ex ſuperioribus proportionibus deducta ſint, evidens eſt eadem omnia convenire temporibus, velocitatibus, & viribus, quibus corpora ſimiles figurarum quarumcumque ſimilium, centraque in figuris illis ſimiliter poſita habentium, partes deſcribunt.



(a) 198. Corpus A, uniformiter revolvatur in circuli peripheriâ A B G A, & idem vel aliud corpus ex puncto A, per radium A S, eâdem vi centripetâ quâ corpus A in circuli peripheriâ retinetur continuò ità urgeatur ut (vi illâ centripetâ conſtanti permanente, quemadmodum fit in corporibus vi gravitatis conſtante cadentibus) corpus illud cadendo percurrat A L, eodem tempore quo corpus A, uniformiter deſcribit arcum A F. Quoniam vis acceleratrix per radium A S, conſtans eſt & continuò agit (per hyp.) corpus per A S, motu uniformiter accelerato cadit (25) & ſpatia percurſa ſunt ut quadrata temporum quibus percurruntur (27); ducatur per A, tangens A D, & ſumpto arcu minimo A B; in tangentem demittatur perpendicularis B D, & compleatur rectangulum C D, eodem tempore quo corpus A, æquabili motu deſcribit arcum A B, per vim centripetam percurrit D B, ſeu A C, (ex coroll. 3. Prop. 1æ.) erit igitur A C, ad A L, ut quadratum temporis per A B, ad quadratum temporis per A F, hoc eſt, ob motum in circulo æquabilem A C : A L = A B² : A F² = $\frac{AB^2}{AG} : \frac{AF^2}{AG}$; cum igitur ob arcum naſcentem A B, ſuæ chordæ æqualem, ſit A C = $\frac{AB^2}{AG}$, erit quoquè A L = $\frac{AF^2}{AG}$ atquè adeò A L × A G = A F² & proindè A L : A F = A F : A G.

199. Coroll. 1. Velocitas quâ corpus A, peripheriam circuli A F G A, uniformiter deſcribit, æqualis eſt velocitati quam acquireret cadendo per dimidium radium A S, ſi vi centripetâ conſtanti continuò urgeretur æquali illi quâ corpus A in peripheriâ circuli retinetur: Nam ſit A L altitudo per quam A cadere debet ut acquirat velocitatem quâ peripheriâ circuli deſcribitur, ſitque A F arcus eo tempore deſcriptus quo A cadit per A L eodem etiam tempore motu æquabili percurreretur, 2 A L per velocitatem eam in L acquiſitam (30), adeóque erit A F = 2 A L ſiquidem eodem tempore eademque celeritate æquabili percurruntur, ſed eſt ſemper A F² = A L × A G (198) cum igitur ſit 2 A L = A F ac proinde 4 A L² = A F² erit 4 A L² = A L × A G & 4 A L = A G & A L = $\frac{AG}{4} = \frac{AS}{2}$.

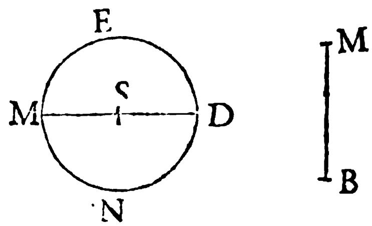
200. Coroll. 2. Tempus revolutionis per integram peripheriam eſt ad tempus deſcenſus uniformiter accelerati per dimidium radium, ut peripheria ad radium. Nam eodem tempore quo dimidius radius motu uniformiter accelerato percurritur, totus radius deſcriberetur cum æquabili velocitate lapſu per dimidium radium acquiſitâ (30) eâ verò ipſa celeritate corpus circuli peripheriam

portionalis inter diametrum circuli, & deſcenſum corporis eâdem datâ vi eodemque tempore cadendo confectum.

Scho-

(199) deſcribit. Ergo cum ſpatia eâdem velocitate uniformi percurſa, ſint ut tempora (5) patet propoſitum.

201. Coroll. 3. Hinc datâ vi centripetâ quâlibet in datâ à centro diſtantiâ, facile eſt reperire velocitatem quâ corpus projici debet ut circà prædictum centrum in datâ diſtantiâ circulum uniformiter deſcribat; velocitas enim illa æqualis eſt velocitati quam corpus acquireret cadendo per dimidiam diſtantiam à centro, ſi datâ vi centripetâ continuò urgeretur (199). Dato autem circuli radio, datur peripheria, & datâ æquabili in circulo velocitate cum peripheriâ, invenitur tempus periodicum, & arcus dato quovis tempore deſcriptus habetur.



202. Coroll. 4. Datis circuli radio & velocitate corporis in eo revolventis, facilè colligitur proportio vis centripetæ in eo circulo ad vim quamlibet notam qualis eſt vis gravitatis. Primum enim inveniatur tempus revolutionis unius in eo circulo peractæ (5), mox invenietur tempus quo corpus vi illâ centripetâ continuò ſollicitatum per dimidium radium caderet (200). Ex datâ autem vi gravitatis ſeu ex dato ſpatio quod grave liberè cadendo, dato quodam tempore percurrit, invenitur (27) ſpatium ab eodem gravi percurſum eo tempore quo corpus vi centripetâ ſollicitatum per dimidium radium cadit, ſed vires acceleratrices conſtantes, rationem habent ſpatiorum quæ dato tempore percurrere faciunt (30) eſt ergo vis ea centripeta ad vim gravitatis, ut dimidius circuli radius ad ſpatium id quod grave percurreret eo tempore quo corpus vi centripeta ſollicitatum dimidium illum radium percurrit.

Exempli causâ. Corpus M, ope fili MS clavo in S alligati, circà centrum S uniformiter deſcribat circulum MNDE, in plano horizontali poſitum, eaque ſit corporis revolventis celeritas quæ acquiritur à gravi per altitudinem MB cadente, quæritur ratio vis centripetæ in circulo ad vim gravitatis. Tempus quo grave cadit per altitudinem MB, dicatur T, & velocitas in B acquiſita, quâ (ex hyp.) corpus M circuli peripheriam uniformiter deſcribit, erit $\frac{2\,MB}{T}$ (30), peripheria circuli dicatur p, & cum tempus periodicum in circulo ſit æquale peripheriæ ad velocitatem $\frac{2\,MB}{T}$ applicatæ (5) erit id Tempus Periodicum $\frac{p\times T}{2\,MB}$; jam verò eſt peripheria ad radium (200) ut tempus Periodicum ad tempus quo corpus M, ſolâ vi centripetâ conſtante ſollicitatum, dimidium radium MS percurrit, ſive $p:MS=\frac{p\times T}{2\,MB}$ ad tempus per dimidium radium quod eſt ideo $\frac{T\times MS}{2\,MB}$. Cum autem grave tempore T altitudinem MB ſit emenſum, & in motu uniformiter accelerato ſpatia percurſa ſint ut quadrata temporum quibus percurruntur (27) erit T^2 ad $\frac{T^2\times MS^2}{4\,MB^2}$, ſeu $4\,MB^2$ ad MS^2 ut ſpatium MB tempore T percurſum ad ſpatium percurſum tempore $\frac{T\times MS}{2\,MB}$, quo corpus, M, vi centripetâ percurrit dimidium radium, quod erit $\frac{MS^2\times MB}{4\,MB^2}=\frac{MS^2}{4\,MB}$ eſt igitur (13) vis centripeta in circulo ad vim gravitatis ut $\frac{MS}{2}$, ad $\frac{MS^2}{4\,MB}$, ſivè ut 2 MB ad MS.

203.

Scholium.

([b]) Caſus corollarii ſexti obtinet in corporibus cœleſtibus, (ut ſeorſum collegerunt etiam noſtrates *Wrennus*, *Hockius* & *Hallæus*) & propterea quæ ſpectant ad vim centripetam decreſcentem in duplicatâ ratione diſtantiarum à centris, decrevi fuſiùs in ſequentibus exponere.

Porro præcedentis propoſitionis & corollariorum ejus beneficio, colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis eſt ea gravitatis. Nam ſi corpus in circulo terræ concentrico vi gravitatis ſuæ revolvatur, hæc gravitas eſt ipſius vis centripeta. Datur autem ex deſcenſu gravium, & tempus revolutionis unius, & arcus dato quovis tempore deſcriptus, per hujus corol. IX. Et ([c]) hujuſmodi propoſitionibus *Hugenius* in eximio ſuo tractatu *de Horologio Oſcillatorio* vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit.

([d]) Demonſtrari etiam poſſunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis deſcribi intelligatur polygonum laterum quotcunque. Et ſi corpus in polygoni lateribus datâ cum velocitate

([b]) 203. Ex obſervationibus colligunt aſtronomi planetas ſecundarios, ut ſunt Jovis vel Saturni Satellites, radiis ad ſuum planetam primarium ductis, areas deſcribere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica eſſe in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro planetæ primarii; planetas verò primarios radiis ad ſolem ductis, areas deſcribere temporibus proportionales eorumque tempora periodica eſſe in ratione ſeſquiplicatâ radiorum. Quarè caſus corollarii VI. in corporibus cœleſtibus obtinet, id eſt, planetarum velocitates ſunt reciprocè in ratione ſubduplicatâ radiorum & vires centripetæ ſunt reciprocè ut quadrata radiorum.

([c]) 204. Hugenius ad calcem tractatûs de horologio oſcillatorio, de viribus centrifugis in circulo earumque cum vi gravitatis proportione 13. theoremata ſine demonſtratione propoſuit. Eorum aliqua in corollariis propoſ. hujuſce IV. demonſtravit Newtonus, viamque aperuit cui inſiſtendo cætera omnia facili negotio abſolvi poſſunt, quod poſteà perfecerunt multi inſignes Mathematici.

([d]) 205. Duo intelligantur polygona ſimilia & regularia circulis duobus inſcripta, quorum latera numero creſcant & longitudine minuantur in infinitum, & corpora duo in polygonorum lateribus æquabili velocitate ferantur, atque ad ſingulos angulos à circulo reflectantur. Manifeſtum eſt corporum in polygonis revolventium vires centrifugas non eſſe menſurandas ex ſolâ velocitate quâ in ſingulis angulis incurrunt in circulum & quâ ab illo reflectuntur, ſed inſuper habendam eſſe rationem frequentiæ impactuum aut

DE MOTU CORPORUM.

tate movendo ad ejus angulos ſingulos à circulo reflectatur; vis, quâ ſingulis reflexionibus impingit in circulum, erit ut ejus velocitas: ideoque ſumma virium in dato tempore erit ut velocitas illa, & numerus reflexionum conjunctim: hoc eſt (ſi polygonum detur ſpecie) ut longitudo dato illo tempore deſcripta, & aucta vel diminuta in ratione longitudinis ejuſdem ad circuli prædicti radium; id eſt, ut quadratum longitudinis illius applicatum ad radium: ideoque, ſi polygonum lateribus infinitè diminutis coincidat cum circulo, ut quadratum arcus dato tempore deſcripti applicatum ad radium. Hæc eſt vis centrifuga, quâ corpus urget circulum; & huic æqualis eſt vis contraria, quâ circulus continuo repellit corpus centrum verſus.

PRO-

aut reflexionum, ità ut ſi eadem fuerit duorum corporum revolventium celeritas, vires centrifugæ ſint ut numeri impactuum aut reflexionum tempore dato peractarum; nam quò plures ſunt tempore dato impactus & reflexiones, eò magis corpus circulum urget ut à centro recedat & viceverſâ eò magis ad centrum urgetur per circuli reactionem æqualem & contrariam actioni. Quarè ſi varia fuerit corporum in polygonis revolventium celeritas æquabilis, vires centrifugæ erunt ut velocitates & numeri impactuum ſeu reflexionum tempore dato peractarum conjunctim. Eſt autem numerus reflexionum tempore dato ut numerus laterum polygoni eo tempore deſcriptorum. Porrò ſi eadem ſupponatur in utroque polygono velocitas, numeri laterum eodem tempore deſcriptorum erunt reciprocè ut latera ſingula; quo enim majora ſunt latera, eo minor eorum numerus dato tempore datâque velocitate percurritur; quarè manente eadem in utroque polygono velocitate, numeri reflexionum ſunt inversè ut latera, ſive ob polygonorum ſimilitudinem, inversè ut radii circulorum. Si verò ponatur idem circulorum radius, & varia in utroque polygono velocitas uniformis, erunt numeri laterum in utroque polygono dato tempore percurſorum, directè ut velocitates æquabiles, ſeu, ut longitudines dato tempore deſcriptæ (5). Quarè variantibus polygoni velocitate & radio, numerus reflexionum eſt ut velocitas, ſeu ut longitudo tempore dato deſcripta applicata ad radium. Cum igitur ſuprà oſtenſum ſit vim centrifugam in circulo, aut vim centripetam ipſi æqualem & contrariam, eſſe in ratione compoſitâ velocitatis & numeri reflexionum dato tempore peractarum, liquet eandem vim centrifugam eſſe quoque ut quadratum velocitatis radio diviſum, & etiam ut quadratum longitudinis ſeu arcûs dato tempore deſcripti applicatum ad radium.

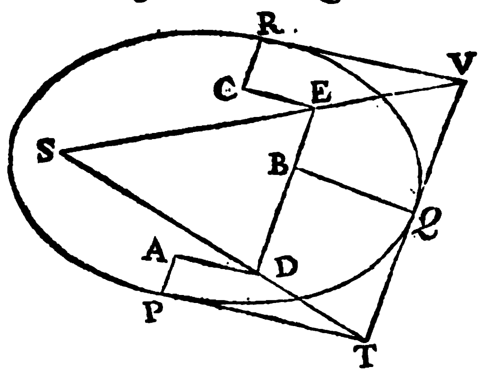
206.

PROPOSITIO V. PROBLEMA I.

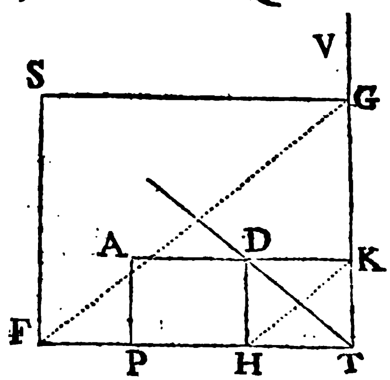
Datâ quibuſcunque in locis velocitate, quâ corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus deſcribit, centrum illud invenire.

Figuram deſcriptam tangant rectæ tres *PT*, *TQV*, *VR* in punctis totidem *P*, *Q*, *R*, concurrentes in *T* & *V*. Ad tangentes erigantur perpendicula *PA*, *QB*, *RC* velocitatibus corporis in punctis illis *P*, *Q*, *R*, à quibus eriguntur, reciprocè proportionalia; id eſt, ita ut ſit *PA* ad *QB* ut velocitas in *Q* ad velocitatem in *P*, & *QB* ad *RC* ut velocitas in *R* ad velocitatem in *Q*. Per perpendiculorum terminos *A*, *B*, *C* ad angulos rectos ducantur *AD*, *DBE*, *EC* concurrentes in *D* & *E*: Et actæ *TD*, *VE* concurrent in centro quæſito *S*.

Nam perpendicula à centro *S* in tangentes *PT*, *QT* demiſſa (per corol. 1. prop. 1.) ſunt reciprocè ut velocitates corporis in punctis *P* & *Q*; ideoque per conſtructionem ut perpendicula *AP*, *BQ* directè, id eſt ut perpendicula à puncto *D* in tangentes demiſſa. (e) Unde facile colligitur quod puncta *S*, *D*, *T* ſunt in unâ rectâ. Et ſimili argumento puncta *S*, *E*, *V* ſunt etiam in unâ rectâ; & propterea centrum *S* in concurſu rectarum *TD*, *VE* verſatur. *Q. E. D.*



(e) 206. Puncta S, D, T, ſunt in unâ rectâ. Demiſſis enim ex centro S, in tangentes T V, T F, perpendiculis S G, S F, & ex puncto D, perpendiculis D K, D H, patet angulos F S G, H D K, lineis parallelis contentos eſſe æquales & propter laterum S F, S G, D H, D K, analogiam, triangula F G S, H K D, eſſe ſimilia, adeóque angulos S F G, D H K, æquari, ac proinde lineas F G, H K, eſſe parallelas, & triangula F T G, H T K, ſimilia, erit ergò T H : T F = H K : F G = D H : S F, & T K : T G = H K : F G = D K : S G, Quarè linea T D, producta tranſibit per centrum S.



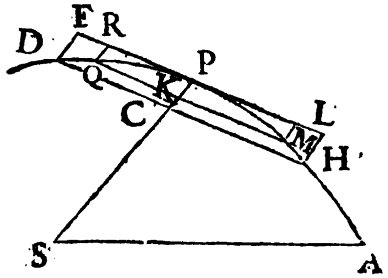
De Motu Corporum.

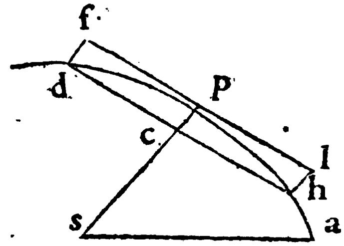
PROPOSITIO VI. THEOREMA V.

Si corpus in ſpatio non reſiſtente circa centrum immobile in orbe quocunque revolvatur, & arcum quemvis jamjam naſcentem tempore quam minimo deſcribat, & ſagitta arcus duci intelligatur, quæ chordam biſecet, & producta tranſeat per centrum virium: erit vis centripeta in medio arcus, ut ſagitta directè & tempus bis inversè.

(f) Nam ſagitta dato tempore eſt ut vis (per corol. 4. prop. 1.) & augendo tempus in ratione quâvis, ob auctum arcum in eâdem ratione ſagitta augetur in ratione illâ duplicatâ (per corol.

rol.





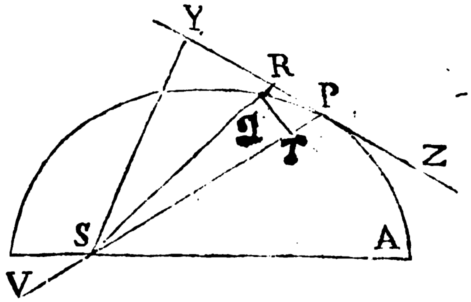
(f) 207. Corpora P & p, circà virium centra S & s, revolvendo, curvas A P Q, a p q, deſcribant, ſintque chordæ minimæ D H, d h, radiis vectoribus S P, s p, biſariam diviſæ, & chordis illis evaneſcentibus, erit C H = P H, & D C = D P (per coroll. 2. Lem. VII.) adeóque P H = P D; undè puncta P & p, ſunt in medio arcuum evaneſcentium D P H, d p h, poſita. Præterea quoniam punctis C & P, c & p, coeuntibus, puncta D & H, d & h, ſimul cum punctis P, p, coincidunt, ultima chordarum evaneſcentium D H, d h, poſitio congruit cum tangentium F L, f l poſitione, ac proindè chordæ evaneſcentes D H, d h, tangentibus F L, f l, æquidiſtant, adeóque rectæ D F, d f, radiis S P, s p, parallelæ ſagittis P C, p c, evaneſcentibus æquales ſint. His ad clariorem eorum quæ Newtonus ſupponit intelligentiam poſitis, demonſtrandum eſt vires centripetas in P & p, eſſe inter ſe ut ſunt ſagittæ P C, p c, directè, & inversè ut quadrata temporum quibus deſcribuntur arcus evaneſcentes H P D, h p d, aut dimidii P D, p d.... Dem... Si arcus P D, p d, æqualibus temporibus deſcriberentur, ſagittæ P C, p c, (per coroll. 1. Prop. 1.) eſſent ut vires centripetæ in P & p. Quòd ſi vires in P & p, æquales forent, tempora verò per arcus P D, p d, inæqualia, ſint v. gr. ſicut T ad t, dico ſagittas P C, p c, fore ut horum temporum quadrata directè; ſive ut T^2 ad t^2. Sit enim arcus P Q, deſcriptus eodem tempore t quo arcus p d, poſitis viribus in P & p, æqualibus, ſpatia Q R, f d, ſeu P K, p c, virium illarum actione eodem tempore deſcripta erunt æqualia; Verùm (per cor.

11.

rol. 2 & 3; lem. XI.) ideoque eſt ut vis ſemel & tempus bis. Subducatur duplicata ratio temporis utrinque, & fiet vis ut ſagitta directè & tempus bis inversè. *Q. E. D.*

(g) Idem facile demonſtratur etiam per corol. 4. lem. X.

Corol. 1. Si corpus *P* revolvendo circa centrum *S* deſcribat lineam curvam *APQ*; tangat vero recta *ZPR* curvam illam in puncto quovis *P*, & ad tangentem ab alio quovis curvæ puncto *Q* agatur *QR* diſtantiæ *SP* parallela, ac demittatur *QT* perpendicularis ad diſtantiam illam *SP*: vis centripeta erit reciprocè ut ſolidum



$\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$; ſi modo ſolidi illius ea ſemper ſumatur quantitas, quæ ultimo fit, ubi coeunt puncta *P* & *Q*. (h) Nam *QR* æqualis eſt ſagittæ dupli arcus *QP*, in cujus medio eſt *P*, & duplum trianguli *SQP* ſive *SP* × *QT*, tempori, quo arcus iſte duplus deſcribitur, proportionale eſt; ideoque pro temporis exponente ſcribi poteſt. *Co-*

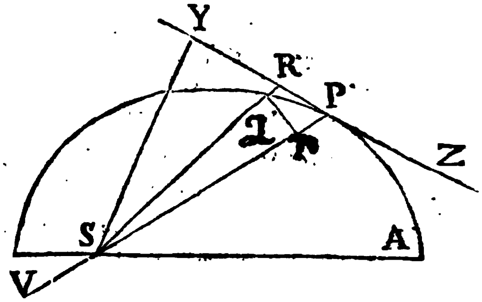
II. & III. Lem. XI.) $PD^2 : PQ^2 = DF : QR$ ſive fd, & ob motum per arcus evaneſcentes uniformem, ſunt arcus PD, PQ ut tempora quibus deſcribuntur hoc eſt ut T ad t, ideoque $PD^2 : PQ^2 = T^2 : t^2 = DF : QR$ ſive fd, & quia $DF = PC$ & $df = pc$ ergo $T^2 : t^2 = PC : pc$ itaque ſi vires in P & p ſint æquales erunt ſagittæ PC, pc, ut quadrata temporum quibus arcus PD, pd, deſcribuntur. Quoniam igitur manentibus temporibus ſagittæ ſunt ut vires, & manentibus viribus, ſagittæ ſunt ut temporum quadrata, neceſſum eſt ut variantibus viribus atque temporibus ſagittæ ſint ut vires & quadrata temporum conjunctim. Quamobrem ſi vires in P & p, dicantur V, v, erit $PC : pc = V \times T^2 : v \times t^2$, & dividendo antecedentes per T^2, & conſequentes per t^2, erit $V : v = \frac{PC}{T^2} : \frac{pc}{t^2}$ Q. e. D.

(g) 208. Idem facilè demonſtratur etiam per coroll. IV. Lem. X. quo ſtatuitur vires eſſe ut ſpatia, ipſo motus initio, deſcripta directè & quadrata temporum inverse: Cum enim FD, fd, ſeu ſagittæ PC, pc, ſint ſpatia ex virium centripetarum actione deſcripta iiſdem temporibus quibus percurruntur arcus evaneſcentes PD, pd, patet per ſuprà dictum coroll. vires centripetas eſſe inter ſe in ratione compoſitâ ex directâ ratione ſagittarum PC, pc, & reciprocâ quadratorum temporum quibus deſcribuntur arcus evaneſcentes PD, pd, ſeu HD, hd.

(h) 209. Nam QR æqualis eſt ſagittæ dupli arcus QP, in cujus medio eſt P, (207), duplum verò trianguli evaneſcentis SQP, (quod per Lem. VIII., tanquam rectilineum conſiderari poteſt) æquale eſt facto ex perpendiculo QT, in baſim

DE MOTU CORPORUM.

Corol. 2. Eodem argumento vis centripeta eſt reciprocè ut ſolidum $\frac{SYq \times QPq}{QR}$, ſi modo SY perpendiculum ſit à centro virium in orbis tangentem PR demiſſum. (i) Nam rectangula $SY \times QP$ & $SP \times QT$ æquantur.



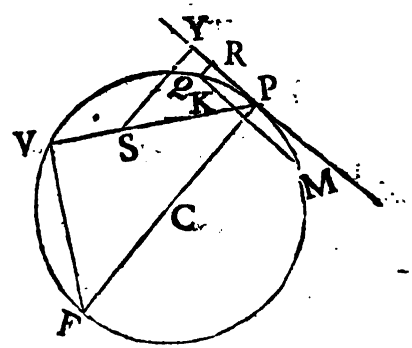
Corol. 3. Si orbis vel circulus eſt, vel circulum concentricè tangit, aut concentricè ſecat, id eſt angulum contactus aut ſectionis cum circulo quam minimum continet; eandem habens curvaturam eundemque radium curvaturæ ad punctum P; & ſi PV chorda ſit circuli hujus à corpore per centrum virium acta: erit vis centripeta reciprocè ut ſolidum $SYq \times PV$. (k) Nam PV eſt $\frac{QPq}{QR}$.

Co-

ſim S P; cum igitur in eâdem curvâ A P Q, areæ ſint proportionales temporibus quibus deſcribuntur, ac proindè rectangulum Q T × S P, ſcribi poſſit loco temporis quo duplus arcus Q P, ſeu duplum triangulum S Q P, deſcribitur, erit vis centripeta in P, directè ut $\frac{QR}{SP^2 \times QT^2}$ & inversè ut $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$.

(i) 210. Rectangula S Y × Q P, & S P × Q T, æquantur; nam tangens P R, cum arcu evaneſcente Q P, congruit (per Lem. VII) & propterea tangens illa conſiderari poteſt tanquam trianguli S P Q, baſis P Q, producta; & S Y, tanquam perpendicularis ad illam baſim productam, quarè area dupli trianguli S P Q, eſt S Y × Q P = S P × Q T.

(k) 211. P V eſt $\frac{QP^2}{QR}$. Sit enim circulus oſculator P Q V F, & ductâ chordâ Q M, quam alia chorda P V, per virium



centrum S acta; biſecat in K, erit (per prop. 35. lib. 3. Elem.) Q K² = V K × P K; ſed evaneſcente P K, V K = V P, & (207) Q R = P K, ac (per coroll. 1. Lem. VII) Q K = Q P; ergò Q P² = P V × Q R, & P V = $\frac{QP^2}{QR}$.

212.

Corol. 4. Iiſdem poſitis, eſt vis centripeta ut velocitas bis directè, & chorda illa inversè. Nam velocitas eſt reciprocè ut perpendiculum *SY* per corol. 1. prop. 1.

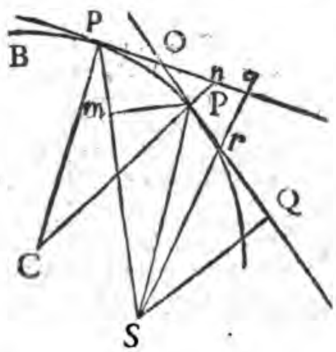
Corol. 5. Hinc ſi detur figura quævis curvilinea *APQ*, & in ea detur etiam punctum *S*, ad quod vis centripeta perpetuo dirigitur, inveniri poteſt lex vis centripetæ, quâ corpus quodvis *P* à curſu rectilineo perpetuo retractum in figuræ illius perimetro detinebitur, eamque revolvendo deſcribet. Nimirum computandum eſt vel ſolidum $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ vel ſolidum $SYq \times PV$ huic vi reciproeè proportionale. Ejus rei dabimus exempla in problematis ſequentibus.

PRO-

212. Iiſdem poſitis ſit P C, radius oſculi $= R$, & erit vis centripeta in P, reciprocè ut ſolidum $\frac{SY^3 \times R}{SP}$: quoniam enim rectæ S Y, & F C P, ad tangentem P Y, perpendiculares æquidiſtant, erit angulus $VPF = PSY$; cumque ſit prætereà angulus F V P, in ſemicirculo æqualis recto S Y P, duo triangula P V F, S Y P, ſimilia ſunt ac proindè $SP : SY = PF$ ſeu $2R : PV$, adeóque $PV = \frac{SY \times 2R}{SP}$ & $SY^2 \times PV = \frac{SY^3 \times 2R}{SP}$; hoc eſt dividendo per numerum conſtantem 2, ut $\frac{SY^3 \times R}{SP}$. Hæc eſt expreſſio vis centripetæ quam Joannes Bernoullius, Abrahamus de Moivre & Guido Grandus invenerunt.

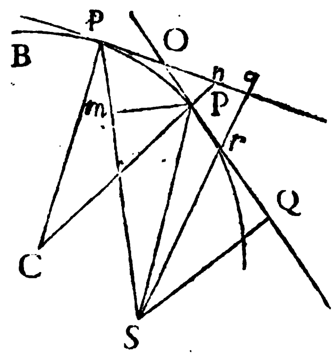
SCHOLION.

213. Newtonus generalem virium centralium theoriam in ſuperioribus propoſitionibus aperuit; earumque elegantes formulas in propoſitionis VI^æ corollariis tradidit. Plurimas per analyſim methodumque fluxionum poſteà exquiſierunt alii qui primum inter Geometras locum tenebant. Hos inter eminet Varignonius qui in Commentariis Pariſienſibus an. 1700, 1701, 1706, virium centralium formulas ſuâ varietate & univerſalitate eximias dedit; præclaras quoque addidit Joannes Bernoullius in iiſdem Commentariis an. 1710. Duas propoſuit Jacobus Hermannus in ſcholio ad propoſitionem 22^am Lib. 1. Phoronomiæ quas ut potè multum expeditas, nobiſque in poſterum profuturas & ex ſuperioribus Newtoni formulis facillimè deducendas, hic exſcribemus ac demonſtrabimus.



214. Itaque corpus P, circà centrum virium S revolvendo deſcribat curvam B p P, & centro C radio C P deſcriptus intelligatur arcus infiniteſimus P p circuli curvam B p P oſculantis in P, ac centro S radio S P, arculus P m, & denique S Q, S q,

DE MOTU CORPORUM.



ad tangentes P Q, p q, perpendiculares. Duo Triangula q O r, n C p, ſeu P C p ſimilia ſunt, nam æquales ſunt anguli r q O, C p n, ſunt enim ambo recti, & anguli r O q, P C p, qui cum angulo P O p duos rectos efficiunt. Similia quoque ſunt Triangula p m P, p q ʃ, ſeu P Q ʃ, ob Angulos ad q & m rectos & angulum m p P communem dum coeunt puncta P, p, quare p P : r q = P C : O q, ſeu p q, ſeu P Q; & m p : P p = P Q : S P unde ex æquo m p : r q = P C ad S P & $PC = \frac{SP \times mp}{rq}$. Porrò (212) vis centripeta in P eſt ut $\frac{SP}{PC \times SQ^3}$; ergò ſi ſubſtituatur valor ipſius P C, modò inventus eris vis ut $\frac{rq}{SQ^3 \times mp}$, hoc eſt, ſi vis centripeta ſit $= v$, $SP = z$, ac proindè $mp = dz$, $SQ = p$, adeóque $rq = dp$, erit $v = \frac{dp}{p^3 dz}$, & radius oſculi $CP = r = \frac{z\,dz}{dp}$, quas duas formulas tradunt Keillius in ſuâ de legibus virium centripetarum epiſtolâ ad Halleium directâ & Hermannus loco ſuprâ citato.

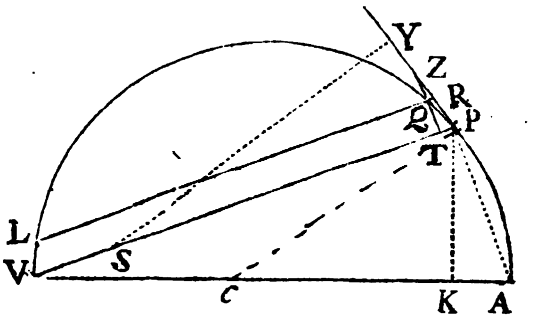
215. Sit $Pp = ds$, & $Pm = dy$, & ob triangula ſimilia p P m, P S Q, erit $ds : dy = z : p$, adeóque $p = \frac{z\,dy}{ds}$, & ſumptis utrinque fluxionibus nullâ conſtante uſurpatâ, invenietur (163) $dp = \frac{dz\,dy\,ds + z\,ds\,ddy - z\,dy\,dds}{ds^2}$; quarè $v = \frac{dp}{p^3 dz} = \frac{dp\,ds^3}{z^3 dy^3 dz}$ ob $p = \frac{z\,dy}{ds}$ & $p^3 = \frac{z^3 dy^3}{ds^3}$, adeòque $v = \frac{dz\,dy\,ds^2 + z\,ds^2\,ddy - z\,dy\,ds\,dds}{z^3\,dy^3\,dz}$, quæ formula nonniſi nominibus differt à formulis quas Varignonius dedit in Commentariis Pariſienſibus, 1701. 1706.

216. Hinc radiorum oſculi formula admodum generalis & expedita facile reperitur. Nam invenimus (214) $r = \frac{z\,dz}{dp}$ $= (215) \frac{z\,dz\,ds^2}{dz\,dy\,ds + z\,ds\,ddy - z\,dy\,ddz}$ cum in hâc formulâ nulla fluxio conſtans aſſumpta ſit, in alias infinitas transformari poteſt, ſumptis pro arbitrio conſtantibus. Si centrum S, in infinitum abeat, ut rectæ S P, evadant parallelæ, erit $dz\,dy\,ds$, quantitas infinite parva reſpectu $z\,ds\,ddy$ & $z\,dy\,dds$; nam cum z finita eſt $dz\,dy\,ds$, eſt ejuſdem generis cum $z\,ds\,ddy$; ubi igitur z, evadit infinita $z\,ds\,ddy$, fit etiam infinita reſpectu $dz\,dy\,ds$; unde ſi in formulâ radii oſculatoris modò inventâ deleatur membrum $dz\,dy\,ds$, habebitur $r = \frac{ds^2 dz}{ds\,ddy - dy\,dds}$ formula generalis radii oſculi in curvis quarum ordinatæ S P parallelæ axique perpendiculares ſunt, & in quibus dz, ſunt elementa abſciſſarum.

PROPOSITIO VII. PROBLEMA II.

Gyretur corpus in circumferentiâ circuli, requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum.

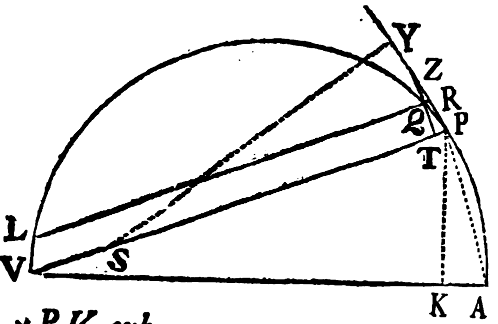
Eſto circuli circumferentia *VQPA*; punctum datum, ad quod vis ceu ad centrum ſuum tendit, *S*; corpus in circumferentiâ latum *P*; locus proximus, in quem movebitur *Q*; & circuli tangens ad locum priorem *PRZ*. Per punctum *S* ducatur chorda *PV*; & actâ circuli diametro *VA*, jungatur *AP*; & ad *SP* demittatur perpendiculum *QT*, quod productum occurrat tangenti *PR* in *Z*, ac denique per punctum *Q* agatur *LR*, quæ ipſi *SP* parallella ſit, & occurrat tum circulo in *L*, tum tangenti *PZ* in *R*. Et [1] ob ſimilia triangula *ZQR*, *ZTP*, *VPA*; erit *RP quad.* hoc eſt *QRL* ad *QT quad.* ut *AV quad.* ad *PV quad.* Ideoque $\frac{QRL \times PV\ quad.}{AV\ quad.}$ æquatur *QT quad.* Ducantur hæc æqualia in $\frac{SP\ quad.}{QR}$, & punctis *P* & *Q* coeuntibus ſcribatur *PV* pro *RL*. Sic fiet $\frac{SP\ quad. \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$ æquale $\frac{SP\ quad \times QT\ quad.}{QR}$. Ergo (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta eſt reciprocè ut $\frac{SP\,q \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$; id eſt (ob datum *AV quad.*) reciprocè ut quadratum diſtantiæ ſeu altitudinis *SP* & cubus chordæ *PV* conjunctim. *Q E I.*



Idem

(1) 217. Triangula ZQR, ZTP, ſimilia ſunt ob QR, parallelam TP, per conſtructionem, & triangula ZTP, VPA, ſunt etiam ſimilia ob angulos rectos ZTP, VPA, & æquales VPZ, VAP, quorum communis eſt menſura dimidius arcus VL, QP; quarè RP : QT = ZP : ZT = AV : PV. Eſt autem RP^2 = QR × RL, per prop. 36. lib. 3. Elem.

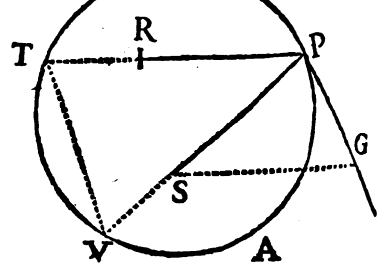
Idem aliter.



Ad tangentem PR productam demittatur perpendiculum SY: ob ſimilia triangula SYP, VPA; erit AV ad PV ut SP ad SY: ideoque $\frac{SP \times PV}{AV}$ æquale SY, & $\frac{SP\ quad. \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$ æquale $SY\ quad. \times PV$. Et propterea (per. corol. 3. & 5. prop. VI.) vis centripeta eſt reciprocè ut $\frac{SPq \times PV\ cub.}{AVq}$, hoc eſt, ob datam AV reciprocè ut $SPq \times PV\ cub.$ *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc ſi punctum datum S, ad quod vis centripeta ſemper tendit, locetur in circumferentiâ hujus circuli, puta ad V; erit vis centripeta reciprocè ut quadrato-cubus altitudinis SP.

Corol. 2. Vis, quâ corpus P in circulo $APTV$ circum virium centrum S revolvitur, eſt ad vim, qua corpus idem P in eodem circulo & eodem tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi poteſt, ut $RP\ quad. \times SP$ ad cubum rectæ SG, quæ à primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, & diſtantiæ corporis à ſecundo virium centro parallela eſt.



Nam

238. Idem aliter, cum ſit $\frac{SP \times PV}{AV} = SY$ erit $\frac{SP^3 \times PV^3}{AV^3} = SY^3$ & $\frac{SP^3 \times PV^3 \times R}{AV^3 \times SP} = \frac{SP^2 \times PV^3 \times R}{AV^3} = \frac{SY^3 \times R}{SP}$ & propterea (212) vis centripeta eſt reciprocè ut $\frac{SP^2 \times PV^3 \times R}{AV^3}$ ſeu ob $R = \frac{1}{2} AV$, & AV, conſtantem erit reciprocè ut $SP^2 \times PV^3$.

(m) Nam per conſtructionem hujus propoſitionis vis prior eſt ad vim poſteriorem ut $RPq \times PT\,cub.$ ad $SPq \times PV\,cub.$ id eſt, ut $SP \times RPq$ ad $\frac{SP\,cub. \times PV\,cub.}{PT\,cub.}$, ſive ([n] ob ſimilia triangula PSG, TPV) ad $SG\,cub.$

Corol. 3. Vis, quâ corpus P in orbe quocunque circum virium centrum S revolvitur, eſt ad vim, quâ corpus idem P in eodem orbe eodemque tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi poteſt, ut $SP \times RPq$, contentum utique ſub diſtantiâ corporis à primo virium centro S & quadrato diſtantiæ ejus à ſecundo virium centro R, ad cubum rectæ SG, quæ à primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, & corporis à ſecundo virium centro diſtantiæ RP parallela eſt. (o) Nam vires in hoc orbe ad ejus punctum quodvis P eædem ſunt ac in circulo ejuſdem curvaturæ.

PRO-

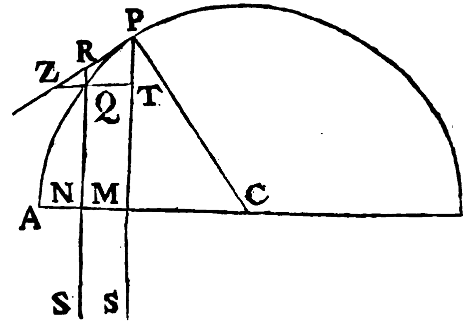
(m) 219. *Nam per conſtructionem hujus propoſ. vis prior eſt ad vim poſteriorem,* (hoc eſt vis circà S, ad vim circà R) *ut* $RP^2 \times PT^3$ *ad* $SP^2 \times PV^3$. Scilicet in demonſtratione hujus propoſitionis (vid. fig. Prop.) inventum erat $\frac{QRL \times PV^2}{AV^2} = QT^2$, & punctis P & Q coëuntibus ſcribatur PV pro RL, & uterque terminus multiplicetur per $SP^2 \times AV^2$ erit $QR \times PV^3 \times SP^2 = QT^2 \times SP^2 \times AV^2$, eſt verò $QT \times SP$ area cujus arcus eſt QP, & QR, eſt ejus ſagitta, itaque ſagitta per cubum chordæ, & quadratum diſtantiæ multiplicata, æqualis eſt quadrato areæ cui reſpondet, multiplicato per quadratum Diametri. Quod utique verum erit ſive agatur de vi ad S, ſive de vi ad R tendente (vid fig. Cor.) Quod ſi ſumi intelligantur arcus æquali tempore deſcripti circa utramque vim, ſagittæ eorum arcuum expriment rationem earum virium centripetarum; & areæ illis temporibus æqualibus circa utramque vim deſcriptæ æquales erunt, nam per Prop. 1. tempus Periodicum eſt ad integram ſuperficiem deſcriptam, ut tempus quodvis ad aream ipſi reſpondentem, ut ergo eodem tempore Periodico idem circulus circa utramque vim abſolvitur, quæriturque area eidem tempori correſpondens, illa area eadem erit utriuſque vis reſpectu, ideoque productum quadrati areæ per quadratum Diametri idem erit tam reſpectu vis S, quam reſpectu vis R, ergo ſagitta pertinens ad vim S multiplicata per cubum ejus chordæ P V, & quadratum ejus diſtantiæ SP æqualis erit ſagittæ pertinenti ad vim R, multiplicatæ per cubum ejus chordæ P T & per quadratum ejus diſtantiæ R P, ea enim facta, quadrato areæ in quadratum Diametri ducto æqualia ſunt, ideo Sagittæ illæ, ſive vires in S & R erunt reciprocè ut illæ quantitates quæ eas multiplicant, hoc eſt Sagitta in S eſt ad Sagittam in R ſicut $RP^2 \times PT^3 : SP^2 \times PV^3$. Q. E. D.

(n) 220. Triangula P S G, T P V, ſimilia ſunt, ob angulos P S G, S P T æquales quia ſunt alterni inter parallelas S G, T P, & angulos V P G, V T P, æquales per 32. lib. 3. Elem. undè $TP : PV = SP : SG = \frac{SP \times PV}{TP}$ & $SG^3 = \frac{SP^3 \times PV^3}{PT^3}$.

(o) 221. Nam vires in hoc orbe ad ejus punctum quodvis P, eædem ſunt ac in circulo orbitam oſculante in P, vis enim illa in P, eſt ſemper eadem ac ſi corpus in arcu evaneſcente circuli oſculatoris moveretur, cum arcus ille circuli pro arcu orbitæ evaneſcente uſurpari poſſit.

PROPOSITIO VIII. PROBLEMA III.

Moveatur corpus in ſemicirculo PQA: *ad hunc effectum requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum* S, *ut lineæ omnes* PS, RS *ad id ductæ, pro parallelis haberi poſſint.*



A ſemicirculi centro *C* agatur ſemidiameter *CA* parallelas iſtas perpendiculariter ſecans in *M* & *N*, & jungatur *CP*. Ob (p) ſimilia triangula *CPM*, *PZT* & *RZQ* eſt *CPq* ad *PMq* ut *PRq* ad *QTq*, & ex naturâ circuli *PRq* æquale eſt rectangulo $QR \times \overline{RN + QN}$, ſive coeuntibus punctis *P* & *Q* rectangulo $QR \times 2PM$. Ergo eſt *CPq* ad *PMquad.* ut $QR \times 2PM$ ad *QT quad.* ideoque $\frac{QT\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2\ PM\ cub.}{CP\ quad.}$, & $\frac{QT\ quad. \times SP\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2\ PM\ cub. \times SP\ quad.}{CP\ quad.}$ Eſt ergo (per corollarium 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta reciprocè ut $\frac{2\ PM\ cub. \times SP\ quad.}{CP\ quad.}$, hoc eſt (neglectâ ratione determinatâ $\frac{2\ SP\ quad.}{CP\ quad.}$) reciprocè ut *PM cub.* *Q. E. I.*

(q) Idem facilè colligitur etiam ex propoſitione præcedente.

Scho-

(p) 222. Similia ſunt triangula CPM, PZT, anguli enim ad M & T recti æquales ſunt, & quoniam anguli ZPT + MPC, & anguli MPC + MCP, recto æquantur, erit etiam MCP = ZPT; & $PR^2 = QR \times \overline{RN + QN}$ (per Prop. 36. lib. 3. Elem.) Cum autem CP ſit radius circuli & SP ſit linea infinita adeòque SM = SP, erunt CP, SP, $\frac{2SP^2}{CP^2}$, quantitates conſtantes.

(q) 223. *Idem facilè colligitur ex propoſitione præcedente* quâ conſtat vim centripetam eſſe reciprocè ut $SP^2 \times PV^3$. Nam centro virium S in infinitum abeunte, omnes SP ſunt æquales adeóque conſtantes, & propterea vis reciproce ut PV^3.

224.

Scholium.

(r) Et argumento haud multum diſſimili corpus invenietur moveri in ellipſi, vel etiam in hyperbolâ vel parabolâ, vi centripetâ, quæ ſit reciprocè ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

(r) 224. Ut multa de ſectionibus Conicis mox erunt dicenda, viſum eſt eas præmittere ex Conicis propoſitiones quæ ſæpius occurrent, ne memoriæ vitio aut faſtidio ad alios Autores recurrendi demonſtrationum vis Lectores fugiat.

Def. 1ª. Si Planum quodpiam ſecet conum, ſed per ejus Verticem non tranſeat, interſectio Coni & iſtius Plani dicitur *Sectio Conica*.

2ª. Si ducatur planum per Verticem Coni, parallelum plano ſecanti, conum ipſum vel ſecabit, vel tanget, vel totum erit extra eum; Hinc diſtinguuntur ſectionum Conicarum ſpecies, dicentur primo caſu *Hyperbolæ*, 2°. *Parabolæ*, 3°. *Ellipſes*.

3ª. Si ſint duo Coni ſimiles ſibi per Verticem oppoſiti, illud planum verticale quod unum è Conis ſecat, alterum etiam ſecabit, ideo, planum ſectionis ipſi Parallelum utrumque etiam Conum ſecabit, & ex utriuſque Coni ſectione formabuntur in eo Plano duæ *Hyperbolæ oppoſitæ*.

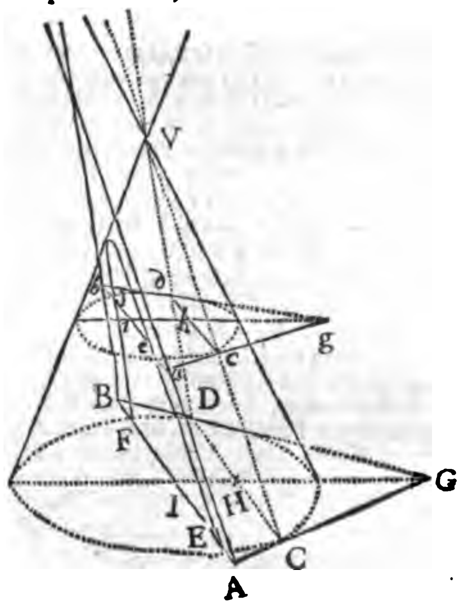
4ª. Si ſecundùm lineas rectas in quibus planum per Verticem Coni ductum ſecat Coni ſuperficiem, applicentur duo plana Conum tangentia, eorum cum plano Hyperbolarum interſectiones, dicuntur Hyperbolarum *Aſymptoti*; nam ut ea plana ſuperficiem Coni jam tetigerunt, nullibi eam ſuperficiem iterum attingent, non ergo attingent Hyperbolam quæ terminatur in ſuperficie Coni & quæ eſt in plano lineis quas tangunt parallelo.

Lemma I. Sit linea ab unâ Aſymptoto ad alteram ducta, quæ per Hyperbolam ſecetur, partes ejus lineæ inter Hyperbolam & Aſymptotum utrinque contentæ ſunt æquales.

Et ſi lineæ, inter ſe Parallelæ, ab unâ Aſymptoto ad alteram ducantur, æqualia erunt facta partium utriuſque Parallelæ per Hyperbolam ſectæ.

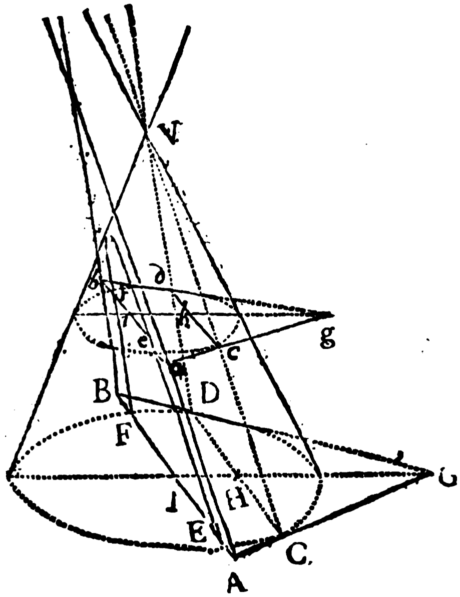
Si verò lineâ ab unâ Hyperbolâ ad oppoſitam ductâ per Aſymptotos ſecetur, partes ejus lineæ inter Hyperbolam & Aſymptotum utrinque contentæ ſunt æquales.

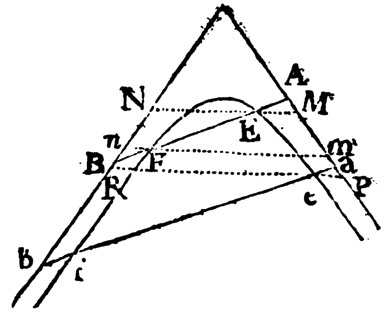
Et ſi lineæ, inter ſe Parallelæ, ab unâ Hyperbolâ ad oppoſitam ducantur, æqualia erunt facta partium utriuſque Parallelæ per Aſymptotum ſectæ (Apoll. lib. 2. Prop. 8. & 16.)



Demonſt. Primum talis ſit linea AB ut planum per eam lineam duci poſſit baſi coni parallelum, cujus ſectio cum cono erit circulus CEFD, ducatur planum VCD per verticem Coni VCD plano Hyperbolarum parallelum & ſecundum lineas VC, VD applicentur plana Conum tangentia, in quibus erunt Hyperbolæ Aſymptoti & Tangentes circuli

De Motu Corporum.





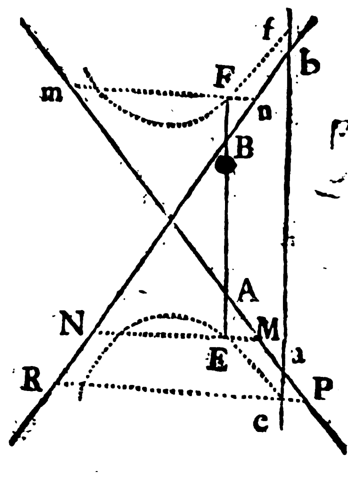
CEFD in punctis C & D: concurrant illæ Tangentes in G; ex G per centrum circuli ducatur linea GHI quæ erit perpendicularis in chordam CD eamque biſariam ſecabit, ut etiam ejus Parallelam AB, & chordam EF (per 3. 3. Elem.) eſt ergo IA=IB, & IE=IF unde IA−IE ſive AE=IB−IF ſive BF & (per 36. 3. Elem.) $\overline{CA}^2 = AF \times AE = AF \times BF$.

Sit verò linea ab huic Parallela, ſive in eâdem ſive in oppoſitâ ſectione; ſimili ratiocinio oſtendetur eſſe ae=bf; & $\overline{ca}^2 = af \times ae = af \times bf$. Sed figura ACac eſt Parallelogramma, eſt enim tota in plano Tangente Conum, & terminatur per ſectiones planorum Parallelorum, nam Cc & Aa ſunt ſectiones plani Verticalis & plani Hyperbolarum ipſi Paralleli, & CA & ca ſunt ſectiones planorum baſi coni Parallelorum; eſt ergo CA=ca & $\overline{CA}^2 = \overline{ca}^2$; ac per conſequens $AF \times BF = af \times bf$.

Caſus 2dus. Quod ſi linea AB utcumque ſit ducta inter Aſymptotos, & Hyperbolam ſecet in E & F erit AE=BF; nam per E & F ducantur lineæ MEN, mFn, tales ut plana per eas ducta ſint baſi Coni parallela, Triangula AEM & AFm, BFn & BEN erunt ſimilia propter Parallelas, eſt ergo AE:AF=EM:Fm & BE:BF=NE:nF; eſt ergo per compoſitionem rationis.. $AE \times BE : AF \times BF = EM \times NE : Fm \times nF$, ſed per demonſtrationem primi caſus eſt $EM \times NE = Fm \times nF$, ergo $AE \times BE = AF \times BF$, unde (per Prop. 16. 6. Elem.) AF:AE=BE:BF & dividendo AF−AE ſive EF:AE=BE−BF ſive EF:BF, cum ergo ſit EF:AE=EF:BF eſt AE=BF.

Ducatur verò linea quævis ab, priori AB parallela, & per punctum e ducatur linea PeR lineæ MEN parallela, ſimilia erunt Triangula AEM & aeP, BEN & beR ob parallelas eſt ergo AE:ae=EM:eP & BE:be=EN:eR, eſt ergo per compoſitionem rationis... $AE \times BE : ae \times be = EM \times EN : EP \times eR$, ſed per caſum primum eſt $EM \times EN = eP \times eR$, ergo $AE \times BE = ae \times be$.

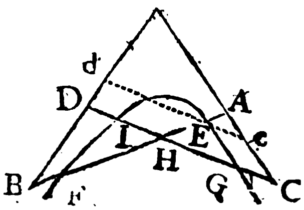
Caſus 3us. Si lineæ de quibus agitur,



ſed

ab unâ Hyperbolâ ad ejus oppoſitam ducerentur & per Aſymptotas ſecarentur, eadem prorſus foret demonſtratio ac in 2°. caſu, niſi quod in primâ demonſtrationis parte, componendo concluderetur, non dividendo.

Lemma II. Sint duæ lineæ in Hyperbolarum plano ductæ quæ in quodam puncto ſibi occurrant; facta partium ſingulæ lineæ ſumptarum à puncto concurſus uſque ad punctum Hyperbolæ, ſunt inter ſe ſicut facta partium ſumptarum ab Hyperbolâ uſque ad utramque Aſymptotum.



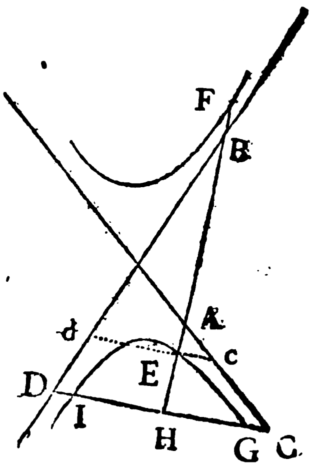
Lineæ AB, DC ſibi mutuo occurrant in H, eſt $EH \times FH : GH \times IH = AE \times BE : CG \times DG$.

Demonſt... Ducatur per punctum E Hyperbolæ, in quo ſecatur per lineam AB productam ſi neceſſe ſit, linea cEd, alteri lineæ datæ CHD Parallela: ſimilia erunt Triangula AHC & AEc, BHD & BEd: unde habebuntur hæ proportiones

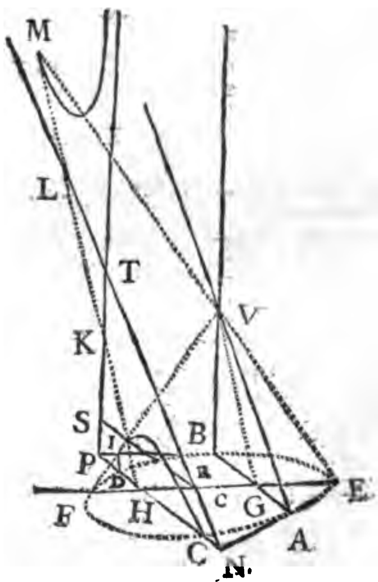
AH ſive $AE + EH : AE = HC$ ſive $CG + GH : cE$

& BH ſive $BF + FH : BE = HD$ ſive $DI + IH : dE$, & per compoſitionem rationis $AE \times BF + AE \times FH + EH \times BF$ (ſive AE per Lem. I.) $+ EH \times FH : AE \times BE = CG \times DI + CG \times IH + GH \times DI$ (ſive CG per Lem. I.) $+ GH \times IH : cE \times dE$ (ſive $CG \times DG$ per Lem. I.) eſt verò $BF + FH + HE = BE$, & $DI + IH + HG = DG$ ergo eſt $AE \times BE + EH \times FH : AE \times BE = DG \times CG + GH \times IH : CG \times DG$. & dividendo: $EH \times FH : AE \times BE = GH \times IH : CG \times DG$
ergo alternando $EH \times FH : GH \times JH = AE \times BE : CG \times DG$.

Eadem eſt demonſtratio ſive lineæ ſint in eadem Hyperbola, ſive, una ſit in unâ Hyperbolâ altera inter oppoſitas, ſive ambæ inter oppoſitas ducantur. Ergo facta partium &c.



Lemma III. Sint duæ Parallelæ in ſectione Conicâ ductæ quæ ſecentur per lineam quamvis, facta partium uniuſcujuſque Parallelæ ſumptarum à curvâ ad punctum ejus interſectionis, ſunt inter ſe ut facta partium lineæ ſecantis ſumptarum à curvâ ad punctum interſectionis cum Parallelâ.



De Motu Corporum.

Sint AB, CD, parallelæ ſectæ per lineam EF in punctis G & H, eſt $AG \times GB : CH \times HD = EG \times GF : EH \times HF$.

Sit V, vertex coni, ex eo ducantur VE, VF ad extremitates lineæ EF; ducatur in BA, planum VAB, per verticem coni tranſiens & in CD planum Hyperbolarum ipſi Parallelum, in plano VBA ducatur VG, & in H, HM ipſi VG parallela quæ jacebit in plano Hyperbolarum: erunt Triangula VGE & MHE, VGF & IHF ergo ſimilia unde habentur hæ proportiones

$$VG : MH = EG : EH$$

& $VG : IH = FG, FH$, & per compoſitionem rationis

$$\overline{VG}^2 : MH \times IH = EG \times GF : EH \times FH.$$

Lineæ VE, VF ductæ per verticem coni & punctum in ejus ſuperficie ſumptum ſunt ſemper in ſuperficie coni, ergo earum interſectiones I & M cum lineâ HM in plano Hyperbolarum ductâ ſunt in ipſâ curvâ Hyperbolicâ cujus Aſymptoti ſint TN, TP parallelæ lineis VA, VB; per punctum I in quo linea HM occurrit Hyperbolæ ducatur SIR lineis DC & AB parallela, ſimilia erunt Triangula VAG & LRI, VBG & KSI lineis enim parallelis terminantur, erit ergo

$$VG : AG = LI : RI$$

& $VG : GB = KI : SI$ & per compoſitionem rationis

$\overline{VG}^2 : AG \times GB = LI \times KI : RI \times SI$ ($= PD \times DN$ per Lem. I.) Sed per Lemma II. eſt

$$LI \times KI : PD \times DN = MH \times IH : CH \times DH$$

eſt ergo

$$\overline{VG}^2 : AG \times GB = MH \times IH : CH \times DH$$

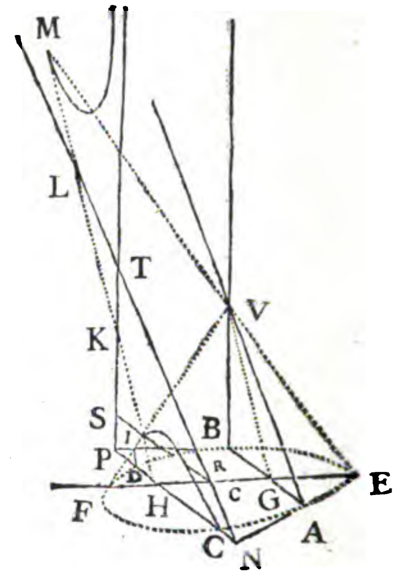
& alternando

$$\overline{VG}^2 : MH \times IH = AG \times GB : CH \times DH.$$

Erat autem $\overline{VG}^2 : MH \times IH = EG \times FG : EH \times FH$, ex primâ demonſtrationis parte, eſt ergo $AG \times GB : CH \times DH = EG \times FG : EH \times FH$. Q. E. D.

Caſ. 2. Si punctum F infinitè diſtaret à puncto E, linea FG æqualis cenſenda foret lineæ FH, ideoque $EG \times FG : EH \times FH = EG : EH = AG \times GB : CH \times DH$, hoc eſt ipſæ partes ſecantis forent inter ſe ſicut facta partium parallelarum quas ſecat.

Caſ. 3. Si punctum F non foret in eâdem ſectione in qua eſt punctum E ſed in oppoſita, eadem foret demonſtratio niſi



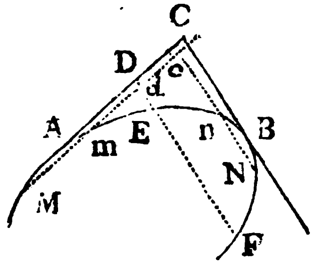
quod puncta M & I, in eadem Hyperbola forent.

Caſ. 4. Eadem etiam fiet demonſtratio ſive puncta G & H ſint intra extremitates Parallelarum AB, CD, aut intra vertices E & F lineæ ſecantis, ſive ſint extra.

Corol. 1. Sumatur medium lineæ ſecantis puncta E & F ſitque c, ſi interſectio ejus lineæ per Parallelam ſit intra vertices, erit factum partium ejus æquale quadrato ejus dimidii dempto quadrato ejus portionis à Centro ad interſectionem ſumptæ, v. gr. erit $EG \times GF = \overline{cE}^2 - \overline{cG}^2$ ut liquet per 5. 2. Elem. Si interſectio ejus lineæ ſit extra vertices, erit factum ejus partium æquale quadrato portionis ejus à Centro ad interſectionem ſumptæ dempto quadrato dimidiæ lineæ, v. gr. foret $EG \times GF = \overline{cG}^2 - \overline{cE}^2$, ut liquet per 6. 2. Elem.

Corollar. 2. Ex puncto quovis ductæ ſint duæ Tangentes ad ſectionem Conicam, & ex quodam puncto unius ex illis Tangentibus, ducatur linea trans ſectionem Conicam alteri Tangenti parallela. Quadratum prioris Tangentis eſt ad quadratum alterius Tangentis ut quadratum par-

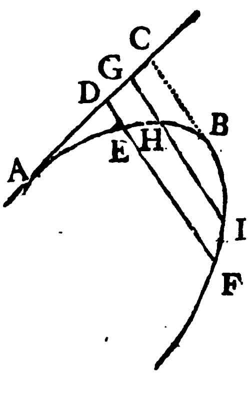
tis in primâ Tangente aſſumptæ ad factum lineæ Parallelæ alteri tangenti per ejus Partem inter Tangentem & curvam comprehenſam (Apol. lib. 3. Prop. 16.)



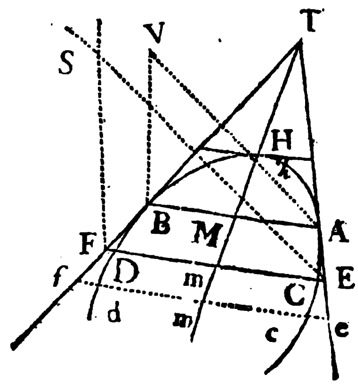
Sint A C, C B Tangentes ſectionis Conicæ A B F, ex D ducatur D E F parallela C B, erit $\overline{AC}^2 : \overline{CB}^2 = \overline{AD}^2 : DF \times DE$.

Ducatur M m c parallela Tangenti A C, & N n c parallela Tangenti C B, & M m c lineam D E F ſecet in d, erit per Lem. ſup. $cn \times cN : dF \times dE = Mc \times mc : Md \times md$, eſt enim M c linea ſecans parallelas c N, d F; evaneſcant arcus M m, & N n, coincident lineæ M m c cum A C & N n c cum B C, eritque $cn = CN = CB$, $dF = DF$, $dE = DE$, $Mc = mc = AC$, $Md = md = AD$, ergo erit $\overline{CB}^2 : DF \times DE = \overline{AC}^2 : \overline{AD}^2$ & permutando & alternando $\overline{AC}^2 : \overline{CB}^2 = \overline{AD}^2 : DF \times DE$. Q. D. E.

Coroll. 3. Si ex variis punctis Tangentis ducantur lineæ Parallelæ trans ſectionem Conicam, Quadrata partium Tangentis ſunt inter ſe ut facta Parallelarum per earum partem inter Tangentem & curvam interceptam. Sit A C Tangens ex ejus punctis D & G ducantur Parallelæ D E F, G H I, erit $\overline{AD}^2 : \overline{AG}^2 = DF \times DE : GI \times GH$,



nam ſupponatur in B ea Tangens quæ his lineis ſit Parallela ſecetque priorem in C erit per Corollarium ſuperius $\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 : DF \times DE = \overline{AG}^2 : GI \times GH$ ergo alternando, $\overline{AD}^2 : \overline{AG}^2 = DF \times DE : GI \times GH$. Q. D. E.



Lemma IV. Dicatur ſectionis Conicæ Diameter ea linea quæ Parallelas in curva terminatas bifariam dividit: ſit ejus Diametri vertex punctum in quo curvæ occurrit; illæ Parallelæ quas biſecat ipſi ordinatim applicatæ dicantur, & earum alterutra pars dicatur ordinata illius Diametri; portio Diametri ab ejus vertice ad Ordinatam uſque, dicetur ejus abſciſſa: & denique ea Diameter quæ Parallelas biſecando ſimul eſt illis perpendicularis dicatur Axis.

His poſitis 1°. Linea quæ duas Parallelas biſecabit erit Diameter curvæ: id eſt cæteras omnes lineas hiſce Parallelas etiam biſecabit. (Apol. lib. 2. Prop. 28.)

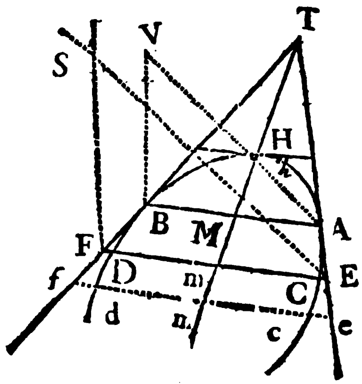
2°. Linea in Vertice Diametri ducta & Ordinatis Parallela, erit Tangens curvæ in eo Vertice (Apol. Lib. 1. Prop. 17.) & vice verſâ ea linea erit Diameter quæ biſecabit lineam quæ erit Parallela Tangenti per ejus verticem ductæ: (Apol. Lib. 2. Prop. 7.)

Denique; Quadrata ordinatarum erunt inter ſe ut facta partium quas ſecant in Diametro.

Demonſt. In extremitatibus lineæ A B ducantur Tangentes quæ concurrant in T,

ſper

DE MOTU CORPORUM.



per medium M, lineæ A B ducatur T M m ſitque linea D C parallela lineæ B A hinc inde producta donec Tangentibus T B, TA productis ſi neceſſe ſit in E & F occurrat: Per A B & Verticem coni V ducatur planum V A B, & per E F planum ipſi Parallelum quod Hyperbolam in Cono formabit, erit ergo D C linea ad Hyperbolam pertinens, & propter Tangentes B F A E, puncta F & E ad Aſymptotos pertinebunt, ergo (per Lem. I.) eſt $EC = FD$, ſed ob parallelas A B, E F & quia bifariam dividitur A B in M per lineam T M m erit $mE = mF$, itaque $mE - EC$ (ſive mC) $= mF - FD$ (ſive mD) ergo linea T M, lineam CD lineæ A B parallelam bifariam dividit, idem verò de quâvis linea c d parallelâ lineæ AB demonſtrabitur ergo linea M m per medium linearum A B, C D, tranſiens omnes earum Parallelas in curva terminatas bifariam dividit. Eſt ergo Diameter curvæ.

2°. Linea per Verticem Diametri H ducta, & ordinatis Parallela eſt tangens curvæ, pone enim illam lineam ſectioni iterum occurrere in h, linea T M quæ dividit bifariam omnes Parallelas lineæ A B in curva terminatas, deberet bifariam dividere lineam H h, ſed illud abſurdum, ſiquidem illam attingit in ejus extremo H, ergo linea per verticem Diametri ducta ordinatis parallela curvam iterum non attingit, eſt ergo Tangens in puncto H. Vice verſâ ſit Tangens lineæ A B parallela, & ex medio M lineæ A B per H punctum contactus ducatur linea, ea erit Diameter; ſi enim Diameter quæ tranſit per M ad h non verò ad H pertingeret, ducatur per h linea Parallela lineæ A B, ea erit Tangens in h; eritque Parallela Tangenti in H, ſed illud eſt abſurdum, ergo linea M H eſt Diameter.

Denique cum Diameter ſecet Parallelas ſunt (juxta Lem. III.) facta partium Parallelarum, ut facta partium quas ſecant in Diametro, ſed partes ſingulæ Parallelæ à Diametro ſectæ ſunt utrinque æquales & ordinatæ dicuntur, ergo quadrata Ordinatarum ſunt ut facta partium quas ſecant in Diametro.

Lemma V. E quovis puncto Sectionis Conicæ ducatur ordinata ad Diametrum, & Tangens quæ illi Diametro occurrat in quodam puncto: diſtantiæ hujus puncti ab utroque vertice Diametri erunt inter ſe ſicut abſciſſæ ab utroque vertice Diametri ſumptæ (Apollon. l. 1. prop. 3[illegible]).

E puncto P curvæ ducatur ordinata P O ad Diametrum A D, & in eâ ſumatur punctum M tale ut ſit $AM : DM = AO : DO$, ducaturque linea P M, illa in nullo alio puncto F curvæ occurret, hoc eſt, erit Tangens in P.

Demonſt... Ex eo puncto ſuppoſito F ducatur ordinata F H, erit $MO : MH = PO : FH$ & $\overline{MO}^2 : \overline{MH}^2 = \overline{PO}^2 : \overline{FH}^2$, ſed ſi F pertineat ad curvam eſt (per Lem. IV.) $AO \times OD : AH \times HD = \overline{PO}^2 : \overline{FH}^2$ ergo $AO \times OD : AH \times HD = \overline{MO}^2 : \overline{MH}^2$ & alternando $AO \times OD : \overline{MO}^2 = AH \times HD : \overline{MH}^2$. Ducantur autem per A & D lineæ A X, D K parallelæ P M quæ ſecent P O ejuſque productionem in E & K, & per P & H ducatur linea quæ parallelas A X & D K in I & S, ſecet, ſimilia erunt Triangula AOE, MOP, DOK ob parallelas, unde habentur hæ proportiones $AO : MO = AE : MP$.

& $OD : MO = DK : MP$ & per compoſitionem rationis erit

$AO \times OD : \overline{MO}^2 = AE \times DK : \overline{MP}^2$.

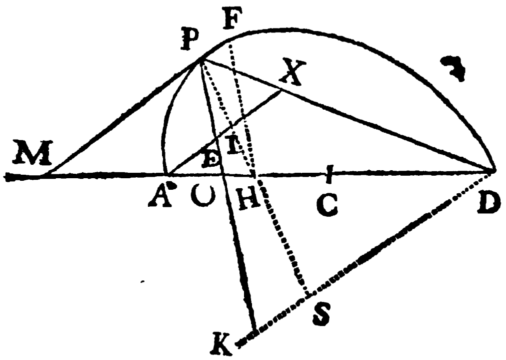
Pariter ſimilia ſunt Triangula AHI, MHP, DHS, unde eſt: $AH : MH = AI : MP$
& $DH : MH = DS : MP$.

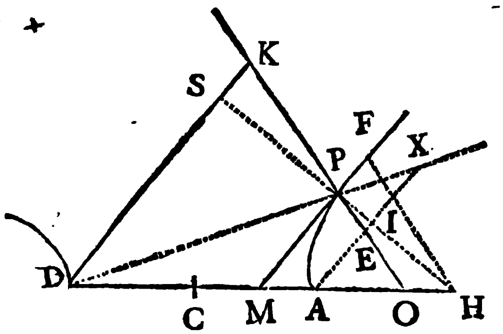
& per compoſitionem rationis erit

$AH \times DH : \overline{MH}^2 = AI \times DS : \overline{MP}^2$.

Sed ſi F pertinet ad curvam invenitur $AO \times OD : \overline{MO}^2 = AH \times DH : \overline{MH}^2$, foret ergo $AE \times DK : \overline{MP}^2 = AI \times DS : \overline{MP}^2$.

ſive





ſive $AE \times DK = AI \times DS$ & $AE : AI = DS : DK$, quod abſurdum eſſe in datâ Hypotheſi ſic evincitur.

Ex P ad Diametri extremitatem D, ducatur P D, quæ lineam A E I (producta ſi neceſſe ſit) ſecet in X; ob parallelas P M, X A eſt $AM : DM = PX : DP$ & $PX : DP = XE : DK$, & ob Triangula ſimilia A O E, D O K eſt $AO : DO = AE : DK$, & quia per Hypotheſim eſt $AM : DM = AO : DO$, erit $XE : DK = AE : DK$ ideoque in datâ Hypotheſi $XE = AE$ & cum ſit $XI : XE = DS : DK$ ob parallelas, erit $XI : AE = DS : DK$ erat verò ex ſuppoſitione quod F eſt in curva, $AB : AI = DS : DK$, foret ergo $XI : AE = AE : AI$, & $AE^2 = XI \times AI$. Sed AE^2 quadratum dimidii lineæ AX eſt ſemper majus Rectangulo ejus partium $XI \times AI$ (per 5. 2. Elem.), abſurdum ergo eſt ea eſſe æqualia quod tamen ſequitur ſuppoſito punctum F ad curvam pertinere, ideoque, M P curvam tangit in P. Sed ad idem cujuſvis curvæ punctum duas Tangentes rectas duci non poſſe ex naturâ curvarum liquet, ergo Tangens in P, ita occurrit Diametro ut ſit $AM : DM = AO, DO$. Q. E. D.

Cor. 1. Si Diameter A D ſit infinita hoc eſt punctum D ad infinitum removeatur, D M & D O æqualia cenſenda ſunt, cum ergo ſit $DM : AM = DO : AO$ erit $AM = AO$; ſive diſtantia puncti concurſus Tangentis cum Diametro, ab ejus vertice, æqualis erit abſciſſæ ab eodem vertice ſumptæ (Ap. lib. 1. 35.)

Cor. 2. Si Diameter AD ſit terminata, ejuſque medium ſit C ſitque P O ordinata fiatque $CM : CA = CA : CO$, erit P M tangens in puncto P; Etenim ſumendo ſummam & differentiam terminorum harum rationum eſt,

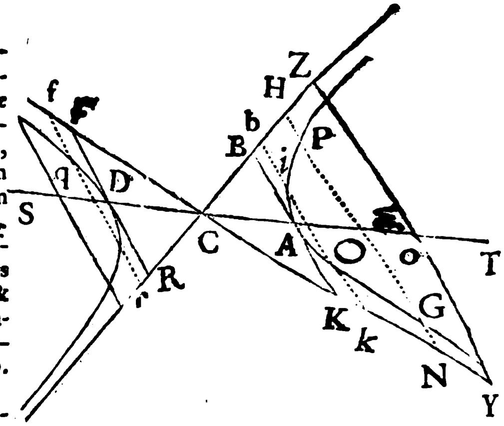
$CM + CA : CA + CO = CM - CA : CA - CO$

ſive in primâ ratione ponendo DC pro CA, eſt $DM : DO = AM : AO$ aut alternando $DM : AM = DO : AO$, ergo (per Lemma) MP erit Tangens in P, eſt ergo ſemidiameter media proportionalis inter abſciſſam à centro ſumptam, & partem Diametri à centro ad concurſum Tangentis comprehenſam. (Apol. Lib. 1. 37.)

Cor. 3. In Puncto P Sectionis Conicæ ducatur Tangens, quæ ſecet Diametrum in M, & ducatur ordinata P O quæ ſecet Diametrum in O factum partium Diametri $AO \times DO$ eſt æquale facto $CO \times OM$ ex partibus lineæ à Centro ad Tangentem ſumptæ & per ordinatam in O ſectæ. Cum enim ſit $CM : CA = CA : CO$ tollendo terminos ſecundæ rationis à terminis primæ erit $MA : AO = CA$ (ſive DC) : CO, unde componendo erit $MO : AO = DO : CO$, ideoque $AO \times DO = CO \times MO$: & (per 5. vel 6. 2. Elem.) prout O eſt inter A & D vel ultra, erit $CO \times MO = AC^2 - CO^2$ vel $CO^2 - AC^2$, unde deducitur $MO = \frac{AC^2 - CO^2}{CO}$ vel $\frac{CO^2 - AC^2}{CO}$.

De Motu Corporum.

De Hyperbolâ.



Theor. I. Lineæ omnes ab Interſectione Aſymptotorum in eorum Angulo ductæ & utrinque productæ, ſunt Hyperbolæ utriuſque Diametri, & earum portio inter utramque Hyperbolam comprehenſa, dicitur Diameter tranſverſa, & bifariam dividitur in Interſectione Aſymptotorum quæ ideo centrum Hyperbolarum vocatur. Tangentes verò in utroque vertice ejuſdem Diametri ductæ & inter Aſymptotos comprehenſæ ſunt inter ſe Parallelæ & æquales, & bifariam dividuntur ab ea Diametro dicunturque ejus Diametri conjugatæ. (Apol. lib. 1. Prop. 30. lib. 2. Prop. 3. & 19.)

Demonſt. Ducta enim quomodocunque linea S C T in Angulo Aſymptotorum ZCY per earum interſectionem C, ſi crura CZ & CY ſumantur reciprocè proportionalia ſinubus Angulorum adjacentium, ducaturque linea ZY illa per lineam SCT bifariam dividetur; nam in Triangulo C Z Y eſt C Z : C Y = Sin. Y : Sin. Z = Sin. Y C o : Sin. Z C o (per conſt.) & alternando, Sin. Y : Sin. Y C o = Sin. Z : Sin. Z C o. Sed in Triangulo C o Y eſt

Sin. Y : Sin. Y C o = C o : Y o,

& in Triangulo C M Z eſt

Sin. Z Sin. Z C o = C o : Z o,

ergo cum duæ priores rationes ſint æquales, eſt C o : Y o = C o : Z o, ideoque Y o = Z o.

Omnis autem linea H N lineæ Z Y parallela ſimiliter bifariam dividetur in O per lineam S T, partes autem ejus inter Hyperbolam & Aſymptotum utrinque contentæ ſunt æquales, per Lem. I. cum ergo ſit ſemper H O = O N, & H P = G N eſt H O − H P = N O − N G ſive O P = O G. Ergo linea S T, lineas omnes lineæ Z Y parallelas, in Hyperbola contentas bifariam ſecat, eſt ergo ejus Diameter per Lemma V.

Sint verò A & D puncta in quibus linea S T occurrit Hyperbolis, per ea ducantur B A K, F D R parallelæ lineæ Z Y inter Aſymptotos contentæ, ergo biſecantur in A & D, cum verò ſint parallelæ ordinatis Diametro S T ſunt Tangentes in verticibus A & D (per Lemma IV.) & inter ſe Parallelæ.

Dico præterea eas eſſe æquales, ducantur enim Parallelæ ipſis proximæ b i K, f q r: erit f q × q r = b i × K i (per Lem. I.) accedentibuſque ordinatis ad Tangentes ſit tandem f q = F D, q r = R D; b i = B A, & K i = K A eſt ergo F D × R D = B A × K A, ſed eſt F D = D R & B A = K A ergo F D² = B A² & F D = B A = K A. Unde tandem cum Triangula CAK & C D F ſint ſimilia, & ſit C A : C D = K A : F D eſt etiam C A = C D.

Theor. II. Tertia proportionalis Diametro tranſverſæ & Diametro conjugatæ dicatur Latus Rectum; Eſt Diameter tranſverſa ad Latus Rectum ut factum Abſciſſarum ab utroque vertice ſumptarum, ad quadratum Ordinatæ; Hinc iſta curva ὑπερβολα ſive excedens dicitur, quia quadratum ordinatæ majus eſt facto lateris Recti per abſciſſam à proximo vertice (Apol. lib. I. Prop. 21.) Coincidit verò hæc propoſitio cum iſta, eſt quadratum Diametri Tranſverſæ ad quad. Diametri conjugatæ ut factum abſciſſarum ad quadratum ordinatæ.

Demonſt. Sit ut prius Diameter tranſverſa D A T, conjugata B A K & ordinata inter Aſymptotas contenta HPOGN: ſunt (per Lem. II.) facta partium ſumptarum in lineis D O, H N à puncto Hyperbolæ ad utramque Aſymptotum, ſicut facta partium earundem linearum à puncto concurſus O, uſque ad Hyperbolam ſumptarum; hoc eſt A C × A C : G N × G H = A O × D O : P O × G O. Sed G N × G H æqualis eſt quadrato ſemi Tangentis B A, ſive ſemidiametri conjugatæ; nam (per Lem. I.) eſt G N × G H = b i × K i & per præced. dem. b i × K i = B A²) & eſt P O = G O ideo pro-

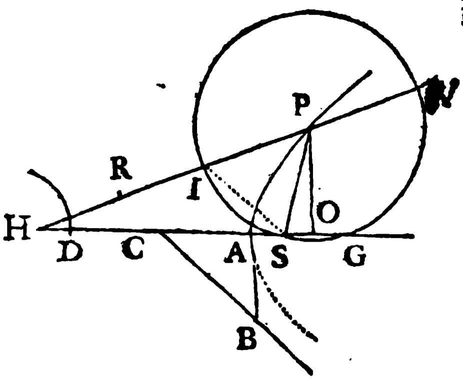
por-

portio ſuperior huc redit, $AC^2 : BA^2 = AO \times DO : PO^2$. Sit verò L latus rectum, eſt per ejus definitionem $2AC : 2BA = 2BA : L$, ergo eſt $2AC : L = 4AC^2 : 4BA^2 = AC^2 : BA^2$ ideoque $2AC.L = AO \times DO : PO^2$.

Hinc deducitur quod $PO^2 = \frac{L \times AO \times DO}{2AC} = \frac{DO}{AD} \times L \times AO$ ut ergo DO eſt ſemper major quàm AD, eſt etiam PO^2 ſemper major quàm $L \times AO$. Q. E D.

Theor. III. Diameter illa quæ Aſymptotorum Angulum biſariam dividit eſt perpendicularis ſuis ordinatis (ut liquet ex Elem.), ideoque eſt Axis Hyperbolæ & ejus Diameter Conjugata Axis conjugatus: ſi à Centro feratur utrinque in Axem longitudo Aſymptoti à centro ad extremum Axis conjugati ſumptæ, puncta notata in Axi dicuntur foci Hyperbolæ, & ſi à focis ad quodvis Hyperbolæ punctum ducantur lineæ, earum differentia eſt ſemper Axi tranſverſo æqualis. Latus Rectum axis dicitur Latus rectum Principale, & tota linea ordinatim Axi applicata in foco eſt æqualis illi lateri recto Principali, quod erit majus quadruplo diſtantiæ verticis à foco, ſi denique biſariam dividatur Angulus quem faciunt lineæ ab utroque foco ad idem curvæ punctum ductæ, linea eum angulum biſecans, erit Tangens curvæ in eo puncto. (Apol. lib. 3. 51.)

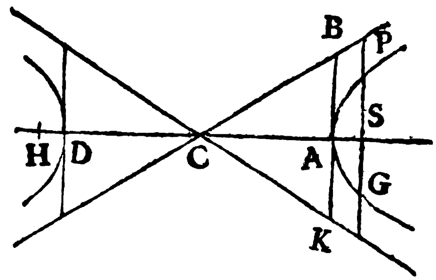
Demonſt. Ducatur quævis linea ex foco H, ſumatur $HI = DA$, & ducta IS ad alterum focum S, fiat $ISP = PIS$ erit $PI = PS$, ideoque differentia linearum HP, SP erit $HI = DA$ ſeu axi tranſverſo, dico hoc poſito, P ad Hyperbolam pertinere. Centro P, radio PS, deſcribatur circulus $ISGN$ habebitur hæc proportio, $HI : HS = HG : HN$ ſumatur dimidium harum linearum manebit proportio, ſit autem $\frac{1}{2} HI = HR$, $\frac{1}{2} HS = CS$ $\frac{1}{2} HG = \frac{1}{2} HS + \frac{1}{2} SG$ & demiſſa PO perpendiculari in SG eſt $\frac{1}{2} SG = SO$, ergo $\frac{1}{2} HG = CS + SO = CO$, Denique $\frac{1}{2} HN = \frac{1}{2} HI + \frac{1}{2} IN = RI + IP = RP$ eſt ergo $HR : CS = CO : RP$: componendo primum habetur $HR : CS + HR = CO : RP + CO$ & prioris rationis terminos terminis ſecundæ jungendo habetur $HR : CS + HR = CO + HR :$



$HR + RP + CS + CO$, ſive quia $HR = AC = DC$, & $CS = CH$ eſt $AC : CS + AC = DO : HP + HO$. At operationibus contrariis in eandem proportionem $HR : CS = CO : RP$ factis, hoc eſt, dividendo & poſtea prioris rationis terminos e terminis ſecundæ detrahendo, ſubſtitutionibus factis erit

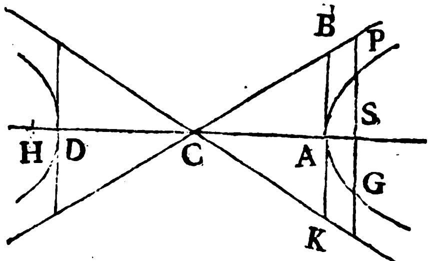
$AC : CS - AC = AO : HP - HO$, multiplicatis ergo terminis utriuſque proportionis erit

$AC^2 : CS^2 - AC^2 = AO \times DO : HP^2 - HO^2$ ſit autem perpendicularis AB erecta ab A uſque ad Aſymptotam CB, eſt $CB = CS$, & $CS^2 - AC^2 = AB^2$; eſt etiam $HP^2 - HO^2 = PO^2$, eſt ergo $AC^2 : AB^2 = AO \times DO : PO^2$, ſed eſt $AC^2 : AB^2 = DO \times AO$ ad quadratum ordinatæ in O, (per Theor. II.) ergo PO eſt ipſa illa ordinata & punctum P ad Hyperbolam pertinet.

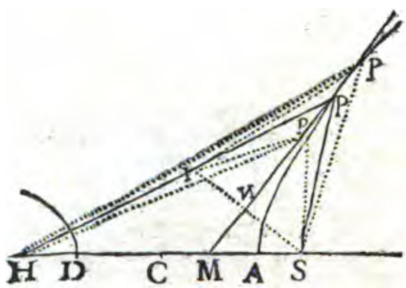


Sit autem PS ordinata in foco, erit $AC^2 : AB^2 = AS \times DS : PS^2$ eſt verò $DS = CS + AC$ & $AS = CS - AC$, ergo $DS \times AS = CS^2 - AC^2 = AB^2$, ergo $AC^2 : AB^2 = AB^2 : PS^2$, & $AC : AB = AB : PS$, & duplicando omnes ter-

DE MOTU CORPORUM.

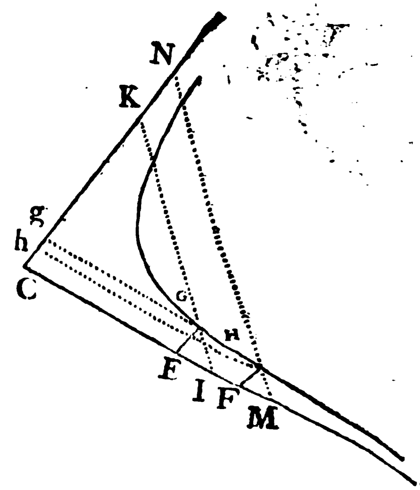


terminos $2\,AC : 2\,AB = 2\,AB : 2\,PS$ ſive PG. Sed eſt per naturam lateris recti $2\,AC : 2\,AB = 2\,AB : L$, ergo $L = PG$: & $\frac{1}{2} L = PS$, ſed cum per Theor. II. ſit $PO^2 = \frac{DO}{AB} \times L \times AO$ erit ergo PS^2 ſive $\frac{1}{4} L^2 = \frac{DS}{AB} \times L \times AS$ & $\frac{1}{4} L = \frac{DS}{AB} \times AS$, ut itaque DS eſt major AB, erit $\frac{1}{4} L$, major AS.



Denique. Ducantur à focis lineæ HP, SP, linea PM bifariam dividat angulum P, dico eam eſſe Tangentem Hyperbolæ in P; hoc eſt illam non occurrere Hyperbolæ in alio quovis puncto p; ex HP tollatur HI = DA, erit PI = PS (per hoc Theor.) & ducta IS erit PM perpendicularis in medium N lineæ IS, ex alio quovis puncto p ducantur rectæ pI pS erunt inter ſe æquales, ob æqualia Triangula pNI, pNS (per 4. 1. Elem.) ſed ſi p eſſet in Hyperbola, eſſet $Hp = HI + pS$ ſive quia $pI = pS$ eſſet $Hp = HI + Ip$, quod abſurdum (per 20. 1. Elem.)

Theor. IV. Si ſumantur pro abſciſſis portiones quævis Aſymptoti ab Hyperbolæ centro, & Ordinatæ ſint Parallelæ alteri Aſymptoto, Ordinatæ erunt ſuis Abſciſſis reciprocè proportionales; Et area inter Aſymptotum, Hyperbolam, ordinatam Vertici axis occurrentem & ordinatam quamvis comprehenſa erit abſciſſæ hujus ordinatæ Logarithmus.



Demonſt. Sit C centrum Hyperbolæ, CE CF abſciſſæ, EG FH ordinatæ Aſymptoto CN parallelæ dico quod eſt $CE : CF = FH, EG$: Ductis enim per G & H lineis Gg, Hh parallelis Aſymptoto CF, & IGK, MHN inter ſe parallelis trans Hyperbolam, erunt ſimilia Triangula IGE & MHF, GKg & HNh propter Parallelas, ideoque eſt

$IG : MH = GE : HF$

& $GK : HN = Gg$ (ſive CE) $: Hh$ (ſive FC) compoſitis rationibus eſt

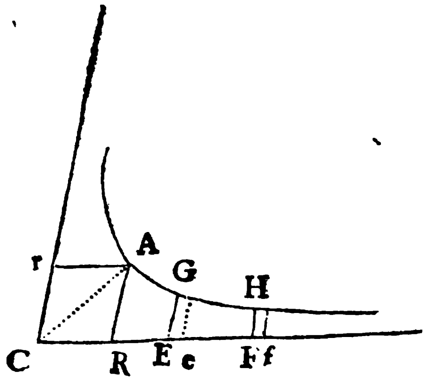
$IG \times GK : MH \times HN = GE \times CE : HF \times FC$.

Sed, (per Lem. I.) eſt $IG \times GK = MH \times HN$, ergo $GE \times CE = HF \times CF$ eſt ergo $CE : CF = HF : GE$,

cum autem Parallelogrammata CG, CH, ſint æquiangula & ea lateribus reciprocis contineri ſit demonſtratum, ſunt æqualia.

Dico denique areas Hyperbolæ eſſe abſciſſarum Logarithmos; ex centro C ducatur axis CA, & ex vertice A ducantur lineæ AR Ar Aſymptotis Parallelæ, ob Angulum C bifariam diviſum & parallelas, erit $CR = AR$ ſit $AR = 1$; & fingantur duæ ordinatæ quæ ita moveantur ut abſciſſæ unius ſint

ſem-

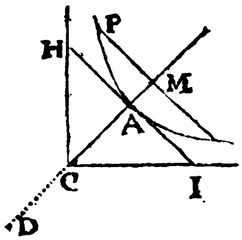


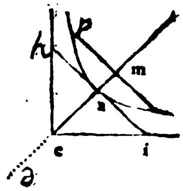
ſemper potentia eadem n alterius; coincident quidem in R, nam quævis potentia unitatis eſt ſemper 1, ſed procedendo ſit $CE = x$ debebit eſſe $CF = x^n$, erunt ergo $GE\ \frac{1}{x}$ & $HF\ \frac{1}{x^n}$ eſt enim $CE : CR = AR : GE$ ſive $x : 1 = 1 : \frac{1}{x}$ & $CF : CR = AR : FH$ ſive $x^n : 1 = 1 : \frac{1}{x^n}$, fluxio autem lineæ CE erit $dx = Ee$, & lineæ CF erit $nx^{n-1}dx = Ff$, ideo areæ RG fluxio erit $dx \times \frac{1}{x} = \frac{dx}{x}$ & areæ RH, $nx^{n-1}dx \times \frac{1}{x^n} = \frac{ndx}{x}$ ſed $\frac{dx}{x} : \frac{ndx}{x} = 1 : n$, ſunt ergo fluxiones earum arearum in Ratione conſtanti 1 ad n, ideoque & areæ integræ RG, RH quæ ſunt earum ſummæ, ſunt in eâdem ratione 1 ad n, ſunt autem 1 & n Exponentes potentiarum abſciſſarum CE, CF, ſunt ergo areæ ſicut illi exponentes, ſed Logarithmi ſunt ſemper ut Exponentes potentiarum quantitatum quarum ſunt Logarithmi, ergo illæ areæ RG, RH, ſunt Logarithmi abſciſſarum CE, CF.

In puncto R ubi abſciſſa eſt unitas area eſt o, ut Logarithmis convenit, fitque negativa retrocedendo ab R verſus C, ſimulque cum ſint abſciſſæ minores unitate CR ſiunt fractiones.

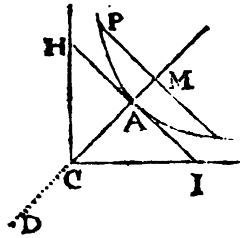
Theor. V. Si Angulus Aſymptotarum ſit Rectus, Hyperbola dicitur æquilatera, æqualeſque ſunt Axes conjugati, ideoque latus RectumAxi tranſverſo eſt æquale, ac (per Theor. [illegible].) facta abſciſſarum quadrato ordinatarum æqualia ſunt, ſicut in circulo: Diverſæ Hyperbolæ eodem Aſymptotorum angulo deſcriptæ ſunt ſimiles: Si vero idem ſit Hyperbolarum axis ſed diverſus Angulus erunt ordinatæ ad idem axeos punctum ſicut Radices quadratæ Laterum Rectorum Principalium, & in ea erunt ratione portiones earum Hyperbolarum per Ordinatas terminatarum quarum æquales ſunt abſciſſæ.

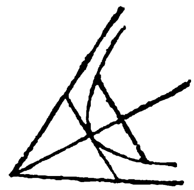
Demonſt. Axis tranſverſus eſt perpendicularis conjugato, dividitque bifariam angulum Aſymptotorum; ſi ergo is angulus ſit 90°. ejuſque dimidium 45°. Triangulum CAH erit Iſoſceles & $CA = AH$, cætera ex his facile deducuntur.





Si in duabus Hyperbolis anguli Aſymptotorum ſint æquales, ut bifariam dividuntur per axem, ſimilia erunt Triangula CAH, cah: ideoque $CA^2 : AH^2 = ca^2 : ah^2$ ſumantur abſciſſæ AM, am in ratione AD ad ad erit etiam DM : dm in eadem ratione cum ſit ergo $AM : am = AD : ad$
& $DM : dm = AD : ad$.
eſt $AM \times DM : am \times dm = AD^2 : ad^2$
ſed eſt $CA^2 : AH^2 = ca^2 : ah^2 = AM \times DM : MP^2 = am \times dm : mp^2$, & altern.
$AM \times DM : am \times dm = MP^2 : mp^2$
eſt ergo $AD^2 : ad^2 = MP^2 : mp^2$ unde eſt $MP : mp = AD : ad$, omnes ergo ordinatæ ac omnia puncta Hyperbolæ determinantur per rationem AD ad ad.

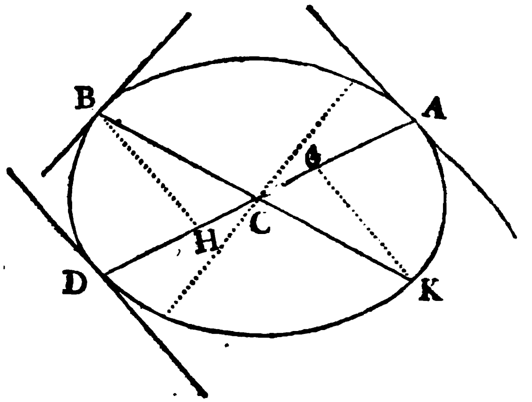




Sint denique in duabus Hyperbolis æquales axes tranſverſi ſed diverſi Aſymptotorum Anguli; diverſa erunt Latera Recta, ſumantur ergo æquales abſciſſæ, & quoniam Axis eſt ad latus Rectum ſicut factum partium abſciſſæ ad quadratum ordinatæ, Axis verò & factum partium abſciſſæ æqualia ſunt utrinque, eadem erit utrinque ratio Lateris recti principalis ad quadratum ordinatæ, erunt ergo ordinatæ quæ ad æquales abſciſſas pertinebunt, ut Radices quadratæ Laterum rectorum principalium, quæ ratio eſt conſtans, ſit ergo utraque abſciſſa in portiones infinitè parvas & utrinque, æquales diviſa ſingula Parallelogrammata quam minima ſuper æquales abſciſſæ portiones formata erunt in eadem ratione ac ordinatæ, ergo areæ Hyperbolarum, quæ ſunt eorum Parallelogrammorum ſummæ, in eâdem erunt ratione, nempe ut Radices quadratæ laterum Principalium.

De Ellipſi.

Theor. I. Omnes Ellipſis Diametri ſeſe bifariam ſecant in eodem puncto quod dicitur centrum Ellipſis, eaque Diametri ordinata quæ per centrum tranſit eſt ipſa Diameter, quæ reſpectu Diametri cujus eſt ordinata conjugata dicitur: (Apol. l. 1. Prop. 30.)



Demonſt. Si per medium C, Diametri Ellipſis AD, ducatur linea quævis BK, & per puncta B & K ducantur BH, KG ordinatæ Diametro AD, erit per Lemma V. AG×GD : AH×HD = GK² : BH² & propter Triangula ſimilia GKC, CBH eſt GK : BH = CG : CH = BC : CK, eſt ergo AG×GD : AH×HD = CG² : CH², eſt autem (per 5. 2. Elem.) AG×GD = AC² − CG² & AH×HD = AC² − CH², eſt ergo

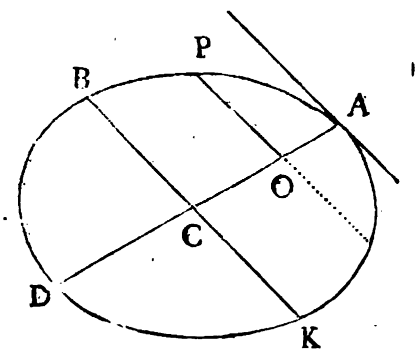
AC² − CG² : AC² − CH² = CG² : CH².

& jungendo terminos ſecundæ rationis terminis prioris, eſt AC² : AC² = CG² : CH², ideo CG = CH, ac per conſequens BC = CK. Omnes ergo lineæ per punctum C tranſeuntes illic bifariam ſecantur. Sunt autem ſingulæ Diametri Ellipſis, nam in vertice B ducatur Tangens, & per Centrum C linea illi parallela, ea dividetur bifariam, cum itaque BK biſecet lineam Parallelam Tangenti per ejus verticem ductæ, eſt Diameter, per Lemma V.

Denique ſolæ lineæ per Centrum tranſeun-

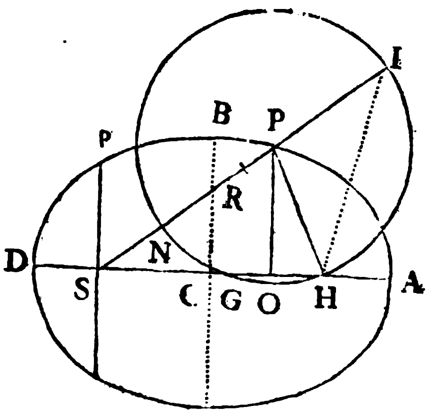
euntes ſunt Diametri; fingatur enim Diameter per centrum non tranſiens, ducatur Tangens in ejus Vertice, & illi Tangenti ducatur Parallela per Centrum C, bifariam dividetur in centro, ergo bifariam non dividetur à Diametro ſuppoſitâ quæ per centrum non tranſit, ergo male ſupponitur eam eſſe Diametrum: Omnes ergo Diametri Ellipſis per centrum tranſeunt, illicque biſecantur.

Theor. II. Tertia proportionalis Diametro tranſverſæ ejuſque conjugatæ dicatur Latus Rectum, erit Diameter tranſverſa ad Latus Rectum, vel quod idem eſt quadratum diametri tranſverſæ ad quadratum [illegible] ejus conjugatæ, ut factum abſciſſarum ſumptarum ab utroque Vertice Diametri ad quadratum ordinatæ, inde quadratum Ordinatæ ſemper minus deprehenditur facto Lateris recti per utramlibet abſciſſam, undè hæc curva dicitur Ellipſis; (Apoll. lib. 1. Prop. 21.)



Demonſt. Sit Ellipſis Diameter ACD, ejus conjugata BCK eſt per Lemma IV, $AC \times CD$ ſive $AC^2 : AO \times DO = BC^2 : PO^2$ & alternando $AC^2 : BC^2 = AO \times DO : PO^2$, ſed eſt $2AC : 2CB = 2CB : L$. ergo $4AC^2 : 4CB^2 = AC^2 : CB^2 = 2AC : L = AO \times DO : PO^2$, ergo eſt $PO^2 = \frac{L \times AO \times DO}{2AC} = \frac{DO}{2AC} \times L \times AO$ ſed ut DO eſt ſemper minus quam $2AC$, eſt PO^2 ſemper minus facto Lateris recti per alterutram abſciſſam.

Theor. III. Sit AD axis major, à centro feratur utrinque CH, CS, æquales & tales ut quadratum CH^2 ſive CS^2 cum quadrato ſemiaxis conjugati CB^2 ſit æquale quadrato ſemiaxis majoris CA^2, dicantur que puncta H & S, Foci, ſumma linearum ab utroque foco ad quodvis punctum Ellipſeos ductarum erit ſemper æqualis Axi majori, (Apol. Lib. 3. Prop. 52.); & tota linea ordinatim applicata in foco erit æqualis Lateri Recto Principali, quod ergo minus erit quadruplo diſtantiæ foci à proximo Vertice.

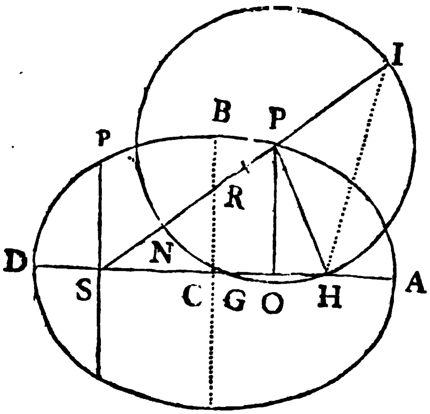


Demonſt. Ducatur quævis linea ex foco S, in eâ ſumatur $SI = DA$ & ducta IH ad alterum focum, fiat $IHP = I$ erit $IP = PH$, ideoque $SP + PH = SP + PI = SI = DA$ ſive axi majori: quo poſito dico punctum P ad Ellipſim pertinere. Centro P radio PH deſcribatur circulus IHGN habebitur hæc Proportio $SI : SH = SG : SN$, ſumendo dimidium harum linearum manebit proportio; ſit autem $\frac{1}{2}SI = SR$; $\frac{1}{2}SH = CH$; $\frac{1}{2}SG = \frac{1}{2}SH - \frac{1}{2}GH$ & demiſſa PO perpendiculari in GH eſt $\frac{1}{2}GH = HO$ ergo $\frac{1}{2}SG = CH - HO = CO$. Denique $\frac{1}{2}SN = \frac{1}{2}SI - \frac{1}{2}NI = RI - PI = RP$ eſt ergo

$SR : CH = CO : RP$ & componendo habetur $SR : SR + CH = CO : CC + RP$, tum prioris rationis terminos jungendo terminis ſecundæ, eſt: $SR : SR + CH = CO + SR : CO + RP + SR + CH$ ſive quia $SR = AC = DC$ & $CH = CS$, eſt $AC : AC + CH = DO : SP + SO$. At operationibus contrariis factis in eamdem proportionem $SR : CH = CO : RP$, hoc eſt, dividendo & poſtea prioris rationis terminos

minos

DE MOTU CORPORUM.



minos è terminis ſecundæ detrahendo ſubſtitutionibuſque factis erit

$$AC : AC - CH = AO : SP - SO$$

multiplicatis autem terminis utriuſque proportionis eſt

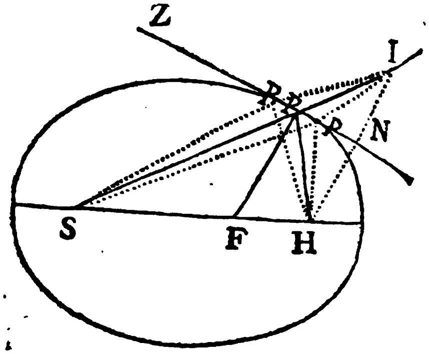
$AC^2 : AC^2 - CH^2$ (ſive BC^2) $= AO \times DO,\ SP^2 - SO^2$,

eſt autem (per 47. 1. Elem.) $SP^2 - SO^2 = OP^2$, ſed eſt $AC^2 : BC^2 = AO \times DO$ ad quadratum ordinatæ in O, eſt ergo PO ipſa illa ordinata, & punctum P ad Ellipſim pertinet.

Sit autem Sp ordinata in foco erit $AC^2 : BC^2 = AS \times SD : Sp^2$, eſt autem (per 5. 2. Elem.) $AS \times SD = AC^2 - CS^2 = BC^2$, eſt ergo $AC^2 : BC^2 = BC^2 : Sp^2$ ſive, $AC : BC = BC : Sp$, & duplicando omnes terminos: $2\,AC : 2\,BC = 2\,BC : 2\,Sp$, ſed eſt $2\,AC : 2\,BC = 2\,BC : L$ ergo $L = 2\,Sp$, & $\frac{1}{2} L = Sp$.

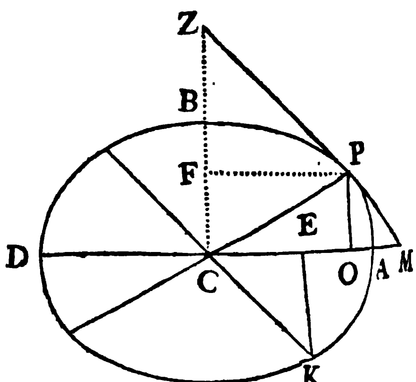
Eſt autem (per Theorema 2.) Sp^2, ſive $\frac{1}{4} L^2 = \frac{AS}{2\,AC} \times$ [illegible] $\times DS$ & $\frac{1}{4} L = \frac{AS}{2AC} \times DS$ ut ergo eſt AS minor 2 AC erit $\frac{1}{4}$ L minor DS, hoc eſt latus rectum minus eſt quadruplo diſtantiæ foci à proximo Vertice.

Theor. IV. Tangens Ellipſis bifariam dividit Angulum qui fit inter unam è lineis à foco ductam & productionem alterius: & lineæ ab utroque foco ductæ, æquales faciunt angulos cum Tangente, & ſi bifariam dividatur angulus quem faciunt lineæ à foco ductæ, linea biſecans erit curvæ perpendicularis. (Apol. 48. b. 3. 48.)



Demonſt. Ducantur à focis lineæ SP HP productaque SP in I, dividatur bifariam angulus IPH, dico lineam ZPN non occurrere Ellipſi in ullo alio puncto p, ſit PI = PH & ductâ IH, erit PN perpendicularis in ejus medium, ex alio quovis puncto p, ducantur pI, pH, quæ erunt æquales ob æqualia Triangula pNI, pNH (per 4. 1. Elem.) ſed ſi p foret in Ellipſi eſſet Sp + pH. ſive Sp + pI = SI quod abſurdum (per 20. 1. Elem.)

Eſt autem ZPS = IPN (per 15. 1. El.) et IPN = NPH, per conſt. ergo ZPS = NPH. Si ergo FPS = FPH eſt ZPS + FPS = NPH + FPH, ſunt autem omnes ſimul æquales duobus rectis, ergo ZPS + FPS eſt Recto æqualis & PF angulum SPH biſecans eſt in Tangentem ideoque in curvam perpendicularis.



Theor. V. Sit Diameter quævis AD, & ducantur utlibet duæ aliæ Diametri inter ſe conjugatæ CP, CK, ex utriuſque vertice ducantur ordinatæ KE, PO in priorem AD, factum abſciſſarum à curvâ ſumptarum, unius ver-

vertici reſpondentium erit æquale quadrato abſciſſæ à centro ſumptæ reſpondenti Vertici alterius Diametri: Unde quadrata ambarum abſciſſarum à Centro ſumptarum erunt ſimul æqualia quadrato $\frac{1}{2}$ Diametri in quam ſumuntur, & quadrata ordinatarum erunt æqualia quadrato ejus $\frac{1}{2}$ Diametri conjugatæ. Hinc deducitur ſummam quadratorum duarum Diametrorum conjugatarum quarumvis eſſe ſemper eamdem: eas verò Diametros conjugatas eſſe inter ſe æquales quarum vertices determinantur per ordinatam erectam in Axem majorem cujus abſciſſa à centro ſumpta ſit æqualis radici dimidii quadrati ſemi Axis majoris.

Demonſt. . . . Sint CP CK Diametri conjugatæ, PO KE ordinatæ ex earum verticibus in Diametrum AD ductæ; PM Tangens Parallela Diametro CK: Triangula POM, KEC erunt ſimilia & $PO:KE = MO:CE$, vel $PO^2:KE^2 = MO^2:CE^2$ ſive quia (per Cor. 3. Lem. V.) eſt $MO = \frac{CA^2 - CO^2}{CO}$ eſt $PO^2 : KE^2 = \overline{\frac{CA^2-CO^2}{CO^2}}^{\,2} : CE^2$, ſed per Lemma IV. eſt $PO^2:KE^2 = AO \times DO : AE \times DE$ ſive (per 5. 2. Elem.) $= CA^2 - CO^2 : CA^2 - CE^2$ eſt ergo, $CA^2 - CO^2 : CA^2 - CE^2 = \overline{\frac{CA^2-CO^2}{CO^2}}^{\,2} : CE^2$, dividendo primum & tertium terminum per $\frac{CA^2-CO^2}{CO^2}$ eſt $CO^2 : CA^2 - CE^2 = CA^2 - CO^2 : CE^2$ & addendo terminos ſecundæ rationis terminis primæ eſt $CA^2 : CA^2 = CA^2 - CO^2 : CE^2$, ergo $CE^2 = CA^2 - CO^2 = AO \times DO$: Pari modo addendo terminos primæ rationis terminis ſecundæ erit $CO^2 : CA^2 - CE^2 = CA^2 : CA^2$: ergo $CO^2 = CA^2 - CE = AE \times DE$. Quod erat primum.

Junctis ergo quadratis abſciſſarum CO^2, CE^2 ſumma eſt æqualis CA^2; nam eſt $CE^2 = CA^2 - CO^2$ ergo $CE^2 + CO^2 = CA^2 - CO^2 + CO^2 = CA^2$.

Sit BC diameter conjugata diametri AC, eſt $PO^2 = \frac{BC^2}{AC^2} \times CA^2 - CO^2$ & $KE^2 = \frac{BC^2}{AC^2} \times AC^2 - CE^2 = \frac{BC^2}{AC^2} \times AC^2 - AC^2 + CO^2 = \frac{BC^2}{AC^2} CO^2$, ergo $PO^2 + KE^2 = \frac{BC^2}{AC^2} \times AC^2 - CO^2 + CO^2 = BC^2$.

Sit autem Diameter AC axis, ordinatæ erunt perpendiculares, ergo $PO^2 + CO^2 = PC^2$, & $CE^2 + KE^2 = CK^2$ (per 47. 1. El.) ergo $PO^2 + CO^2 + CE^2 + KE^2 = PC^2 + CK^2$, ſed $PO^2 + KE^2 = BC^2$, $CO^2 + KE^2 = AC^2$ Ergo $PC^2 + CK^2 = AC^2 + BC^2$. Quarumvis Diametrorum conjugatarum quadrata æqualem ſummam facient ac quadrata axium.

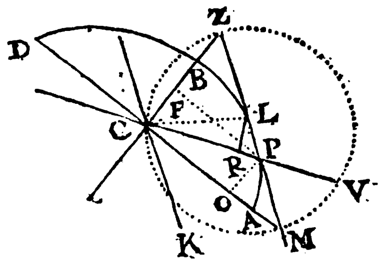
Denique ſi punctum O in axi ita ſit ſumptum ut ſit $\frac{1}{2} CA^2 = CO^2$ & ſit ductâ in O ejus ordinata & per ejus verticem P ducatur Diameter ejuſque conjugata, quadratum abſciſſæ quæ reſpondebit vertici Diametri conjugatæ erit æquale $AO \times DO$ ſive $AC^2 - CO^2$ ſed $CO^2 = \frac{1}{2} CA^2$ per hypotheſim, ergo hoc quadratum erit etiam æquale $\frac{1}{2} AC^2$, eadem ergo abſciſſa ac proinde æquales ordinatæ verticibus utriuſque Diametri reſpondebunt, æquales ergo erunt illæ Diametri conjugatæ ſiquidem ſunt Hypothenuſæ æqualium abciſſarum & Ordinatarum.

Cor. I. Si à vertice Diametri PC, producatur Tangens terminata utrinque in M & Z, ad Diametros conjugatas CA, CB productas, erit ſemiDiameter CK priori conjugata media proportionalis inter partes Tangentis PM PZ: Ductis enim ordinatis PF PO, ob ſimilia Triangula CKE, ZFP, POM,
eſt $CK : CE = ZP : FP$ (ſive CO)
& $CK : CE = PM : MO$ unde compoſitis rationibus eſt
$CK^2 : CE^2 = ZP \times PM : CO \times MO$, ſed $CO \times MO = AO \times DO$ (per Cor. 3. Lem. V.) & $AO \times DO = CE^2$ per præſens Theorema, ergo $CK^2 : CE^2 = ZP \times PM : CE^2$ & $CK^2 = ZP \times PM$ ſive $ZP : CK = CK : PM$. Q. E. D.

Et converſa per ſe liquet, nempe quod ſi duæ Diametri occurrant Tangenti ductæ in Vertice alterius Diametri, ita ut hujus $\frac{1}{2}$ Diameter conjugata ſit media proportionalis inter partes tangentis, duæ illæ priores Diametri erunt inter ſe conjugatæ.

De Motu Corporum.

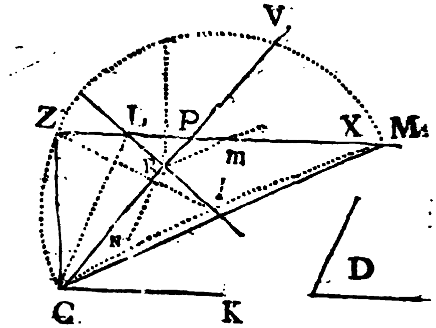
Problema. Datis tàm poſitione quam magnitudine Ellipſeos alicujus non deſcriptæ duabus Diametris conjugatis invenire poſitionem & magnitudinem duarum aliarum Diametrorum conjugatarum, quæ faciant inter ſe angulum quemvis datum.



Primus Caſus: Angulus qui datur ſit rectus, h. e. Diametri quæſitæ ſint Axes conjugati. Sint verò ſemi-Diametri datæ CP, CK, per verticem P unius ducatur linea alteri CK parallela, quæ ideo erit Ellipſis Tangens in eo puncto. (per Lem. IV.) producatur CP in V ita ut ſit $CP : CK = CK : PV$, in medium R lineæ CV erigatur perpendicularis tangentem ſecans in L, & ex L velut Centro radio LC qui æqualis eſt LV; deſcribatur circulus tranſiens per puncta C & V, & Tangentem ſecans in punctis Z & M, dico lineas ZC, MC, eſſe in axium poſitione.

Demonſt... Angulus enim ZCM eſt rectus quia eſt in ſemi-circulo per conſtructionem, præterea quia chordæ CV ZM ſeſe ſecant in P eſt $CP \times PV = ZP \times PM$ (per 35. 3. Elem.) ſed $CP \times PV = CK^2$ per conſtructionem, ergo $CK^2 = ZP \times PM$ ideoque, per Corollarii præcedentis converſam, lineæ CZ, CM, cadunt ſecundum Diametros conjugatas.

Sec. Caſus. Si angulus datus D rectus non ſit, centrum circuli deſcribendi non erit in L ſed in alio puncto l ejuſdem lineæ RL in medio R lineæ CV perpendicularis, ſic verò invenitur, ducatur ex R perpendicularis in Tangentem fiatque cum eâ angulus æqualis dato, & linea eum formans ſecet Tangentem in m, ducatur LC, & per R linea RN ipſi Parallela, ex C ut centro, radioque æquali Rm ſecetur RN in N, ductaque CN quæ ſecet LR in l erit l centrum circuli ex quo ſi radio lC circulus deſcribatur is tranſibit per C & etiam per V (per conſt. & 1. 3. Elem.) ſecabit verò Tangentem in punctis Z & M, é quibus ductis CZ, CM habetur Diametrorum quæſitarum poſitio.



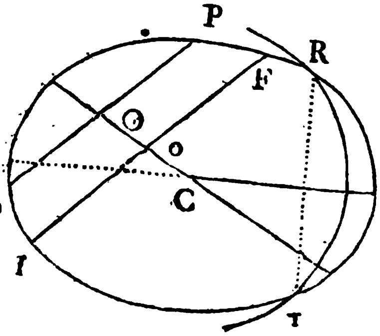
Demonſt. Evidens eſt, ſicut in priore hujus demonſtrationis parte, lineas CZ CM, cadere ſecundum Diametros conjugatas, quæſtio eſt utrum faciant in C angulum datum, ex centro l ducatur linea parallela lineæ Rm, dico illam occurrere Tangenti in puncto M, hoc eſt illam fore æqualem radio lM ſive lC, occurrat enim Tangenti in X erit ob Parallelas $LR : Rm = Ll : lX$; ſed propter Parallelas RN & LC triangula NlR ClL, ſunt ſimilia, eſtque $lR : lN = Ll : lC$, & ſumptis vel differentiis vel ſummis terminorum utriuſque rationis eſt $LR : CN = Ll, lC$ eſt verò per conſtructionem $CN = Rm$ ergo $LR : Rm = Ll : lC$ ergo $Ll : lX = Ll : LC$, ſcilicet eſt $lX = lC$, hoc eſt X cadit in M; radius ergo lM cum ſit Parallelus lineæ Rm, faciet cum perpendiculari quæ in lineam ZM duceretur eumdem angulum quem format linea Rm cum perpendiculari in eamdem lineam ductâ, angulum nempe quæſitum: & angulus ZlM ejus erit duplum; ſed angulus ZCM eſt anguli ZlM dimidium, ergo eſt æqualis angulo quæſito.

Determinatur autem Diametrorum magnitudo, ductis ex P in utramq. Diametrum ordinatis PO, PF lineis CZ, CM, Parallelis; $\frac{1}{2}$ Diametri enim erunt mediæ proportionales inter abſciſſas à centro, & lineas à centro ad Tangentem ſumptas, hoc eſt, erit $CO : CA = CA : CM$, & $CF : CB = CB : CZ$; undè cum cognoſcantur CO & CM, CF & CZ determinantur CA & CB.

Cor. I. Datis axibus foci inveniuntur ſi ex

ex

ex vertice axis minoris, ut centro, cum radio æquali ſemi axi majori ipſe major axis ſecetur, & datis focis & axi majori puncta quotlibet ad Ellipſim pertinentia inveniri poſſunt, ſi ab uno foco ducatur ut libet linea æqualis axi majori & ab ejus extremitate ducatur linea ad alterum focum, fiat in hoc foco ſuper hanc lineam angulus æqualis angulo qui ſit inter lineas à focis ductas, ſecabitur prima linea in puncto ad Ellipſim pertinente.

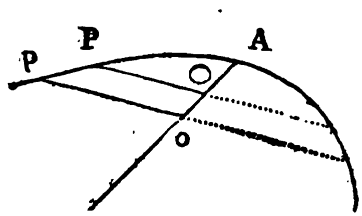


Cor. II. Si Ellipſis ſit data, ſic inveniuntur centrum & Axes: ducantur ut lubet duæ Parallelæ P p, F f, per earum medium O : o, ducatur linea, erit Diameter, ejus medium C erit Centrum ex quo deſcribatur circulus qui ſecet curvam in duobus punctis R r ducatur per centrum linea perpendicularis in lineam R r quæ eam biſariam dividet (per 3. 3. Elem.) erit ergo Axis, alter axis habetur erigendo lineam huic perpendicularem in Centro ad curvam uſque.

I X. *De Parabola.*

I. Theor. Omnes Diametri Parabolæ ſunt infinitæ & inter ſe Parallelæ: quadrata ordinatarum ſunt inter ſe ut Abſciſſæ Diametrorum, & cum tertia proportionalis abſciſſæ & ordinatæ dicatur Latus Rectum, factum lateris Recti per abſciſſam eſt æquale quadrato ordinatæ, hincque derivatur nomen hujus curvæ. (Apol. lib. 1. Prop. 20.)

Dem. Ducatur in baſi coni chorda parallela plano Parabolæ, & infinitè parva, per verticem coni & eam chordam ducatur Planum & aliud illi parallelum per unam è lineis Parabolæ in hoc plano formabitur Hyperbola, ſed quam proxima Parabolæ, & cujus centrum tanto magis à Vertice coni removetur quo minor eſt chorda per quam tranſit planum per Verticem coni ductum, evaneſcat hæc chorda, centrum ejus Hyperbolæ in infinitum abibit, & ut Planum verticale fiet tangens cono, coincidet hæc Hyperbola cum Parabolâ, ſed omnes ejus Diametri à puncto infinitè remoto divergentes erunt Parallelæ & infinitæ, tales ergo etiam erunt Diametri Parabolæ. Præterea ex caſu 2do. Lem. III. conſtat quod ſi ſecans infinita plures lineas Parallelas in Sectione Conicâ ſecet, abſciſſæ erunt inter ſe ut facta partium linearum Parallelarum, ſed hæ biſariam dividuntur à Diametro, ſunt ergo Diametri abſciſſæ ſicut quadrata ordinatarum.

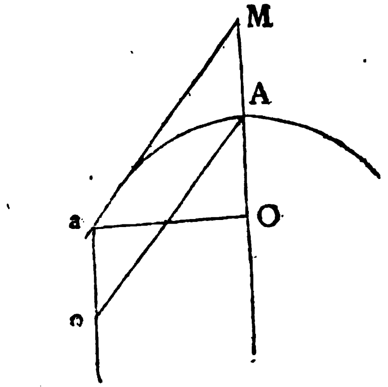


Fiat $AO : OP = OP : L$ erit $OP^2 = AO \times L$; eſto verò quævis alia abſciſſa Ao & ordinata op erit $AO : Ao = OP^2 : op^2$, & multiplicando primam rationem per L erit $L \times AO : L \times Ao = OP^2 : op^2$, ſed per Hypotheſim $AO \times L = OP^2$ ergo etiam $L \times Ao = op^2$ hoc eſt factum Lateris recti per quamvis abſciſſam æquale eſt quadrato ordinatæ ipſi reſpondenti.

Cor. I. Si in Diametrum productam ſumatur à Vertice longitudo æqualis lateri Recto, & ab ejus extremo ad extremum abſciſſæ deſcribatur ſemi circulus, & in vertice diametri Parabolæ erigatur Perpendicularis ad circulum uſque, erit hæc perpendicularis æqualis ordinatæ ad eam abſciſſam pertinenti.

Cor. II. Si in Diametro quâvis ſumatur à vertice quarta pars ejus Lateris recti, ordinatim applicata illi puncto erit æqualis lateri recto. Sit enim $Ao = \frac{1}{4}L$ eſt $\frac{1}{4}LL = op^2$: ergo $LL = 4op^2$ & $L = 2op$, ſive toti ordinatim applicatæ in o.

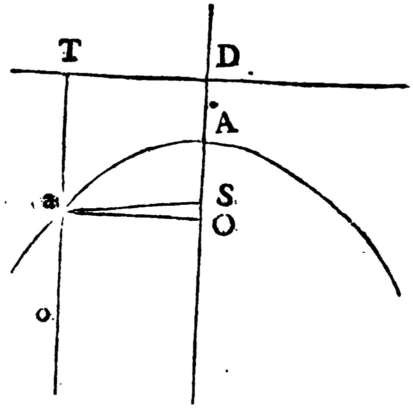
De Motu Corporum.



Cor. III. Latus Rectum Diametri cujuſvis eſt æquale Lateri recto axis & quadruplo abſciſſæ axis determinatæ per ordinatam è vertice Diametri in axem ductam. Ducatur ex vertice a Diametri tangens a M quæ axi occurrat in M & a O ordinata axi, per Corollarium Lemmatis V. diſtantia verticis axis A ad M eſt æqualis diſtantiæ ejuſdem verticis ab O, ergo $MO = 2AO$, & (per 47. 1. Elem.) eſt $aM^2 = MO^2$ (ſive $4AO^2$) $+ aO^2$ (ſive $L \times AO$) $= \overline{4AO + L} \times AO$; à vertice A axis ducatur ordinata A o ad Diametrum propoſitam, evidens eſt ob parallelas a o, A O, & Tangentem ordinatæ parallelam, eſſe $ao = AM$ ſive A O & $oA = aM$; ſit verò l latus Rectum Diametri a o, erit oA^2, ſive $aM^2 = l \times ao = l \times AO$ ſed erat $aM^2 = \overline{4AO + L} \times AO$ ergo $l \times AO = \overline{4AO + L} \times AO$, unde $l = L + 4AO$. Q. E. D.

Theor. II. Si in axe ſumatur à vertice quarta pars ejus lateris recti, id punctum vocatur Parabolæ focus, ſi verò ultrà verticem eadem feratur longitudo & per punctum in quo cadit ducatur linea axi perpendicularis, dicetur Directrix Parabolæ: Si autem producatur quævis Diameter ad Directricem, portio ejus inter verticem & Directricem comprehenſa eſt quarta pars lateris Recti ejus Diametri, & eſt æqualis diſtantiæ ejus verticis à foco.

Demonſt. Ut enim Diameter & axis ſunt paralleli, ducta perpendiculari a T à vertice diametri ad directricem erit $aT = OD = DA + AO$, eſt verò D A, quarta pars lateris recti principalis & A O abſciſſa axis quæ reſpondet ordinatæ a O à vertice Diametri ductæ, eſt verò (per Corol. 2. Theor. præced.) latus rectum diametri æquale quadruplo lateris recti & quadruplo A O, hoc eſt $= 4DA + 4AO$ ergo $aT = DA + AO$ eſt quarta pars lateris Recti Diametri a o.

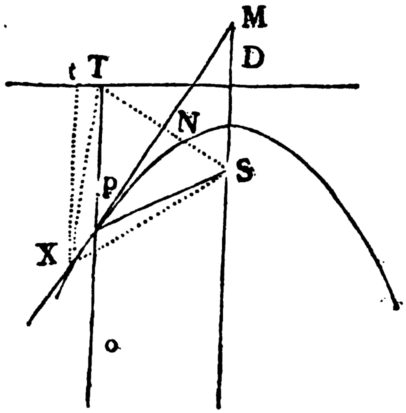


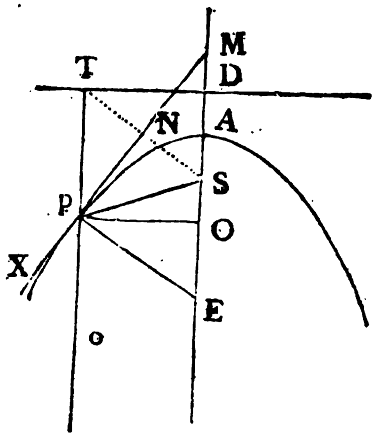
Secundò, E foco Parabolæ S, ad verticem Diametri ducatur S a, ſitque ducta a O ordinata axi, (per 47. 1. Ele.) eſt $Sa^2 = SO^2 + aO^2$ & $aO^2 = 4DA \times AO$: ergo $Sa^2 = SO^2 + 4DA \times AO$, ſed eſt DO^2 (per 8. 2. El.) $= SO^2 + 4DA \times AO$, ergo $DO^2 = Sa^2$ & $Sa = DO = aT$.

Theor. III. Si à puncto Parabolæ ducatur perpendicularis ad Directricem, & linea ad focum, bifariamque dividatur Angulus quem faciunt, linea eum dividens erit Tangens in eo puncto, quæ ſi producatur donec ſecet axem, portio axis à foco ad occurſum Tangentis contenta erit æqualis lineæ à foco ad punctum Parabolæ ductæ: Angulus Diametri cum Tangente erit æqualis angulo lineæ à foco ductæ cum eâ Tangente, ideo ea quæ ſecundum Diametros ad Parabolam adpellunt ad focum reflectentur, & Angulus Diametri cum lineâ à foco ductâ bifariam dividitur per perpendicularem ad curvam: Si ea perpendicularis ſecet axem, pars axis inter eam & ordinatam axi ex Vertice Diametri ductam, eſt æqualis dimidio lateris recti principalis, & pars axis inter eam & Tangentem comprehenſa, eſt dimidium lateris Recti Diametri, ipſa verò

per-

perpendicularis eſt media Proportionalis inter ea ſemilatera recta.





Demonſt. Sit T D directrix, à puncto P linea P T perpendicularis in Directricem ducatur, ducatur etiam ad focum linea P S & denique ducatur linea P N bifariam dividens angulum S P T; illa linea perpendiculariter & bifariam dividet lineam S T à foco ad punctum T ductam. Ex quovis puncto X lineæ P N ducantur lineæ X T, X S, erunt inter ſe æquales (per 4. 1. Elem.), erit verò X T directrici obliqua ideoque perpendicularis ab X in Directricem demiſſa erit brevior quam X T ac per conſequens brevior quam X S, ergo id punctum X vicinius erit Directrici quam foco, erit ergo extra Parabolam, ideoque linea P N erit Tangens, cum in unico puncto P Parabolæ occurrat.

Anguli autem T P N, N M S ſunt æquales ob Parallelas T P, M S, & per conſt. T P N = N P S, ergo N M S = N P S, eſt ergo Triangulum M S P Iſoſceles, & M S = S P.

Anguli autem X P o, T P N, per verticem ſunt oppoſiti, ergo ſunt æquales, ſed T P N = N P S per conſtr. ergo X P o = N P S.

Dividatur bifariam angulus S P o per lineam P E ita ut ſit o P E = E P S; erit X P o + o P E = N P S + E P S hi quatuor valent duos rectos, ergo X P o + o P E valent rectum & eſt P E perpendicularis in Tangentem.

Eſt ergo in Triangulo Rectangulo M P E (ductâ perpendiculari P O); $MO : PO = PO : OE = \frac{PO^2}{MO}$, eſt verò $PO^2 = L \times AO$ & $MO = 2\,AO$ ergo $OE = \frac{L \times AO}{2\,AO} = \frac{L}{2}$.

Ergo etiam E M eſt æqualis dimidio lateris Recti Diametri P o, eſt enim ejus Latus Rectum æquale lateri Recto principali & quadruplo abſciſſæ A O, eſt verò O E dimidium lateris Recti Principalis & M O = 2 A O, ſive dimidium quadrupli A O, ergo $EM = \frac{1}{2}\,l$.

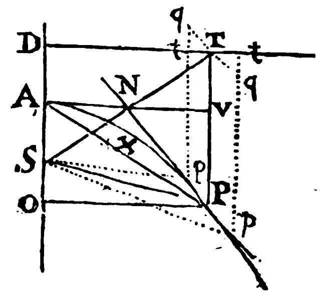
Eſt etiam ob Triangulum Rectangulum M P E, E M : P E = P E : O E; ergo eſt P E hoc eſt perpendicularis in curvam, media proportionalis inter ſemilatus rectum Diametri & ſemilatus rectum Axis.

Theor. IV. Superficies Parabolica inter curvam, abſciſſam axis & ejus ordinatam comprehenſa, eſt ad factum abſciſſæ per Ordinatam ut duo ad tres, ſegmentum verò Parabolicum inter curvam & chordam à Vertice ductam terminatum eſt ejuſdem facti ſexta pars.

DE MOTU CORPORUM.

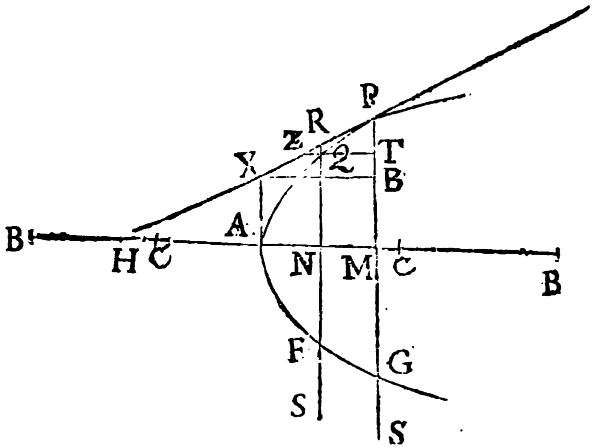
Demonſt. Ex foco S ducatur S P ad quodvis Parabolæ punctum P & ex P ducatur PT ad directricem perpendicularis, ducatur Tangens in puncto P, & in ea ſumantur puncta p, p puncto P proxima & utrinque à puncto P æqualiter diſſita, ab iis ducantur ad focum lineæ S p S p, & p q, p q lineæ P T parallelæ & æquales; ducaturque q T q, habebitur Parallelogrammum p q q p, cujus baſis p p eſt eadem cum baſi Trianguli S p p; ſi verò ducatur S T, quam Tangens P N, bifariam & perpendiculariter dividit in N, erit S N altitudo Trianguli S p p, & N T = S N, altitudo Parallelogrammi p q q p, cum ergo baſes & altitudines ſint æquales, (per 41. 1. Elem.) erit Parallelogramma p q q p duplum Trianguli S p p, ſed eſt p q q p æquale Trapezio t p p t, cum ergo tota ſuperficies DAXPT talibus Trapeziis t p p t conſtet, & ſuperficies A S P X, talibus Triangulis S p p, erit ſuperficies D A X P T dupla ſuperficiei A S P X.

Si verò ducatur A V Tangens in A & chorda A P, erit Parallelogrammum D A V T, duplum Trianguli A S P, baſes enim A D, A S ſunt æquales, altitudo verò



Trianguli eſt PO, parallelogrammi AV & PO = AV: ſi ergo DAVT ex DAXPT detrahatur, & A S P ex A S P X, reſiduum primæ figuræ A X P V erit duplum ſegmenti A P X in altera reſidui, hæc verò ſimul ſumpta faciunt Triangulum A V P, vel A O P, quod eſt ergo triplum ſegmenti A P X, & tota figura A O P V ejus ſextuplum, & area Parabolica A o P X, ejus quadruplum, eſt ergo area Parabolica ad Parallelogrammum A O P V ut 4. ad 6. ſive ut 2. ad 3. Q. E. D.

HIS verò circa Conicas Sectiones ad mentem revocatis, ſine quibus ſequentia intelligi nequeunt, probabitur, *vim centripetam quâ corpus tendens ad punctum remotiſſimum Sectionem Conicam deſcribit, eſſe reciprocè ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium tendentis:* Corpus P moveatur in Sectione conicâ PAF, & vis centripeta agat juxtà directionem parallelarum PS, RS, axi AB applicatarum. Linea PH, Sectionem tangat in P, ſintque ZT, XB, axi parallelæ, & XA ipſa Tangens in A, & ob ſimilia triangula XPB, ZTP, ZQR, erit.



$PX : BX$ (ſeu AM) $= PR : QT$ & $PX^2 : AM^2 = PR^2 : QT^2$, & (per Prop. 16. lib. 3. Conic. Appoll. quæ eſt Cor. 2. Lem. III. de Conicis) $PR^2 : QR \times FR = PX^2 : AX^2$, adeòque $PR^2 = \frac{PX^2 \times QR \times FR}{AX^2}$, ergò $PX^2 : AM^2 = \frac{PX^2 \times QR \times FR}{AX^2} : QT^2$; & $AX^2 : AM^2 = QR \times FR : QT^2$; undè $\frac{QT^2}{QR} = \frac{AM^2 \times FR}{AX^2} = \frac{AM^2 \times 2PM}{AX^2}$ ubi puncta P, Q, coeunt, & $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR} = \frac{AM^2 \times 2PM \times SP^2}{AX^2}$. Eſt ergo (per coroll. I. & V. prop. VI^æ.) in omnibus ſectionibus conicis vis centripeta reciprocè ut $\frac{AM^2 \times PM \times 2SP^2}{AX^2}$, hoc eſt, deleto $2SP^2$, conſtante, reciprocè ut $\frac{AM^2 \times PM}{AX^2}$.

Porrò ob ſimilitudinem triangulorum HAX, HMP, eſt $HM : PM = HA : AX = \frac{PM \times HA}{HM}$ & $AX^2 = \frac{PM^2 \times HA^2}{HM^2}$ & $\frac{AM^2 \times PM}{AX^2} = \frac{AM^2 \times HM^2}{PM \times HA^2}$, vis igitur eſt etiam in omni ſectione conicâ reciprocè ut $\frac{AM^2 \times HM^2}{PM \times HA^2}$.

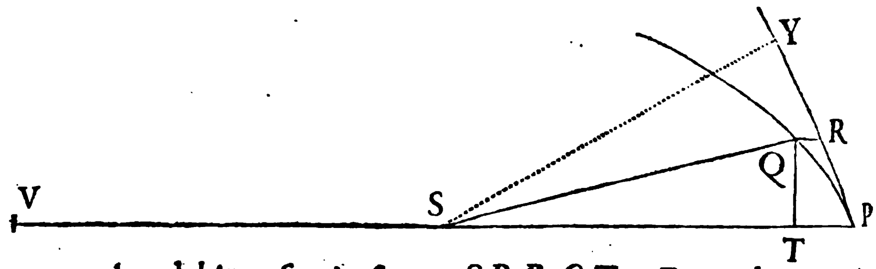
In Parabolâ (per prop. 35. lib. 1. conic. appoll. ſive cor. 1. Lem. V. de Conicis) $HA = AM$, & $HM = 2AM$, & (per prop. 20. lib. 1. conic. Appoll. quæ eſt Theor. I. de Parabola) AM, adeòque & HM eſt ſemper ut PM^2. Ergò vis centripeta in parabolâ erit reciprocè ut $\frac{4AM^4}{PM \times AM^2}$ ſive ut $\frac{AM^2}{PM}$, hoc eſt, ut $\frac{PM^4}{PM} = PM^3$, hoc eſt, reciprocè ut cubus ordinatæ PM.

In Ellipſi & Hyperbolâ, ſi latus rectum axis AB, dicatur L, erit (ex prop. 21. lib. 1. conic. appoll. ſive Theor. II. de Ellip.) $PM^2 : AM \times MB = L : AB$ ac proindè $AM = \frac{PM^2 \times AB}{L \times MB}$, & $AM^2 = \frac{PM^4 \times AB^2}{L^2 \times MB^2}$, & $\frac{AM^2 \times HM^2}{PM \times HA^2} = \frac{PM^3 \times AB^2 \times HM^2}{L^2 \times MB^2 \times HA^2}$, undè deletâ ratione conſtanti $\frac{AB^2}{L^2}$, erit vis centripeta reciprocè ut $\frac{PM^3 \times HM^2}{MB^2 \times HA^2}$: verùm (per prop. 37. lib. 1. conic. Appoll. ſup. cor. 2. Lem. V.) poſito centro ſectionis C, eſt $CM : CA = CA : CH$, adeóque dividendo vel componendo $CM : AM = CA : HA$, ac proindè addendo vel detrahendo terminos ſecundæ rationis è terminis prioris $MB : HM = CA : HA$ & $\frac{HM}{MB \times HA} = \frac{1}{CA}$ & $\frac{HM^2}{MB^2 \times HA^2} = \frac{1}{CA^2}$ quæ eſt quantitas conſtans. Erit igitur etiam in hyperbolâ & Ellipſi adeóque in omni ſectione conicâ vis centripeta reciprocè ut PM^3, ſeu reciprocè ut cubus ordinatæ PM; deletâ nimirum, in expreſſione vis centripetæ ſuprà inventâ, quantitate $\frac{HM^2}{MB^2 \times HA^2}$, conſtante.

PROPOSITIO IX. PROBLEMA IV.

Gyretur corpus in ſpirali PQS *ſecante radios omnes* SP, SQ, *&c. in angulo dato: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ſpiralis.*

(f) Detur angulus indefinite parvus *PSQ*, & ob datos omnes angulos dabitur ſpecie figura *SPRQT*. Ergo datur ratio $\frac{QT}{QR}$, eſtque $\frac{QT\ quad.}{QR}$ ut *QT*, hoc eſt (ob datam ſpecie figuram illam) ut *SP*. Mutetur jam utcunque angulus *PSQ*, & recta *QR* angulum contactus *QPR* ſubtendens mutabitur (per lemma XI.) in duplicatâ ratione ipſius *PR* vel *QT*. Ergo manebit $\frac{QT\ quad.}{QR}$ eadem quæ prius, hoc eſt ut *SP*. Quare $\frac{QTq \times SPq}{QR}$ eſt ut *SP cub.* ideoque (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta eſt reciprocè ut cubus diſtantiæ *SP*. *Q. E. I.*



(f) 225. Ob omnes angulos datos, dabitur ſpecie figurâ SPQRT, & ipſius latera omnia erunt inter ſe in datâ ſeu conſtanti ratione, ergò datur ratio $\frac{QT}{QR}$, eſtque proindè $\frac{QT}{QR} \times QT$, ut QT hoc eſt, ob datam rationem QT, ad SP, erit $\frac{QT^2}{QR}$, ut SP, mutetur jam utcumque angulus PSQ, & manebit $\frac{QT^2}{QR}$, ut SP. Nam QR, ubi angulus PSR conſtans eſt dicatur a, & QT dicatur b; ubi verò angulus PSR utcumque mutatur, QR dicatur x, & QT dicatur y, & erit per Lem. XI. $a : x = b^2 : y^2$, adeóque $\frac{b^2}{a} = \frac{y^2}{x}$ hoc eſt $\frac{y^2}{x}$ ſeu $\frac{QT^2}{QR}$ eadem manet quæ priùs nimirùm ut SP. Quoniam autem evaneſcente angulo PSR, ſive coeuntibus punctis Q, P, recta SR, rectæ SP parallela evadit, erit per coroll. 1. & V. prop. VIæ. vis centripeta reciprocè ut $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR}$, ac proindè ſubſtituendo SP, loco $\frac{QT^2}{QR}$, vis centripeta erit reciprocè ut SP^3.

Idem aliter.

(x) Perpendiculum *SY* in tangentem demiſſum, & circuli ſpiralem concentricè ſecantis chorda *PV* ſunt ad altitudinem *SP* in datis rationibus; ideoque *SP cub.* eſt ut *SYq*×*PV*, hoc eſt (per corol. 3. & 5. prop. VI.) reciprocè ut vis centripeta.

LEMMA XII.

Parallelogramma omnia circa datæ ellipſeos vel hyperbolæ diametros quaſvis conjugatas deſcripta eſſe inter ſe æqualia.

Conſtat ex conicis. (y)

PROPOSITIO X. PROBLEMA V.

Gyretur corpus in ellipſi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ellipſeos. (z)

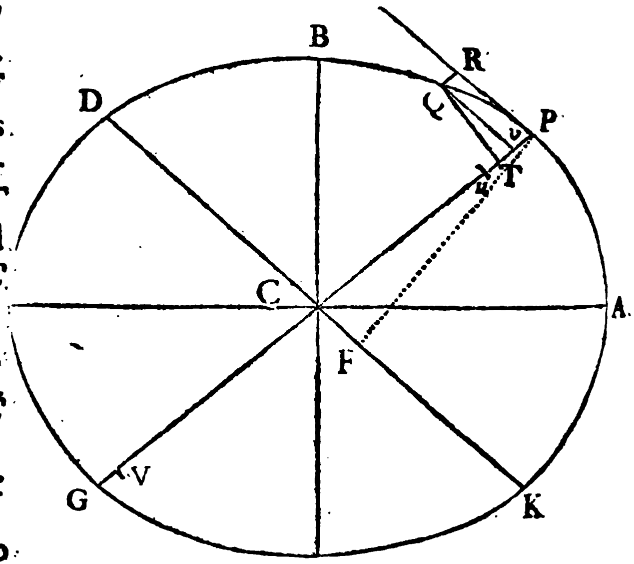
(x) 226. Sit circuli ſpiralem oſculantis in P chorda per centrum virium S ducta P V, demiſſumque in tangentem perpendiculum S Y, & ob angulum S Y P, rectum, & S P Y, datum, dabitur ſpecie triangulum S P Y. Ergò datur ratio S Y ad S P, & in virium centripetarum formulis S P ſcribi poteſt pro S Y. Prætereà datur ratio P V ad S P, nam (210) $SY \times QP = SP \times QT$, adeóque $QP = \frac{SP \times QT}{SY}$; undè ob rationem $\frac{SP}{SY}$ datam, Q P ſcribi poteſt pro Q T. Verùm (211) $PV = \frac{QP^2}{QR}$, ergò P V, eſt ut $\frac{QT^2}{QR}$. Cum igitur ex demonſtratis in Prop. IX. $\frac{QT^2}{QR}$, ſit ut S P, erit etiam P V, ut S P, & proptereà S P, loco P V, ſubſtitui poteſt in formulis.

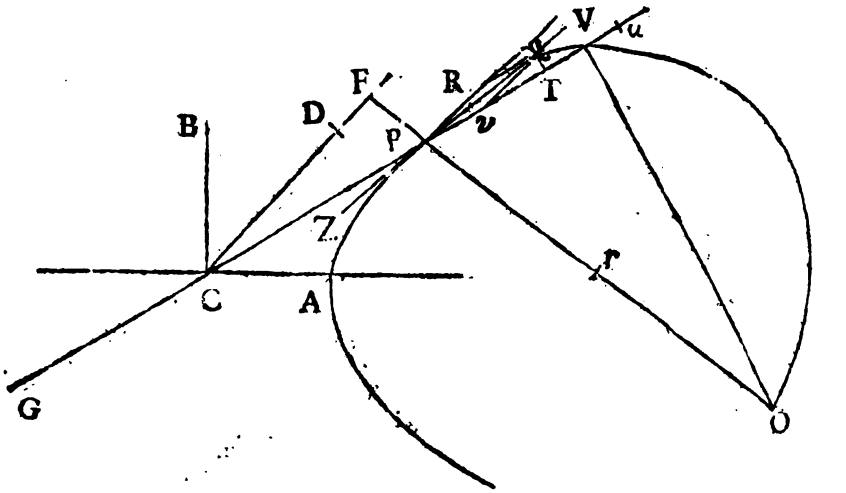
227. Scholion. Propoſitio IX. facilè demonſtratur etiam per formulam Hermanni (214), $v = dp : p^3 dz$; eſt enim in hoc caſu $SP = z$, $SY = p$; & ſi ratio $\frac{SY}{SP}$ data dicatur $\frac{a}{b}$, erit $\frac{a}{b} = \frac{p}{z}$ ergo $az = bp$, & (160) $adz = bdp$, & $\frac{dp}{dz} = \frac{a}{b}$; undè $v = \frac{a}{bp^3}$; hoc eſt, ob datam $\frac{a}{b}$ vis centripeta v, eſt directè ut $\frac{1}{p^3}$, hoc eſt reciprocè ut p^3, aut quia $p = \frac{za}{b}$, v erit ut $\frac{1}{z^3}$ directè, reciprocè autem ut z^3, deletis nimirùm conſtantibus.

(y) Demonſtratio hujus Lemmatis inferius tradetur ubi nempe Newtonus eo Lemmate ad ſolutionem proximi Problematis utetur.

(z) 228. Gyretur corpus in Hyperbolâ, invenietur Lex vis centralis ſpectantis centrum Hyperbolæ ſimili modo, niſi quod vis illa ejus centri reſpectu ſit centrifuga, quoniam centrum Hyperbolæ non eſt intra Hyperbolam conſtitutum, ſed Hyperbola verſus illud convexitatem obvertit; Legatur ſi lubet utraque ſolutio hujus Problematis & ad figuram infrà poſitam in quâ Hyperbola deſcripta eſt referatur, liquebit verè dici de Hyperbolâ ea quæ Newtonus de Ellipſi ſtatuit.

Sunto CA, CB ſemiaxes ellipſeos; GP, DK diametri aliæ conjugatæ; PF, QT perpendicula ad diametros; Qv ordinatim applicata ad diametrum GP; & ſi compleatur parallelogrammum $QvPR$, erit ((a) ex conicis) rectangulum PvG ad Qv *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & (ob ſimilia triangula QvT, PCF) Qv *quad.* eſt ad QT *quad.* ut PC *quad.* ad PF *quad.* & conjunctis rationibus, rectangulum PvG ad QT *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & PC *quad.* ad PF *quad.* id eſt, vG ad $\frac{QT\ quad.}{Pv}$ ut PC *quad.* ad $\frac{CDq \times PFq.}{PCq}$ Scribe QR pro Pv, & (per lemma XII (b)) $BC \times CA$ pro $CD \times PF$





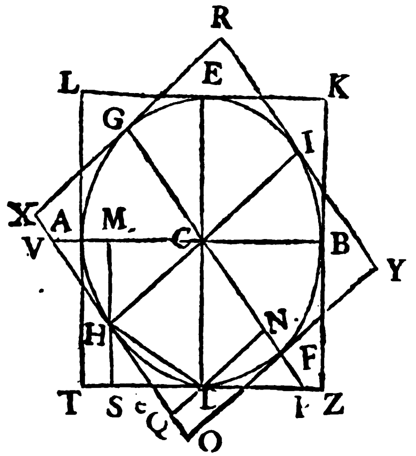
(a) *Ex Conicis*, per 21. 1. lib. Apoll. Vide Sup. Lemma IV. de Conicis.

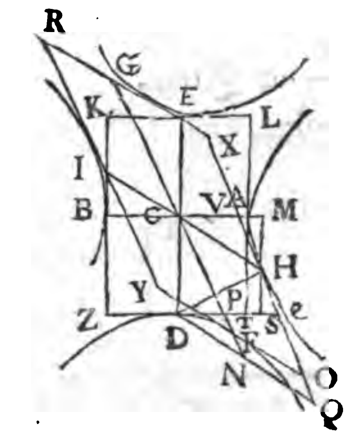
(b) 229. *Parallelogramma omnia circa data Ellipſeos vel Hyperbolæ Diametros quaſ-*

nec non (punctis P & Q coeuntibus) $2PC$ pro vG, & ductis extremis & mediis in ſe mutuo fiet $\frac{QT\,quad. \times PCq}{QR}$ æquale $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$. Eſt ergo (per corol. 5. prop. VI.) vis centripeta reciprocè ut $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$; id eſt (ob datum $2BCq \times CAq$) reciprocè ut $\frac{1}{PC}$; hoc eſt, directè ut diſtantia PC. *Q. E. I.*

Idem aliter.

In rectâ PG ab alterâ parte puncti T ſumatur punctum u ut Tu ſit æqualis ipſi Tv; deinde cape uV, quæ ſit ad vG ut eſt

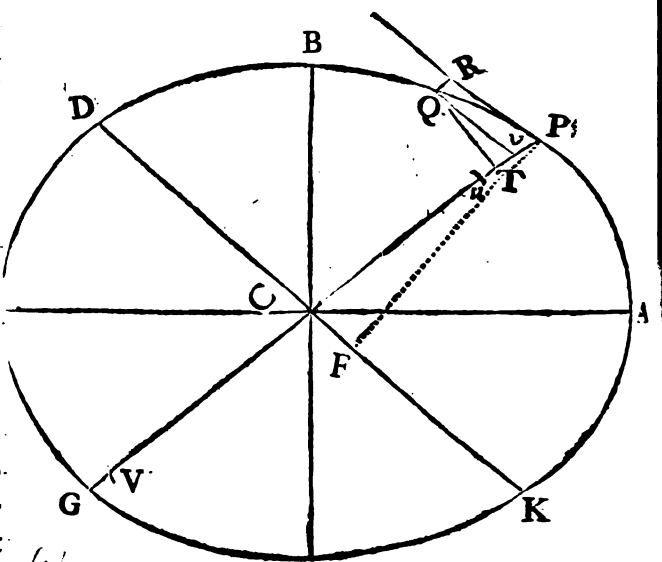


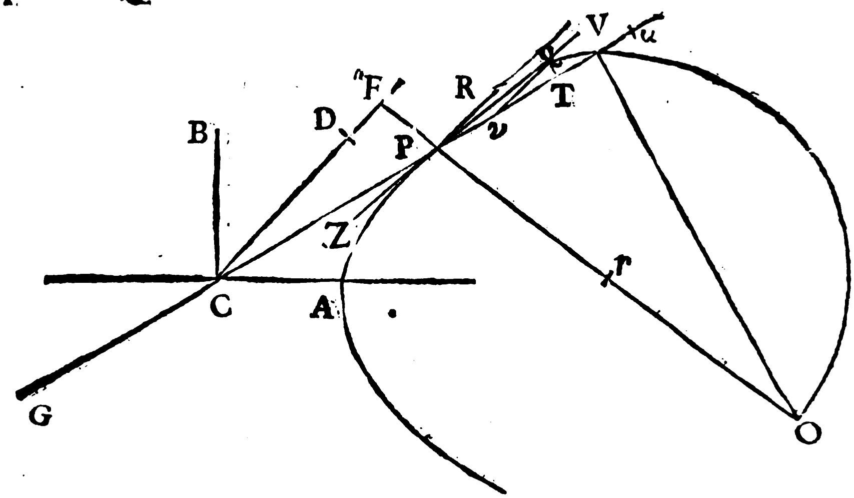


vis conjugatas deſcripta ſunt inter ſe æqualia.

Dem ..... Sunto Ellipſeos & hyperbolæ axes ED, AB, & GF, HI, diametri conjugatæ, ductiſque per axium & diametrorum extrema tangentibus, deſcribantur rectangulum LKZT, & parallelogrammum XRYO; jungatur DH, & DN ordinatim applicetur ad diametrum GF, erit (per prop. 37. lib. 1. conic. Appoll. ſup. Cor. 2. Lem. V. de Conicis) PC ad CF, (hoc eſt, parallelogrammum PCVe, ad parallelogrammum æquè altum CHOF) ſicut CF, ad CN, hoc eſt, ſicut idem parallelogrammum CHOF, ad parallelogrammum CHQN; & ſimiliter VC, erit ad CA, (hoc eſt, parallelogrammum PCVe, ad æquè altum, CATD) ſicut CA ad CM, hoc eſt, ſicut idem CATD, ad rectangulum CMSD, ſeu ad prædictum parallelogrammum CHQN; nam rectangulum CMSD, duplum eſt trianguli CHD, ejuſdem baſis CD ejuſdemque altitudinis MC, & parallelogrammum CHQN eſt etiam ejuſdem trianguli duplum, cum ſit utriuſque baſis communis HC & eadem altitudo ob parallelas HC, QN; ac proindè CMSD=CHQN. Cum igitur ſit PCVe:CHOF=CHOF:CHQN, & PCVe:CATD=CATD:CHQN, neceſſe eſt ut ſit CATD=CHOF, quarè rectangulum LKZT, quadruplum rectanguli CATD, æquale eſt parallelogrammo XRYO, etiam quadruplo parallelogrammi CHOF. Q. E. D.

D C quad. ad *PC qu.* Et quoniam ex conicis eſt *Qv quad.* ad *P v G* ut *D C quad.* ad *PC quad.* erit *Qv quad.* æquale *P v* × *u V*. Adde rectangulum *u P v* utrinque, & prodibit quadratum chordæ arcûs (c) *PQ* æquale rectangulo *VPv*; (d) ideoque circulus, qui tangit ſectionem conicam in *P* & tranſit per punctum *Q*, tranſi





(c) *Adde Rectangulum u P v utrinque, & prodibit quadratum chordæ arcûs P Q, æquale rectangulo V P × P v.* Nam (per conſtruct) eſt quadratum chordæ arcus PQ = $QT^2 + PT^2$, ſed eſt $QT^2 = Qv^2 - Tv^2$ ſive quia Tv = Tu eſt $QT^2 = Qv^2 - Tu^2$, ideo quadratum chordæ arcus PQ = $Qv^2 - Tu^2 + PT^2$; eſt verò $PT^2 - Tu^2 = \overline{PT + Tu} \times \overline{PT - Tu}$ ſive PT − Tv = Pu × Pv, ergo quadratum chordæ arcus PQ = Qv^2 + Pv × Pu. Quod ſi Rectangulo Pv × uV addas idem rectangulum Pv × Pu, eſt Pv × Vu + Pv × uP = Pv × VP, erat verò Qv^2 = Pv × uV, ergo Qv^2 + Pv × Pu *ſive quadratum chordæ arcus P Q erit æquale Rectangulo P v × V P, ſive V P v.*

(d) *Ideòque circulus qui tangit ſectionem in P, & tranſit per punctum Q, tranſibit etiam per punctum V*; nam ductis circuli illius chordis Q P, Q Y, angu-

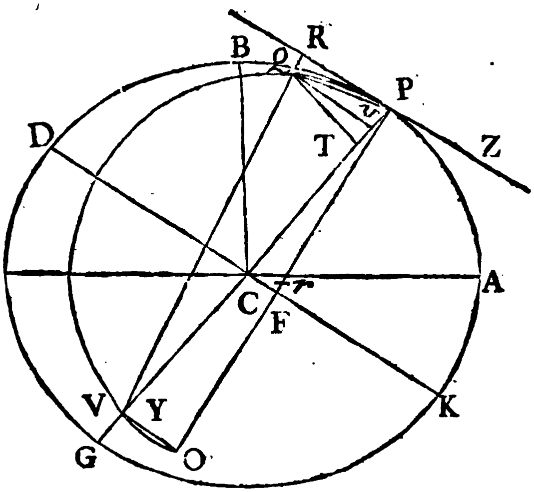
etiam per punctum V. Coeant puncta P & Q, & ratio uV ad vG, quæ eadem eſt cum ratione DCq ad PCq, fiet ratio PV ad PG ſeu PV ad $2PC$; ideoque PV æqualis erit $\frac{2DCq}{PC}$. Proindè vis, quâ corpus P in ellipſi revolvitur, erit reciprocè ut $\frac{2DCq}{PC}$ in PFq (per corol. 3. prop. VI.) hoc eſt (ob datum $2DCq$ in PFq) directè ut PC. *Q. E. I.*

Corol. 1. Eſt igitur vis ut diſtantia corporis à centro ellipſeos: (e) & viciſſim, ſi vis ſit ut diſtantia, movebitur corpus in el-

lus $PQv = QPR$, (ob parallelas Qv, PR) $= QYP$ (per 32. 3. Elem.) ac proindè duo triangula PQv, PYQ, quæ communem habent angulum, QPY, & æquales PQv, PYQ, ſimilia ſunt, & $Pv : QP = QP : PY$. Undè $PY = \frac{QP^2}{Pv}$; quarè cum ſit $Pv \times PV = QP^2$, ideoque $PV = \frac{QP^2}{Pv}$ erit $PV = PY$.

230. Coroll. 1 . . . Ducantur circuli ſectionem conicam oſculantis diameter PO, & chorda VO, & ob ſimilitudinem triangulorum PFC, PVO, erit $PF : PC = PV : PO = \frac{PC \times PV}{PF}$, ſed per ſecundam demonſtrationem Newtonianam $PV = \frac{2DC^2}{PC}$, ergò $PO = \frac{2DC^2}{PF}$, ac proindè radius oſculi $Pr = \frac{1}{2} PO = \frac{DC^2}{PF}$, & $PF : DC = DC : Pr$. Quarè datis diametris conjugatis eorumque angulo PCD, facilè invenitur radius circuli ſectionem conicam oſculantis in diametri cujuſvis extremo.

231. Coroll. 2 . . . Datis radio oſculi Pr, ſemidiametro ſectionis conicæ PC, & poſitione tangentis PR, ſeu angulo PCD, diametrorum conjugatarum, datur altera ſemidiameter conjugata DC, & deſcribi poteſt ſectio. His enim quæ diximus datis, datur quoque perpendicularis PF, ac proindè DC, media proportionalis inter Pr, & PF, (230) datas. Datis autem diametris conjugatis earumque angulo, ſectio conica deſcribi poteſt; ut notum eſt ex ſectionum conicarum elementis.



232. Coroll. 3. Hinc etiam problema V. aliter ſolvitur. Cum enim ſit vis centralis (212) ut $\frac{CP}{Pr \times PF^3}$, ſitque $PF = \frac{BC \times CA}{CD}$, (per Lem. XII.) & $Pr = \frac{DC^2}{PF}$ (230). His valoribus in formulâ $\frac{CP}{Pr \times PF^3}$, ſubſtitutis, ea fit $\frac{CP}{BC^2 \times CA^2}$ hoc eſt, ob conſtantem quantitatem $BC^2 \times CA^2$, vis eſt directè ut PC.

(e) *Et viciſſim ſi vis ſit ut diſtantia, movebitur corpus in Ellipſi centrum habente in Centro Virium &c.*, ut hæc converſa demonſtretur ſequentia ſunt præmittenda.

DE MOTU CORPORUM.

lipſi centrum habente in centro virium, aut forte in circulo, in quem utique ellipſis migrare poteſt.

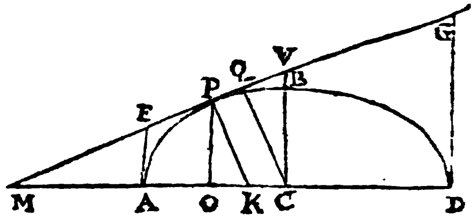
233. Lemma I. Ducatur in puncto contactus perpendicularis in Tangentem, ad axem terminatam, & à Centro ducatur ipſi Parallela ad Tangentem uſque, harum linearum factum erit æquale quadrato ſemi-Axis.

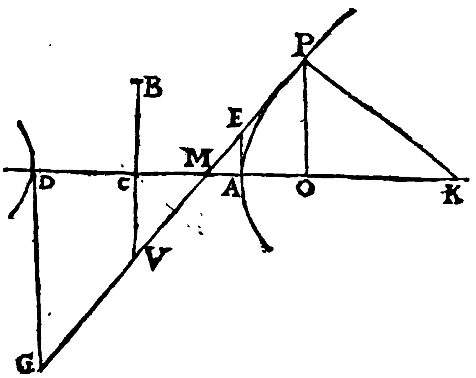
Ex P ducatur perpendicularis in Tangentem PK, ducatur ordinata PO perpendicularis in axem, & in C, ducatur CQ, Parallela PK & CV, parallela PO, triangula POK CQV, erunt ſimilia, ergo erit $PO:PK = CQ:CV$, ergo $PK \times CQ = PO \times CV$ ſimilia etiam ſunt Triangula CMV, OMP, erit ergo $CM:MO = CV:PO$; ſed (per Cor. 2. Lem. V. de Conicis) eſt $CM = \frac{CA^2}{CO}$ & (per Cor. 3. ejuſdem Lem.) $MO = \frac{AO \times DO}{CO}$ & (per Theor. II. tam de Hyp. quam de Ellip.) eſt $CA^2 : AO \times DO = CB^2 : PO^2$ ergo eſt $CM : MO = \frac{CA^2}{CO} : \frac{AO \times DO}{CO} = CA^2 : AO \times DO = CB^2 : PO^2 = CV : PO$, ideoque $CB^2 \times PO = PO^2 \times CV$ utrumque vero dividendo per PO eſt $CB^2 = PO \times CV$, erat verò $PK \times CQ = PO \times CV$. Ergo $PK \times CQ = CB^2$. Q. E. D.

234. Lemma II. Sit PM, Sectionis Conicæ Tangens, CA axis, CB ejus conjugatus, in utroque axeos primæ Vertice erigantur perpendiculares AE, DG, ad Tangentem uſque, factum earum $AE \times DG$, erit æquale quadrato ſemi-Axis.

Demonſt.... Ducta PO ordinata ad axem & CV ad Tangentem uſque ipſi Parallela, erit (per Cor. 2. Lemm. V. De Conicis) $CO:CA = CA:CM$. Dividendo verò, eſt $CA - CO$ vel $CO - CA$, ſive AO ad CA' ſive CD, ſicut $CM - CA$ vel $CA - CM$, ſive MA ad CM, hoc eſt $AO:CD = MA:MC$, jungendo terminos primæ rationis terminis ſecundæ hæc non mutatur, eſtque $MA : MC = MA + AO$ (ſive MO) $: MC + DC$, (ſive MD) hoc eſt alternando $MA:MO = MC:MD$ ſed ob parallelas eſt $MA : MO = AE:PO$ & $MC:MD = CV:DG$ ergo eſt $AE:PO = CV:DG$ & eſt $AE \times DG = PO \times CV$ ſed per Lemma præcedens eſt $PO \times CV = CB^2$. Ergo eſt $AE \times DG = CB^2$. Q. E. D.

235. Lemma III. Ducantur à focis per-



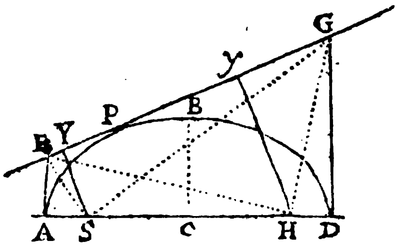


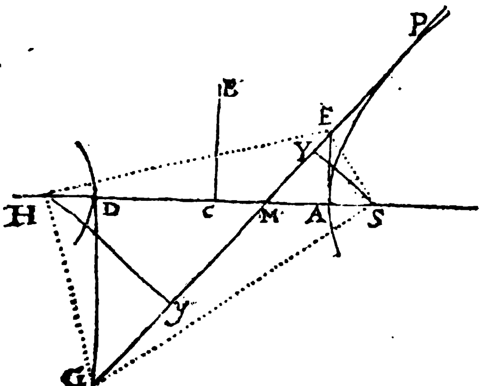
pendiculares in Tangentem Sectionis Conicæ, earum factum erit æquale quadrato ſemiAxis.

Demonſt.... Sint illæ perpendiculares SY, Hy, ducantur in utroque vertice axeos tranſverſæ lineæ AE, DG, perpendiculares axi uſque ad Tangentem, & ducantur à focis S & H, ad earum extremitates lineæ SE SG & HG HE.

Triangula EAS, SDG, EHG, GHy ſimilia inter ſe, ut & Triangula GDH, HAE, GSE, ESY: Primò, ſimilia ſunt Triangula EAS, SDG quia latera EA & AS, SD & DG circa angulos rectos A & D poſita proportionaiia ſunt, nam (per Lemma præced.) eſt $EA \times DG = CB^2$, & per naturam focorum (& per 5. vel 6. 2. Elem.) eſt $AS \times SD = CB^2$ ergo eſt $EA \times DG = AS \times SD$ ideoque $EA : AS = SD : DG$; Eâdem ratione probatur Triangula GDH, HAE eſſe ſimilia, ob latera proportionalia GD & DH, HA & AE circa angulos rectos A & D poſita, eſt enim ut prius $EA \times DG = CB^2 = DH \times HA$ ideoque $DG:DH = HA:EA$.

Secundò Triangula SDG, EGH ſunt ſimilia, latera enim GH & HE, GD & DS



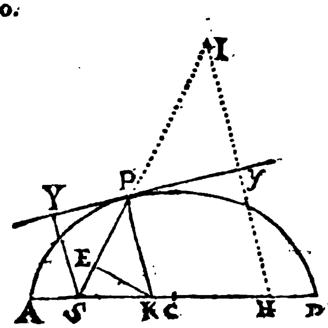


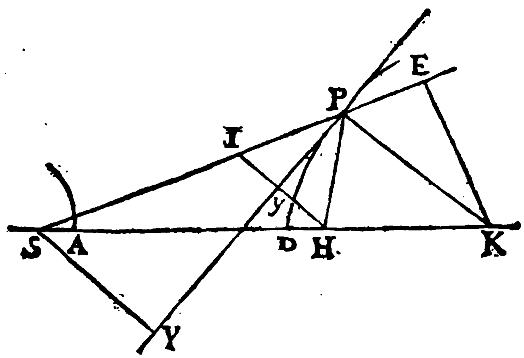
DS circà angulos SDG & EHG poſita ſunt proportionalia, nam ob triangula ſimilia GDH, HAE, eſt GH:HE=GD:HA, ſed HA=DS, ergo eſt GH:HE=GD:DS; Præterea anguli SDG & EHG ſunt ambo recti, SDG quidem per conſtructionem, angulus verò EHG eſt in Ellipſi complementum ad duos rectos angulorum GHD & EHA, in Hyperbolâ eorum ſumma, cum autem illi duo anguli GHD & EHA pertineant ad Triangula Rectangula ſimilia, ſimul ſumpti faciunt Rectum, eorumque complementum ad duos rectos eſt recto æquale, ergo Angulus EHG eſt rectus; Eodem modo probatur Triangula HAE, GSE eſſe ſimilia, ob latera proportionalia SE & GS, AE & HA, circa angulos HAE & GSE rectos poſita; nam ob Triangula ſimilia EAS, SDG eſt ES:GS=AE:DS ſive HA; & HAE eſt rectus per conſtructionem & GSE in Ellipſi eſt complementum ad duos rectos angulorum GSD & EAS, & in Hyperbola eorum ſumma, illi verò Anguli pertinent ad Triangula Rectangula ſimilia &c.

Tertio EGH eſt ſimile HGy (per 8. 6. El.) & eadem ratione eſt GSE ſimile ESY.

Ex quibus liquet Triangula EAS, GHy eſſe ſimilia ut & Triangula GSE, ESY; ex ſimilitudine Triangulorum EAS, GHy eſt ES:GH=EA:Hy, & ex ſimilitudine Triangulorum GDH & ESY eſt ES:GH=SY:GD ergo eſt EA:Hy=SY:GD & EA×GD=Hy×SY ſed EA×GD=CB² per Lemma præcedens, ergo etiam Hy×SY=CB². Q. E. D.

236. Lem. IV. Ducatur à foco S linea SP ad punctum contactûs & ex puncto P contactus ducatur perpendicularis in Tangentem quæ ſecet axem in K, & ex puncto K ducatur in lineam SP perpendicularis KE, pars PE lineæ PS erit æqualis ſemilateri recto.

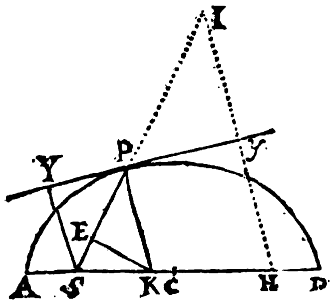


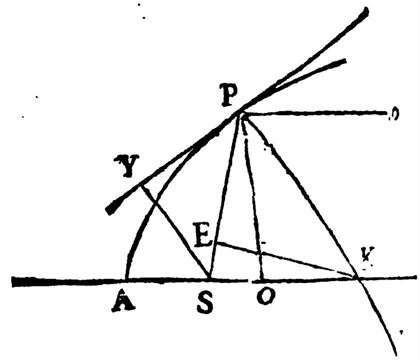


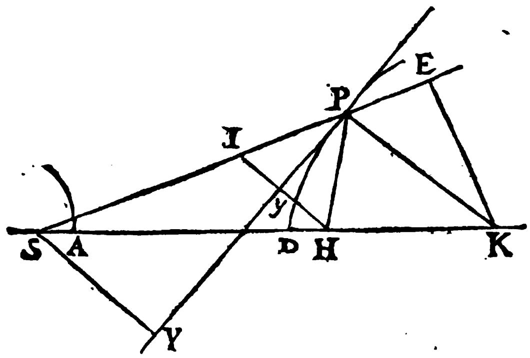
Producatur vel ſecetur SP in I ut ſit SI=AD ſive Axi, ducaturque ex altero foco linea HI quæ dividitur bifariam & perpendiculariter per Tangentem in y (per Theor. III. de Hyp. & IV. de Ellip.) ergo HI=2 Hy & eſt HI parallela PK, ergo Triangula PSK ISH ſunt ſimilia, eſtque PS:PK=SI:IH ſive 2 Hy, ſed ob Parallelas SY, PK, & angulos rectos Y & E ſimilia ſunt Triangula PSY, PKE, ergo eſt PS:PK=SY:PE, eſt ideo SI:2Hy=SY:PE & PE

2 Hy

De Motu Corporum.





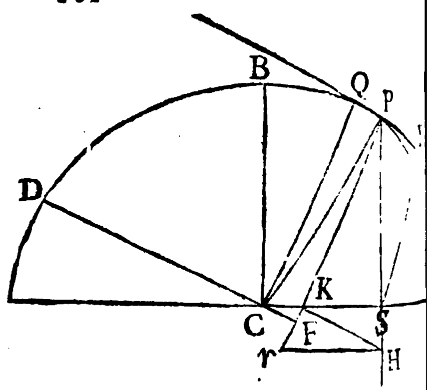


$= \frac{2 Hy \times SY}{SI}$ ſed $Hy \times SY = CB^2$ & $SI = 2AC$, ergo $PE = \frac{2 CB^2}{2 AC}$ & $2 PE = \frac{4 CB^2}{2 AC}$ ſed Latus Rectum L eſt $\frac{4 CB^2}{2 AC}$, ergo $2 PE = L$, ſive PE eſt dimidium lateris Recti.

237. 1. Coroll. Ex eo quod eſt $PS : PK = SY : PE$ ſive $\frac{1}{2} L$, eſt $SY = \frac{L \times PS}{2 PK}$ & $PK = \frac{L \times PS}{2 SY}$

238. 2. Cor. Hoc Lemma cum ſuo Corollario de Parabola etiam verum eſt, ſed aliter demonſtratur, ducta ordinata PO Triangula PKO, PKE ſunt æqualia, propter Angulos rectos in O & E; latus PK commune, & angulum PKO angulo KPE æqualem, ducto enim Diametro Po, erit OPK æqualis PKO ob Parallelas AK & Po ſed oPK eſt etiam æqualis angulo KPE quia perpendicularis dividit bifariam angulum SPo (per Theor. III. de Parab.) ergo angulus $PKO = KPE$, & (per 26. 1. Elem.) Triangulum PKO eſt æquale Triangulo PKE ideoque $PE = KO$, ſed KO eſt æqualis ſemilateri recto (per Theor. III. de parab.) ergo & PE.

239. Lemma V. In omni ſectione conica cujus focus S, PY, tangens in P, SY & PK, tangenti perpendiculares, L, latus rectum, eſt radius oſculi $Pr = \frac{4 PK^3}{L^2} = \frac{L \times SP^3}{2 SY^3}$ . . .



Dem . . . . Sit APB ellipſis cujus ſemiaxes AC, BC, ſemidiametri conjugatæ PC, DC, ac proinde DF tangenti PY parallela, atque adeo PF, QC, tangenti perpendiculares æquales ſunt. Eſt (per Lem. XII. Newt. $CD : BC = AC : PF$, & $CD^2 : BC^2 = AC^2 : PF^2$, ideoque eſt $CD^2 = \frac{BC^2 \times AC^2}{PF^2}$ Et quia $BC^2 = CQ \times PK$ ſive $PF \times PK$ (233.) eſt $CD^2 = \frac{PF \times PK}{PF^2} \times AC^2 = \frac{PK \times AC^2}{PF}$; ſed eſt $Pr = \frac{CD^2}{PF}$ (230.)

ergo

ergo eſt $Pr=\frac{PK\times AC^2}{PF^2}$; eſt autem $AC:BC=BC:\frac{1}{2}L$, ergo $BC^2=\frac{1}{2}L\times AC$ ideoque $PF\times PK=\frac{1}{2}L\times AC$, ergò $PF=\frac{L\times AC}{2PK}$ & $PF^2=\frac{L^2\times AC^2}{4PK^2}$ idque ſubſtituatur in valore Pr mox reperto erit $Pr=\frac{4PK^3}{L^2}$, & quia $PK=\frac{L\times SP}{2SY}$ (237.) erit $\frac{4PK^3}{L^2}=\frac{L\times SP^3}{2SY^3}=Pr$. Q. e. 1um.

Idem eodem prorsùs modo demonſtratur in hyperbolâ. Q. e. 2um.

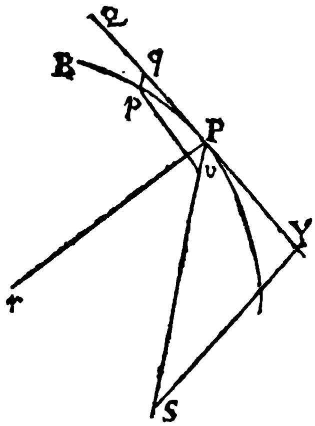
In Ellipſi creſcente focorum diſtantiâ manet $Pr=\frac{4PK^3}{L^2}=\frac{L\times SP^3}{2SY^3}$, adeóque idem etiam verum eſt cum focorum diſtantia infinita evadit, ſeu cum Ellipſis in Parabolam mutatur. Q. e. 3um.

240. Coroll. 1... Ex his facillima oritur conſtructio pro determinando radio curvaturæ in quâvis ſectione conicâ. Ex K, enim ſuper PK, erigatur perpendicularis KH, cum PS concurrens in H; ex H erigatur ſuper PH perpendicularis Hr, erit Pr, radius curvaturæ. Nam ob angulos rectos PKH, PHr, & lineas PK, SY, parallelas eſt $SP:SY=Pr:PH=PH:PK$, atque indè $SY^2:SP^2=PK:Pr$; adeóque $Pr=\frac{PK\times SP^2}{SY^2}$ ſed $SY=\frac{L\times SP}{2PK}$ (237), ergò $Pr=\frac{4PK^3}{L^2}$, ac proindè Pr eſt radius oſculi (239.).

241. Coroll. 2... Quoniam in verticibus ſectionum conicarum principalibus $SP=SY$, erit ibi $Pr=\frac{L\times SP^3}{2SY^3}=\frac{L}{2}$, ſeu radius oſculi æqualis dimidio lateris recti principalis.

242. Theor. Datis in puncto P, vis centripetæ quâ corpus curvam PpB deſcribit quantitate abſolutâ, vis illius directione PS, velocitate corporis, & poſitione tangentis PQ, datur curvæ PpB curvatura in P, ſeu radius oſculi Pr.

Dem.. Sit curvæ PpB, & circuli oſculatoris arcus infiniteſimus Pp, & quoniam velocitas corporis P revolventis finita ſupponitur, vis centripeta conſtans eſt, & illius directio ſibi parallela per arcum Pp,

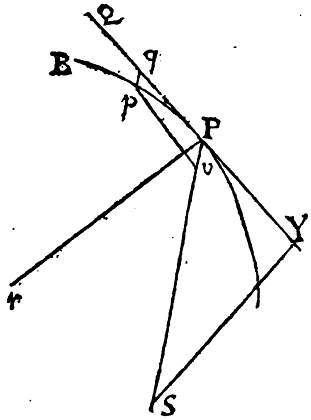


adeòque arcus ille eſt portio parabolæ cujus tangens PQ, & diameter PS (ex notâ 40â.) Quoniam autem vis centripetæ quantitas abſoluta in P, data eſt, datumque proindè ſpatium quod corpus vi illâ conſtante, dato tempore percurreret, & prætereà corporis P velocitas; ac tangentis PQ poſitio data ſunt, data eſt ratio qp ſive Pv ad Pq ſive pv, data ergo eſt parabola quam corpus P deſcriberet, ſi vis centripeta eadem maneret & directionem haberet lineæ PS perpetuò parallelam. Cum igitur datus ſit radius circuli parabolam datam in dato puncto oſculantis (239.) datur Pr, radius oſculi in puncto P. Q. e. d.

243. Coroll. Hinc datis in puncto P, curvaturâ ſeu radio oſculi Pr, poſitione tangentis PQ, velocitate corporis, & vis centripetæ directione PS, datur vis illius quantitas abſoluta in P; nam propter datas poſitionem Tangentis, & vis directionem, datur ratio SP ad SY & SP^3 ad SY^3, ſive $\frac{SP^3}{SY^3}$ & propter datum $Pr=\frac{L\times SP^3}{2SY^3}$ datur $\frac{L}{2}$ ſive L Latus rectum principale Parabolæ cujus arcus Pp eſt portio, PS Diameter & PQ Tangens unde datur tota Parabola & Latus rectum Diametri PS; Denique cum data ſit velocitas corporis in P datur lineola Pq, vel pv dato tempore deſcripta, datur ergo abſciſſa Pv ſive qp quæ eſt vis centripetæ quantitas abſoluta.

Datis verò in P, vis centripetæ quantitate abſolutâ, vis illius directione PS, poſitione tangentis PQ, radio oſculi Pr, ſive datâ curvaturâ, datur velocitas corporis in P;

De Motu Corporum.

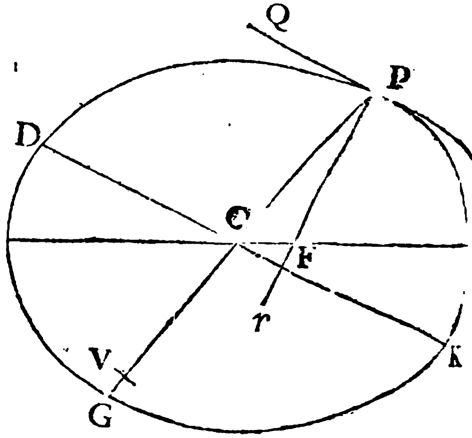


& generatim ſi ex his quinque, nimirum, vis centripetæ quantitate abſolutâ, illius directione, velocitate corporis, poſitione tangentis & curvaturâ, quatuor data fuerint, quintum determinatum eſt.

244. Theor. Corpus P, circà centrum virium S datum revolvendo, curvam P p B deſcribat, ſintque data, vis centripetæ quantitas abſoluta in puncto P, data lex ſecundum quam in variis à centro S diſtantiis vis centripeta agit, poſitio tangentis P Q, & curvatura in P, determinata ac unica eſt curva P p B, quam corpus P, circà centrum virium S, poteſt deſcribere.... Dem... Quoniam datur centrum virium S & punctum P, datur quoque poſitio rectæ P S, hoc eſt, directio vis centripetæ, ac proindè ex cæteris etiam datis (243.) datur velocitas quâ corpus in puncto P movetur; ſed datis in puncto P, vis centripetæ quantitate abſolutâ, poſitione tangentis ſeu rectæ ſecundùm quam projicitur corpus, velocitate projectionis determinatur proximum punctum p, tangentis in eo puncto p poſitio, corporis P in eo velocitas, ut & novâ diſtantiâ à centro p S, ſed datâ lege vis centripetæ in variis à Centro diſtantiis, datur iterum in puncto novo p, vis centripeta, unde proximum punctum etiam determinabitur, ex his ergo datis omnia puncta curvæ P p B, ſucceſſivè determinantur; ergo data ac unica eſt curva quam corpus *P*, his datis deſcribere poteſt. Q. e. D.

Coroll. Iiſdem manentibus, ſi deſcribatur nova curva quæ curvam P p B quam corpus *P* deſcribit oſculetur in P, quæque proindè eandem habet tangentem P Q, ut potè radio oſculi P R, perpendicularem, impoſſibile eſt ut datis iis quæ numero 244. poſuimus, corpus P, hanc novam curvam a priori diverſam deſcribat, hoc eſt, verba Newtoni ferè uſurpando, orbes duo ſe mutuò oſculantes eâdem vi centripetâ deſcribi non poſſunt.

245. Hiſce poſitis tandem probabimus quòd ſi vis centripeta ſit ut diſtantia à centro, movebitur corpus in Ellipſi centrum habente in centro virium, aut fortè in circulo in quem Ellipſis migrat focis coeuntibus.



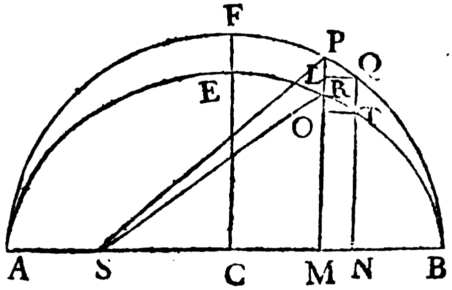
Data ſint centrum virium C, & vis centripetæ quantitas abſoluta, data à centro diſtantia C P, & corpus datâ cum velocitate ſecundùm directionem datam rectæ P Q projiciatur, erit P Q tangens curvæ deſcribendæ. Si fuerit C P ad tangentem P Q normalis, & velocitas quâ corpus P, projicitur æqualis velocitati quam idem corpus ſolâ vi centripetâ, ut eſt in P, conſtante ſollicitatum acquireret, cadendo per dimidium radium P C, curva deſcribenda erit circulus cujus centrum C, & radius C P (201.) ſi verò talis non fuerit velocitas projectionis, corpus P, aliam curvam deſcribet, in quâ tangens P Q, non ſemper erit ad radium vectorem C P perpendicularis, cum hæc ſit ſolius circuli proprietas, ut notum eſt. Sit ergò P Q ad radium vectorem C P obliqua, per centrum C ducatur recta C K, ipſi P Q paral-

paral-

Corol. 2. (d) Et æqualia erunt revolutionum in ellipſibus univerſis circum centrum idem factarum periodica tempora. Nam tempora illa in ellipſibus ſimilibus æqualia ſunt (per corol. 3. & 8. prop. IV.) in ellipſibus autem communem habentibus axem majorem ſunt ad invicem ut ellipſeon areæ totæ directè, & arearum particulæ ſimul deſcriptæ inversè; id eſt, ut axes minores direc-

parallela, & radio oſculi P r dato (242) deſcribatur circulus rectam P C interſecans in V; tùm ſumatur C K, media proportionalis inter C P, & $\frac{1}{2}$ P V, & ſemidiametris conjugatis C P, C K, deſcribatur ellipſis P D G A, ea erit orbita quam corpus *P*, deſcribet... Dem... Ellipſis P D G A, deſcribi poteſt per corpus aliquod *A* ſollicitatum vi aliquâ centripetâ ad centrum C tendente, quæque ſit ſemper ut diſtantia ab illo centro C P, (prop. X.) ponamus velocitatem corporis *A*, eandem eſſe ac velocitatem projectionis corporis *P*, & ex datâ velocitate corporis illius *A*, directione tangentis P Q directione vis C P, & curvaturâ Ellipſis in P, datur vis centripetæ quantitas abſoluta (242.) quâ corpus *A*, in Ellipſi motum retinetur in puncto P, ſed eadem eſt ellipſis illius, & orbitæ quam corpus *P* deſcribit, curvatura; nam P r eſt radius circuli Ellipſim P D G A oſculantis in P, (per conſt. & ſecun. demonſt. Newt. Prop. X.) eſt quoque radius circuli curvam quam corpus *P* deſcribit oſculantis in eodem puncto P, (per conſtr.) adeóque Ellipſis P D G A, & orbita quam corpus *P* deſcribit eandem habent curvaturam in puncto P, præterea recta P Q, orbitæ tangens cum ſit diametro C K parallela ellipſim tangit in P, idem eſt orbitæ & ellipſis centrum C, idem punctum P, eadem velocitas projectionis, eadem lex vis centripetæ ac proindè eadem vis illius quantitas abſoluta in puncto P, tam in ellipſi quam in orbitâ à corpore *P* deſcribendâ; cum igitur iis datis corpus *P* unicam curvam deſcribere poſſit & reverâ ellipſim P D G A, poſſit deſcribere, ſi vis centripeta ſit ut diſtantiâ à centro (nec circulus deſcribatur) corpus movebitur in Ellipſi centrum habente in centro virium. Q. e. D.

246. Si vis centrifuga ſit ut diſtantia à centro, eodem modo demonſtratur corpus moveri in hyperbolâ centrum habente in centro virium.



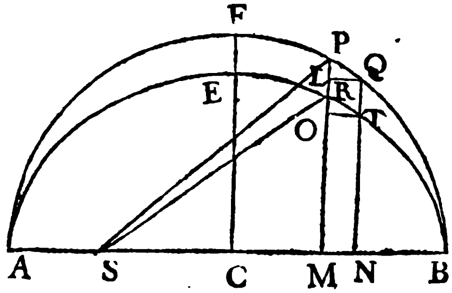
(d) 247. Ut demonſtretur *æqualia eſſe revolutionum circa idem centrum factarum periodica tempora in Ellipſibus univerſis iſta ex Conicis ſunt repetenda.*

Lemma...... Area circuli A F B, cujus radius F C æquatur ſemiaxi A C ellipſis A E B, eſt ad hujus Ellipſeos aream ut ſemiaxis A C, ſeu F C, ad alterum ſemiaxem E C... Dem... Axis A B, diviſus intelligatur in particulas innumeras æquales lineolæ M N, & per ſingula diviſionum puncta erigantur rectæ P M, Q N, axi perpendiculares. Quoniam ex circuli & Ellypſis naturâ, $FC^2 : QN^2 = AC \times CB : AN \times NB = EC^2 : TN^2$, erit $FC : QN = EC : TN$, & $FC : EC = QN : TN$; verùm ejuſdem baſis rectangula N L, N O, ſunt ut altitudines N Q, N T, ac proindè $NL : NO = FC : EC$; ergò ultima ſumma rectangulorum evaneſcentium ut N L, ad ſummam rectangulorum evaneſcentium ut N O, hoc eſt, area circuli ad aream Ellipſis (per Lem. IV.) ratio-

De Motu Corporum.

directè, & corporum velocitates in verticibus principalibus inversè; hoc eſt, ut axes illi minores directè, & ordinatim applicatæ ad idem punctum axis communis inversè; & propterea (ob æqualitatem rationum directarum & inverſarum) in ratione æqualitatis.

Scho-



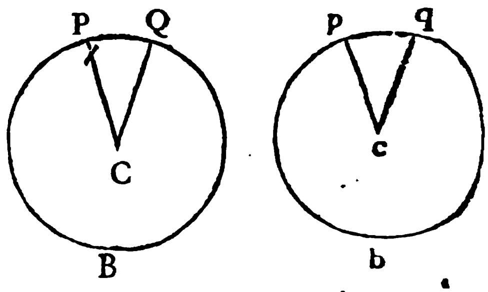
tionem habet ſemiaxis F C, ad alterum ſemiaxem E C. Q. e. D.

248. Coroll. 1 ... Idem eodem prorsùs modo demonſtratur, ſi A F B fuerit Ellipſis communem axem A B, habens cum Ellipſi A E B. Et generatim duæ quævis figuræ A F B, A E B, quarum ſemiordinatæ Q N, T N, ſunt in datâ ratione & quarum eſt communis diameter A B, ſunt inter ſe in ratione datâ ordinatarum Q N, T N.

249. Coroll. 2. Area circuli cujus diameter eſt medius proportionalis inter duos Ellipſis axes æqualis eſt areæ Ellipſis. Nam ſit $EC : R = R : FC$, & radio R, deſcribatur circulus, illius circuli area, erit ad aream circuli A F B, ut R^2 ad FC^2, adeóque ut E C ad F C; Quarè cum Ellipſis A E B, eandem habeat rationem ad circulum A F B (247), manifeſtum eſt aream circuli radio R, deſcripti æqualem eſſe areæ Ellipſis A E B.

250. Coroll. 3 ... Quoniam $R^2 = FC \times EC$, & areæ circulorum ſunt ut radiorum quadrata, erunt areæ Ellipſium ut axium rectangula.

251. Coroll. 4... Patet etiam in Ellipſibus vel ellipſi & circulo aut etiam in quibuſlibet curvis quarum ordinatæ Q N, T N, datam habent rationem, & quarum eſt diameter communis A B, aream MRB, eſſe ad aream correſpondentem M P B, ut eſt E C, ad F C, ſeu ut R M ad P M; ſed ductis ex quocumque diametri puncto S, rectis S P, S R, eſt etiam triangulum S M R, ad triangulum S M P, ut M R ad M P, ob communem utriuſque trianguli altitudinem M S; ergò ſector S B R, eſt ad ſectorem S B P, in ratione datâ E C, ad F C.

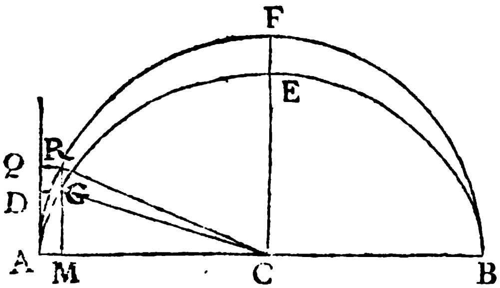


252. Theor. Corpora duo P, p, circa virium centra C, c, revolvendo, orbitas PQB, p q b, deſcribant; tempus periodicum in orbitâ P Q B, eſt ad tempus periodicum in alterâ orbitâ p q b, ut area P Q B P, ad aream p q b p, directè & ſectores P C Q, p c q, ſimul deſcripti inversè .... Dem.... ob æquabilem arearum circà centra C, c, deſcriptionem (prop. I.) tempus periodicum T, in orbe P Q B, eſt ad tempus t, quo deſcribitur ſector P C Q, ut area P Q B P, ad ſectorem P C Q, & ſimiliter tempus t, quo deſcribitur ſector p q c, eſt ad tempus periodicum θ, in orbe p q b, ut ſector p c q, ad aream p q b p: hoc eſt $T : t = PQBP$ area $: PCQ$, & $t : \theta = pcq : pqbp$ area, unde per compoſitionem rationum & ex æquo $T : \theta = PQBP \times pcq : pqbp \times PCQ$. Q. e. D.

253.

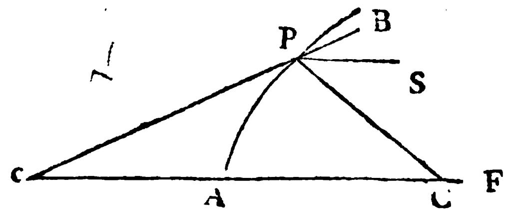
Scholium.

Si ellipſis centro in infinitum abeunte vertatur in parabolam, corpus movebitur in hac parabola; & vis ad centrum infinitè diſtans jam tendens evadet æquabilis. Hoc eſt theorema *Galilæi.* (e) Et ſi coni ſectio parabolica (inclinatione plani ad conum ſectum mutata) vertatur in hyperbolam, movebitur corpus in hujus



253. Si corpora duo Ellipſes A E B, A F B, quarum eſt axis communis A B, deſcribant, viribus ad centrum Ellipſium C tendentibus, tempora periodica erunt æqualia... Dem... Sint arcus A R, A G, infiniteſimi eodem tempore deſcripti, A Q tangens ad verticem A, Q R, D G, axi A B, parallelæ, & quoniam vires centrales ſunt ut Q R, D G (prop. VI.) & ob communem diſtantiam à centro A C, æquales ſunt vires, ſeu eadem vis (prop. X.) erit Q R = D G, ſectores verò A C G, A C R, ſunt ut G M, R M, ſeu E C, F C, (251), & areæ Ellypſium A E B, A F B, ſunt etiam ut E C, F C, (247. 248.) quare cum tempora periodica in illis Ellipſibus ſint ut areæ A E B A F B directè & ſectores A C G, A C R, inversè (252.) erunt eædem ut E C ad F C directè, & E C ad F C inversè, hoc eſt, ut E C×F C ad F C×E C, ac proindè in ratione æqualitatis. Q. e. D.

254. His poſitis facilè *demonſtratur æqualia eſſe revolutionum in Ellipſibus univerſis circum centrum idem factarum periodica tempora.* Nam duæ quævis ellipſes circà idem centrum deſcriptæ dicantur A, & B, deſcribatur tertia Ellipſis C, ſimilis Ellipſi A, & axem unum communem habens cum Ellipſi B, tempora periodica in Ellipſibus ſimilibus A & C, ſunt æqualia (per corol. 3. & 8. prop. IV. Newt.) & tempora periodica in ellipſibus C, & B, axem alterum communem habentibus ſunt etiam æqualia (253.) tempora igitur periodica in Ellipſibus quibusvis A & B ſunt æqualia. Q. e. D.



(e) 255. *Et ſi coni ſectio parabolica (inclinatione plani ad conum ſectum mutata), vertatur in hyperbolam movebitur corpus in hujus perimetro vi centripetâ in centrifugam verſâ.* Cum enim Ellypſis centrum C, à vertice A, in plagam F abit, vis centripetæ directio eſt per lineas P C, P F, à puncto P, ad centrum, & ubi infinita evadit diſtantia P C, atque P S, ad centrum ducta axi parallela fit, Ellipſi in parabolam mutatâ, directio eſt à puncto P, ad S, ſecundum lineam P S; mutatâ in Hyperbolam parabolâ, & centro ad alteram verticis A partem tranſlato in c, vis centralis directio eſt ſecundùm lineam P B, à P ad B, hoc eſt, à centro C, ad P c, adeòque in centrifugam verſa (228.)

DE MOTU CORPORUM.

hujus perimetro vi centripetâ in centrifugam verſâ. Et quemadmodum in circulo vel ellipſi ſi vires tendunt ad centrum figuræ in abſciſsâ poſitum, hæ vires augendo vel diminuendo ordinatas in ratione quâcunque datâ, vel etiam mutando angulum inclinationis ordinatarum ad abſciſſam; ſemper augentur vel diminuuntur in ratione diſtantiarum á centro, ſi modo tempora periodica maneant æqualia; (f) ſic etiam in figuris univerſis ſi ordinatæ augeantur vel diminuantur in ratione quâcunque datâ, vel angulus ordinationis utcunque mutetur, manente tempore pe-

256. Ex quibus ſequitur hæc generalis Lex; Si corpus revolvatur in ſectione conicâ, & vis centralis tendat ad ſectionis centrum, aut à centro, vis illa erit directè ut diſtantia à centro, & contrà ſi vis fuerit ut diſtantia à centro, corpus movetur in ſectione conicâ. (245. 246.)

(f) 257. *In figuris univerſis, ſi ordinatæ augeantur vel diminuantur in ratione datâ vel angulus ordinationis mutetur, manente tempore Periodico, vires augentur vel minuuntur in ratione diſtantiarum a Centro.* Hujus veritas ſequentium Lemmatum ope patebit.

Lemma. In figurâ quâvis A Q D, cujus diameter A D, ad hanc diametrum ordinatæ Q E, N G, augeantur vel minuantur in ratione datâ Q E, ad P E, vel ad angulum quemvis datum P E D, inclinentur, novaque deſcribatur curva A P D, per novarum ordinatarum extrema tranſiens, ſitque centrum virium C, in diametro poſitum utrique curvæ commune, rectæ P H, Q h, quæ curvas in punctis correſpondentibus Q, P, tangunt, ad idem diametri punctum H convergunt.... Dem... Ductis rectis P t, Q v, diametro A D parallelis, erit Q v = G E, = P t, & (per hypotheſim) n v : m t = E Q : E P, unde & alternando n v : E Q = m t : E P, & coeuntibus punctis n & Q, m & P, erit propter ſimilitudinem triangulorum n v Q & Q E h m t P & P E H

n v : E Q = Q v (G E) : E h

m t : E P = P t (G E) : E H

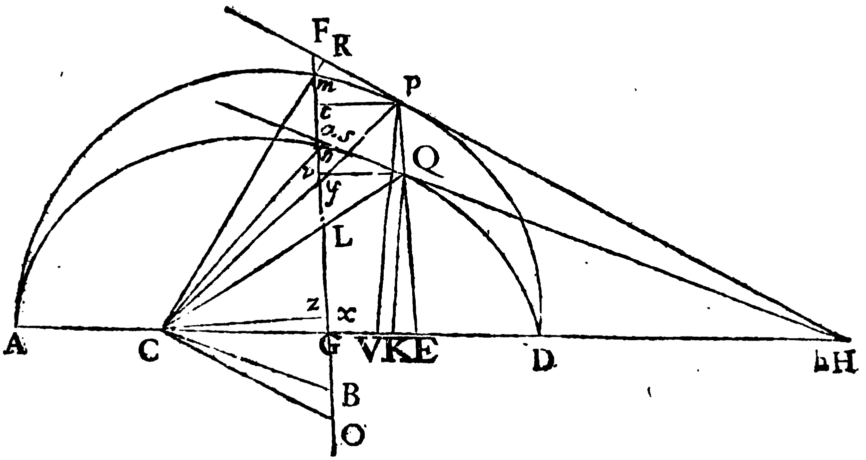
Cum ergo ſit n v : E Q = m t : E P, erit G E : E h = G E : E H, ideoque E H = E h, ac proindè tangentes ad idem diametri punctum H convergunt. Q. e. D.

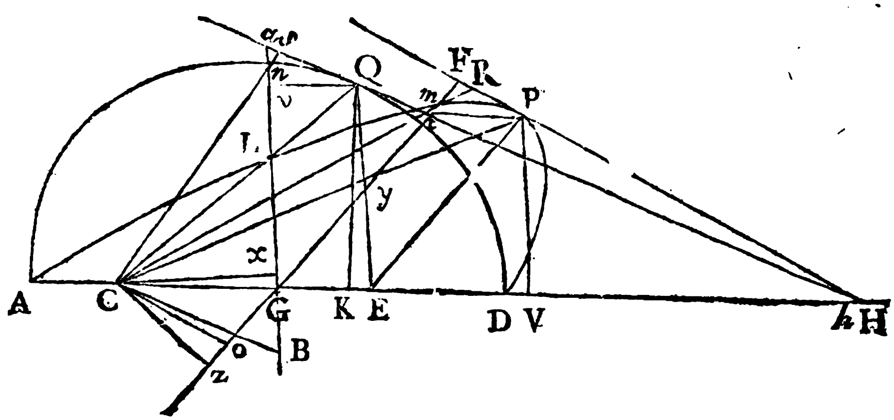
258. Lemma. Iiſdem manentibus ſector evaneſcens, C Q n, eſt ad ſectorem C P m, in alterâ curvâ correſpondentem ut area A Q D, ad aream A P D... Dem. ob parallelas G m & E P, G n, & E Q, eſt G y : C G = E P : C E & C G : G L = C E : E Q unde ex æquo G y : G L = E P : E Q = G m : G n (per conſt.) & hinc G m − G y : G n − G L = y m : L n = G m : G n = E P : Q E. Ex puncto C, demittantur in G m, & G n, perpendiculares C z, C x; & ex punctis P & Q, in diametrum A D, perpendiculares P V, Q K, & erit triangulum C y m : triang. C L n = y m × C z : L n × C x = G m × C z : G n × C x. Verum ob ſimilia triangula C z G, & P V E, C x G & Q K E, eſt C z : C G = P V : P E, & C G : C x = Q E : Q K: atquè adeò per compoſitionem rationum C z : C x = P V × Q E : Q K × P E = P V × G n : Q K × G m (per conſtr.) cum ergo ſit triangulum C y m : triang. C L n = G m × C z : G n × C x = G m × P V × G n : G n × Q K × G m = P V : Q K, & P V ſit ad Q K, ut parallelogrammum G E P m, ad parallelogrammum G E Q n, hoc eſt, (per Lem. IV.) & per conſtruct. ut area A P D, ad aream A Q D; ergò triangula C y m, C L n, ſunt in ratione arearum A P D, A Q D; at punctis m & P, n & Q coeuntibus, ſector C P m, æquatur triangulo C y m, & ſector C Q n triangulo C L n; ſunt igitur ſectores illi evaneſcentes ut areæ A P D, A Q D, directè. Q. e. d.

259. Theor. Iiſdem manentibus, ſi tempora

periodico; vires ad centrum quodcunque in abſciſsâ poſitum tendentes in ſingulis ordinatis augentur vel diminuuntur in ratione diſtantiarum à centro.

SEC-

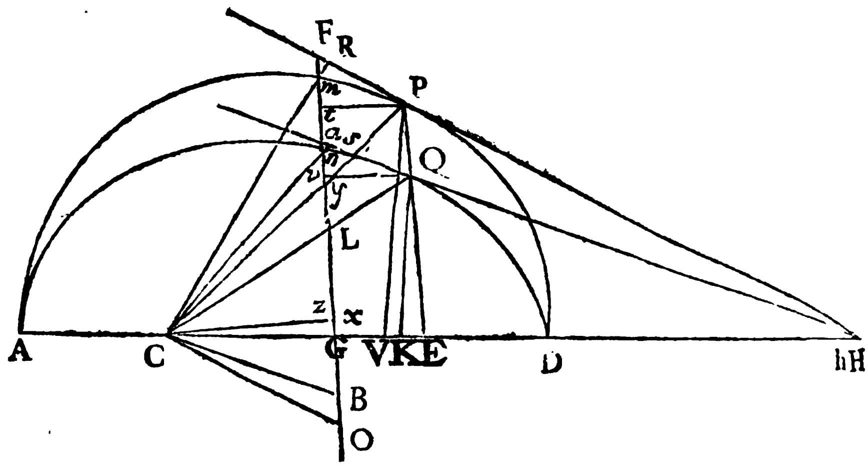


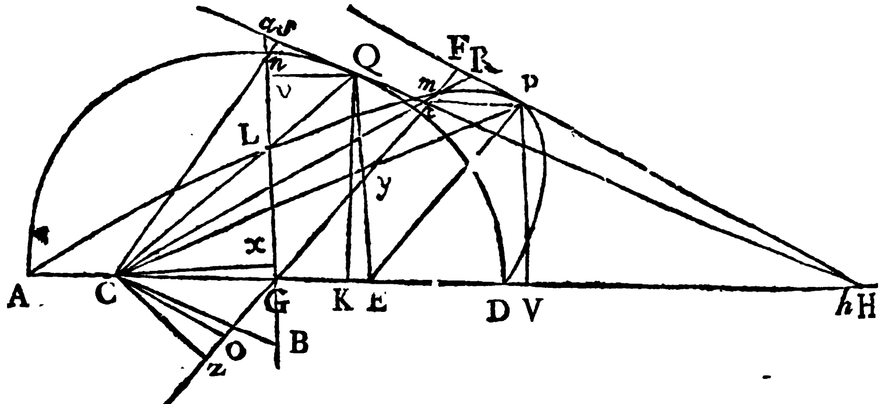


pora periodica in curvis APD, AQD fuerint æqualia, vires centripetæ in punctis correſpondentibus P & Q erunt inter ſe ut diſtantiæ à centro CP, CQ.

Demonſt. Figura AQD rectis ex centro C ductis in ſectores innumeros inter ſe æquales, ut CQn, & figura APd, in totidem ſectores correſpondentes, ac proindè etiam inter ſe æquales (258), ut CPm diviſæ intelligantur; & ob eumdem

ſecto-





ſectorum in utrâque figurâ numerum, æquabilem illorum deſcriptionem (prop. I.) & æqualia tempora periodica, ſectores CPm, CQn, æquali tempore deſcribentur. Quare (per prop. VI). Vires centripetæ in punctis P & Q, ſunt inter ſe ut rectæ mR, nS, punctis m & P, n & Q coeuntibus; verùm propter Parallelas QE, aG & PE, FG, eſt, $aG : FG = QE : PE$, (257) & quia nG & mG in eadem ſunt ratione, iis ex aG & FG ſubductis manent an ad Fm ſicut QE ad PE; ductis autem ex C, Parallelis CB CO ad tangentes aH FH, Triangula BCG & OGC ſunt ſimilia triangulis aGH, FGH unde eſt

$$BG : aG = GC : GH$$

& $OG : FG = GC : GH$ ideoque $BG : OG = aG : FG = QE : PE = nG : mG$ & jungendo terminos primæ & ſecundæ rationis terminis ultimæ eſt $Bn : Om = QE : PE = an : Fm$. Denique quia ob CB, CO, Tangentibus aH FH Parallelas, ſimilia etiam ſunt Triangula, anS & nCB, FmR & mCO, eſt

$$Bn : na = Cn : Sn$$

& eſt $Fm : mO = Rm : mC$, & Compoſitis Rationibus eſt $Bn \times Fm : na \times mO = Cn \times Rm : Sn \times mC$, ſed quia $Bn : Om = an : Fm$, eſt $Bn \times Fm = an \times Om$, ergo etiam $Cn \times Rm = Sn \times mC$, ideoque $Cn : Cm = Rm : Sn$; ſive diſtantiæ à Centro in eâdem ſunt ratione ac vires Centrales.

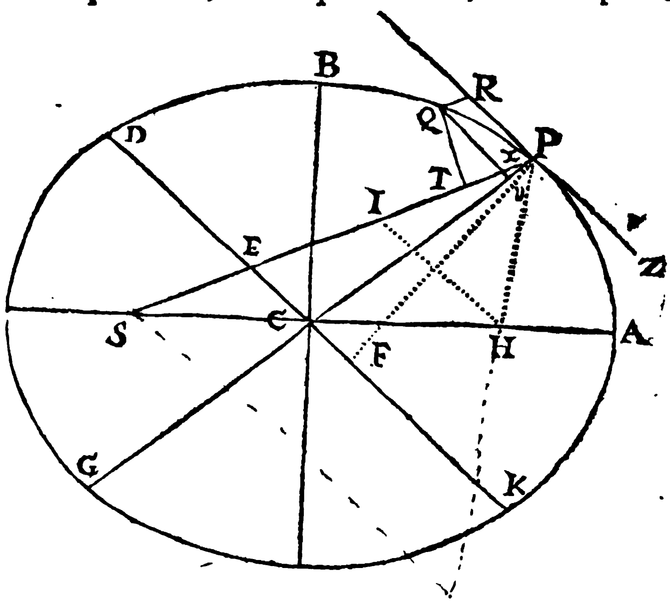
SECTIO III.

De motu corporum in conicis ſectionibus excentricis.

PROPOSITIO XI. PROBLEMA VI.

Revolvatur corpus in ellipſi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum ellipſeos.

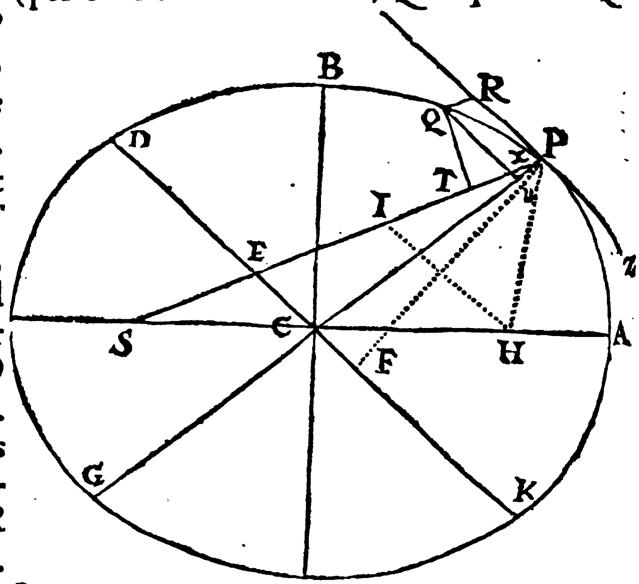
Eſto ellipſeos umbilicus *S*. Agatur *SP* ſecans ellipſeos tum diametrum *DK* in *E*, tum ordinatim applicatam *Qv* in *x*, & compleatur parallelogrammum *QxPR*. Patet *EP* æqualem eſſe ſemiaxi majori *AC*, eo quod, actâ ab altero ellipſeos umbilico *H* lineâ *HI* ipſi *EC* parallelâ, ob æquales *CS*, *CH* æquentur *ES*, *EI*, (g) adeo ut *EP* ſemiſumma ſit ipſarum *PS*, *PI*, id eſt (ob parallelas *HI*, *PR*, & angulos æquales *IPR*, *HPZ*) ipſarum *PS*, *PH*, quæ conjunctim axem totum 2*AC* adæquant. Ad *SP* demittatur perpendicularis *QT*, & ellipſeos latere recto



prin-

(g) 260. Quia (per prop. 48. lib. 3. conic. Apoll. ſup. Theor. IV. de Ellipſi) æquales ſunt anguli quos rectæ PH, PS, conſtituunt cum tangente PR, & ob parallelas HI, PR, æquales quoque ſunt anguli alterni PIH, PHI, æquales erunt rectæ PI, PH, adeóque $EP = \frac{PS + PH}{2} = AC$, (prop. 52. lib. 3. conic. apoll. ſuperius Theor. III. de Ellip.).

principali (ſeu (h) $\frac{2\,BC\,quad.}{AC}$) dicto L, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv (i) id eſt, ut PE ſeu AC ad PC; & $L \times Pv$ ad GvP ut L ad Gv; & (k) GvP ad Qv *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & (per corol. 2. lem. VII.) Qv *quad.* ad Qx *quad.* punctis Q & P coeuntibus eſt ratio æqualitatis; & Qx *quad.* ſeu Qv *quad.* eſt ad QT *quad.* ut EP *quad.* ad PF *quad.* (l) id eſt, ut CA *quad.* ad PF *quad.* ſive (per lem. XII.) ut CD *quad.* ad CB *quad.* (m) Et conjunctis his omnibus rationibus, $L \times QR$ fit ad QT *quad.* ut $AC \times L \times PCq \times CDq$, ſeu $2\,CBq \times PCq \times CDq$ ad $PC \times Gv \times CDq \times CBq$, ſive ut $2\,PC$ ad Gv. Sed punctis



(h) 261. In Ellipſi & hyperbolâ latus rectum principale $L = \frac{2\,BC^2}{AC}$ nam $2AC : 2BC = 2BC : L$, undè $L = \frac{4\,BC^2}{2\,AC} = \frac{2\,BC^2}{AC}$.

(i) Per conſtructionem $QR = Px$, ſed propter Triangula ſimilia Pxv, PEC $Px : Pv = PE\,(AC) : PC$, ergò $QR : Pv = AC : PC$.

(k) Per naturam Conicorum, facta partium Diametri ſunt ad quadrata Ordinatarum ut Diametri tranſverſæ quadratum ad quadratum ejus conjugatæ (Vide ſuperius de Conicis Theor. II. de Ellipſi & de Hyperbolâ).

(l) Eſt $CA^2 : PF^2 = CD^2 : CB^2$; nam per Lem. XII. $PF \times CD = AC \times BC$, adeóque $PF^2 \times CD^2 = CA^2 \times BC^2$, ac proindè $CA^2 : PF^2 = CD^2 : CB^2$.

(m) 262. Scriptis ſeorſim analogiis res clara fit.

$L \times QR : L \times Pv = AC : PC$

$L \times Pv : GvP = L : Gv$

$GvP : Qv^2 = PC^2 : CD^2$

$Qv^2 : QT^2 = CD^2 : CB^2$.

Undè conjunctis his omnibus rationibus, $L \times QR : QT^2 = AC \times L \times PC^2 \times CD^2 : PC \times Gv \times CD^2 \times CB^2$, hoc eſt, ob $AC \times L = 2\,BC^2$, $L \times QR : QT^2 = 2\,PC : Gv$, & ob $2\,PC = Gv$, $L \times QR = QT^2$, & $L = \frac{QT^2}{QR}$.

Nam

tis *Q* & *P* coeuntibus æquantur $2PC$ & Gv. Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & QT *quad.* æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $L \times SPq$ æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta reciprocè eſt ut $L \times SPq$; id eſt, reciprocè in ratione duplicata diſtantiæ *SP*. *Q. E. I.*

Idem aliter.

Cum vis ad centrum ellipſeos tendens, quâ corpus *P* in ellipſi illâ revolvi poteſt, ſit (per corol. 1. prop. X.) ut *CP* diſtantia corporis ab ellipſeos centro *C*; ducatur *CE* parallela ellipſeos tangenti *PR*; & vis, quâ corpus idem *P* circum aliud quodvis ellipſeos punctum *S* revolvi poteſt, ſi *CE* & *PS* concurrant in *E*, (n) erit ut $\frac{PE\ cub.}{SPq}$ (per corol. 3. prop. VII.) hoc eſt, ſi punctum *S* ſit umbilicus ellipſeos, ideoque *PE* detur, ut *SPq* reciprocè. *Q. E. I.*

Eâdem brevitate, quâ traduximus problema quintum ad parabolam, & hyperbolam, liceret idem hic facere: verum ob dignitatem problematis, & uſum ejus in ſequentibus non pigebit caſus cæteros demonſtratione confirmare.

PRO-

(n) Nam (per Coroll. III. Prop. VII.) vis tendens ad centrum C, quam exponat recta CP, eſt ad vim tendentem ad aliud punctum S, quam exponat recta *A*, ut $CP \times SP^2$ ad cubum rectæ quæ à centro C ad Tangentem RPZ duceretur parallela ad lineam SP à ſecundo virium centro ad punctum P curvæ ductam, quæ quidem recta æqualis foret PE, quoniam ipſi eſſet Parallela & inter eaſdem Parallelas DC RPZ; adeóque $CP \times SP^2 : PE^3 = CP : A = \frac{PE^3}{SP^2}$; hoc eſt, ſi punctum S ſit umbilicus Ellipſeos, adeóque PE = AC (260) detur, erit vis ut SP^2 reciprocè; hic autem ſupponitur talem eſſe vim ad centrum C tendentem ut tempora periodica circà centra C, & S, æqualia ſint, quod ſupponi poteſt.

De Motu Corporum.

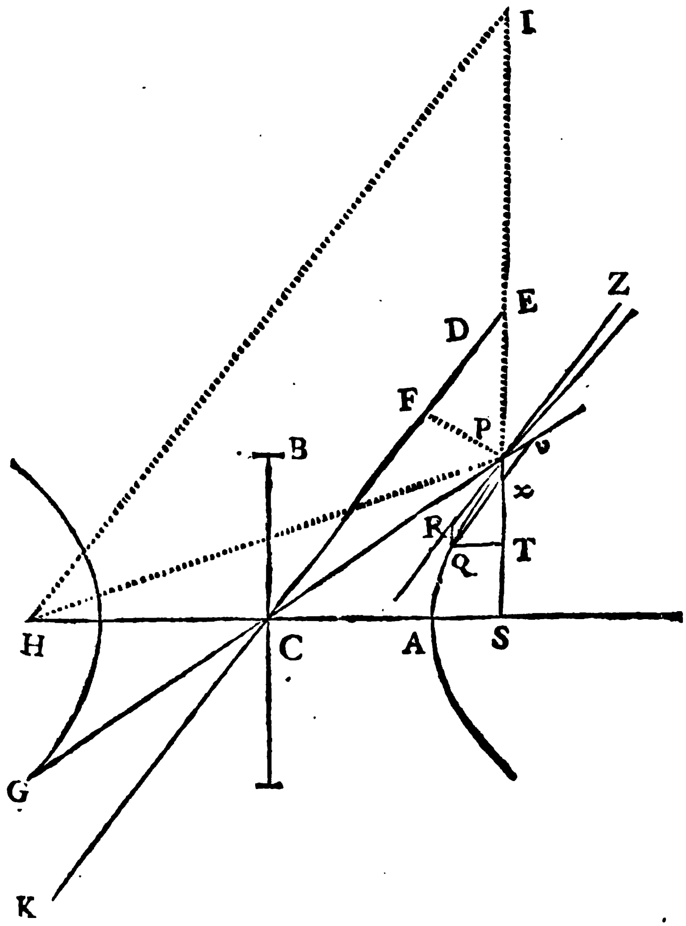
PROPOSITIO XII. PROBLEMA VII.

Moveatur corpus in hyperbolâ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.

Sunto *CA*, *CB* ſemiaxes hyperbolæ; *PG*, *KD*, diametri aliæ conjugatæ; *PF* perpendiculum ad diametrum *KD*; & *Qv* ordinatim applicata ad diametrum *GP*. Agatur *SP* ſecans cum diametrum *DK* in *E*, tum ordinatim applicatam *Qv* in *x*, & compleatur parallelogrammum *QRPx*. (°) Patet *EP* æqualem eſſe ſemiaxi tranſverſo *AC*, eo quod, actâ ab altero hyperbolæ umbilico *H* lineâ *HI*, ipſi *EC* parallelâ, ob æquales *CS*, *CH* æquentur *ES*, *EI*; adeo ut *EP* ſemidifferentia ſit ipſarum *PS*, *PI*, id eſt (ob parallelas *IH*, *PR* & angulos æquales *IPR*, *HPZ*) ipſarum *PS*, *PH*, quarum differentia axem totum 2*AC* adæquat. Ad *SP* demittatur perpendicularis *QT*. Et hyperbolæ latere recto principali (ſeu $\frac{2BCq}{AC}$) dicto *L*, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut *QR* ad *Pv*, ſeu *Px* ad *Pv*, id eſt (ob ſimilia triangula *Pxv*, *PEC*) ut *PE* ad *PC*, ſeu *AC* ad *PC*. Erit etiam $L \times Pv$ ad $Gv \times Pv$ ut *L* ad *Gv*; & (ex naturâ conicorum) rectangulum *GvP* ad *Qv quad.* ut *PCq* ad *CDq*; & (per corol. 2. lem. VII.) *Qv quad.* ad *Qx quad.* punctis *Q* & *P* coeuntibus fit ratio æqualitatis; & *Qx quad.* ſeu *Qv quad.* eſt ad *QTq* ut *EPq* ad *PFq*, id eſt, ut *CAq* ad *PFq*, ſive (per lem. XII.) ut *CDq* ad *CBq*: & conjunctis his omnibus rationibus $L \times QR$ fit ad *QTq* ut $AC \times L \times PCq \times CDq$, ſeu $2CBq \times PCq \times CDq$ ad $PC \times Gv \times CDq \times CBq$, ſive ut 2*PC* ad *Gv*. Sed punctis *P* & *Q* coeuntibus æquantur 2*PC* & *Gv*. Ergo & his pro-

(°) 263. Eſt SE = SP + PE & ob æquales ES, EI, eſt PI = EI + PE = ES + PE = SP + 2PE, ac proindè PI − SP = 2PE, ac PE eſt ſemidifferentia ipſarum PS, PI; ſed angulus HPR = RPS, angulus enim interceptus inter lineas à focis ad punctum Hyperbolæ ductas bifariam dividitur per Tangentem (per prop. 48. lib. 3. Conic. Apoll. vide Theor. V. de Hyp.) & RPS = EPZ (per 15. 1. Elem.) adeóque IPR = HPZ, & ob parallelas IH, PR, angulus PHI = HPR = IPZ = HIP, unde HP = PI, adeóque EP, eſt ſemidifferentia ipſarum PS, PH, & quia differentia rectarum PS, PH, axem totum 2AC, adæquat (per prop. 51. lib. 3. conic. Apoll. Vide ſup. Theor. IV. de Hyperb.), eſt EP = AC.

264.



portionalia $L\times QR$ & QTq (p) æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $L\times SPq$ æquale $\frac{SPq\times QTq}{QR}$. Ergo (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta reciprocè eſt ut $L\times SPq$, id eſt, reciprocè in ratione duplicatâ diſtantiæ *SP*. *Q. E. I.*

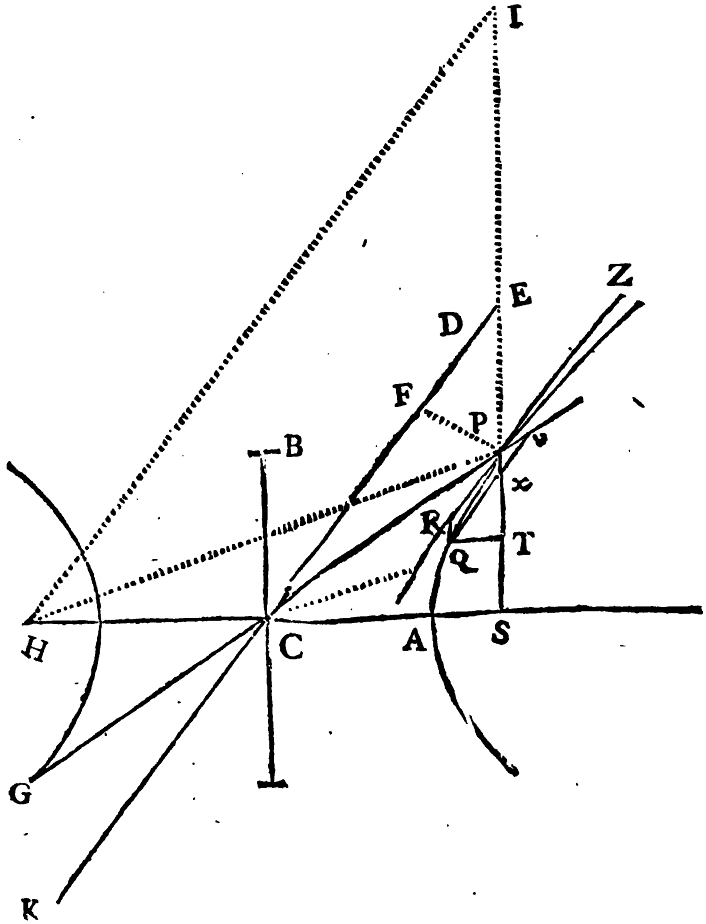
Idem aliter.

Inveniatur vis, quæ tendit ab hyperbolæ centro *C*. Prodibit hæc diſtantiæ *CP* proportionalis. Inde vero (per. corol. 3. prop.

(p) 264. Notandum eſt quod in hyperbolâ ſicut in Ellipſi, (ut liquet ex demonſtratione Prop. X. & XI.) latus rectum principale ſive $L=\frac{QT^2}{QR}$.

VII.) vis ad umbilicum S tendens erit ut $\frac{PE\ cub.}{SPq}$, hoc eſt, ob datam PE reciprocè ut SPq. *Q. E. I.*

Eodem modo demonſtratur, quod corpus (q) hac vi cen-



(q) 265. Nam ex centro C, in tangentem PR productam ducta intelligatur recta ipſi HP parallela, & ea æqualis erit lineæ PE; Etenim ob parallelas PR, CE, & HI, angulus quem linea ipſi HP, parallela efficit cum CE, æqualis erit angulo $PHI = HIP = CEP$; lineæ autem intrà duas parallelas æqualiter inclinatæ ſunt æquales. Eſt igitur, (per coroll. 3. prop. VII.), vis centrifuga à centro C, tendens quâ corpus P, hyperbolam AQP, deſcribit ad vim centrifugam à foco H tendentem quâ eandem hyperbolam percurrit ut $CP \times HP^2$ ad PE^3. Vim à centro C, tendentem quæ eſt ut CP, exponat recta CP, & alteram vim à foco H directam exponat recta A, & erit $CP \times HP^2 : PE^3 = CP : A = \frac{PE^3}{HP^2}$, hoc eſt, ob PE æqualem datæ A C, vis à foco H tendens eſt reciprocè ut HP^2.

266.

tripetâ in centrifugam verſâ movebitur in hyperbolâ oppoſitâ.

LEMMA XIII.

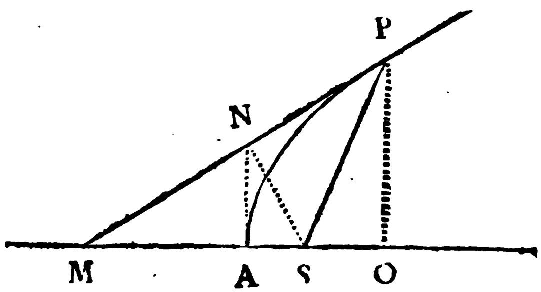
(r) *Latus rectum parabolæ ad verticem quemvis pertinens eſt quadruplum diſtantiæ verticis illius ab umbilico figuræ.*

Patet ex conicis.

LEMMA XIV.

Perpendiculum, quod ab umbilico parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium eſt proportionale inter diſtantias umbilici à puncto contactus & à vertice principali figuræ.

Sit enim *AP* parabola, *S* umbilicus ejus, *A* vertex principalis, *P* punctum contactus, *PO* ordinatim applicata ad diametrum principalem, *PM* tangens diametro principali occurrens in *M*, & *SN* linea perpendicularis ab umbilico in tangentem. Jungatur *AN* & ob æquales *MS* & *SP*, *MN*, & *NP*, *MA* & *AO* parallelæ erunt rectæ *AN* & *OP*; & inde triangulum *SAN* rectangulum erit ad *A*, & ſimile triangulis æqualibus *SNM*, *SNP*: ergo *PS* eſt ad *SN* ut *SN* ad *SA*. *Q. D. E.*



Corol. 1. *PSq* eſt ad *SNq* ut *PS* ad *SA*.

(ſ) *Corol.* 2. Et ob datam *SA* eſt *SNq* ut *PS*.

Corol. 3. Et concurſus tangentis cujuſvis *PM* cum recta *SN*, quæ ab umbilico in ipſam perpendicularis eſt, incidit in rectam *AN* quæ parabolam tangit in vertice principali. P R O-

(r) 266. Dem.... Illius demonſtrationem jam ſuperius in Compendio de Conicis, Theor. IV. de Parabolâ dedimus.

(ſ) Cum ſit (per coroll. 1.) $SA \times PS^2 = SN^2 \times PS$, adeóque $SA \times PS = SN^2$; erit ob datam SA, SN^2 ut PS, id eſt, variationes quadrati SN^2, in eâdem parabolâ erunt ut variationes rectæ SP ſive ut diſtantiæ à foco.

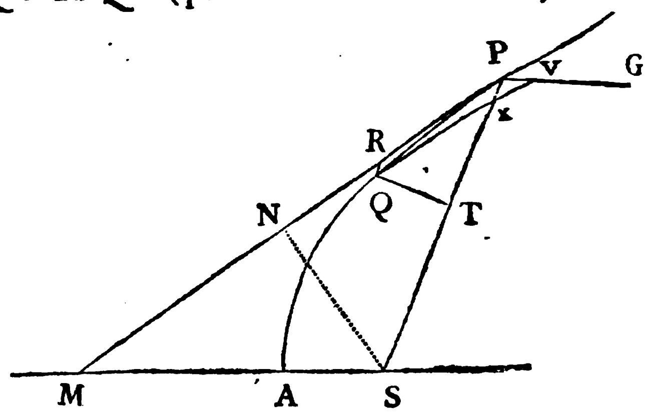
Nam

De Motu Corporum

PROPOSITIO XIII. PROBLEMA VIII.

Moveatur corpus in perimetro parabolæ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.

Maneat conſtructio lemmatis, ſitque P corpus in perimetro parabolæ, & à loco Q, in quem corpus proxime movetur, age ipſi SP parallelam QR & perpendicularem QT, necnon Qv tangenti parallelam, & occurrentem tum diametro PG in v, tum diſtantiæ SP in x. Jam ob ſimilia triangula (t) Pxv, SPM, & æqualia unius latera SM, SP, æqualia ſunt alterius latera Px ſeu QR & Pv. Sed ex conicis quadratum ordinatæ Qv æquale eſt rectangulo ſub latere recto & ſegmento diametri Pv, id eſt (per lem. XIII.) rectangulo $4PS \times Pv$, ſeu $4PS \times QR$; & punctis P & Q coeuntibus, ratio Qv ad Qx (per corol. 2. lem. VII.) fit ratio æqualitatis. Ergo Qx *quad.* eo in caſu æquale eſt rectangulo $4PS \times QR$. Eſt autem (ob ſimilia triangula QxT, SPN) Qxq ad QTq ut PSq ad SNq, hoc eſt (per corol. 1. lem. XIV.) ut PS ad SA, id eſt, ut $4PS \times QR$ ad $4SA \times QR$, & inde (per prop. IX. lib. V. elem.) (u) QTq & $4SA \times QR$ æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ æquale



SP

(t) * Nam ob parallelas MP & Qv, MS & PG, eſt angulus vPx = PSM & Pxv = QxT = MPS.

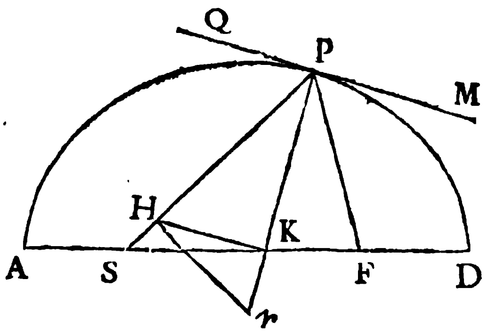
(u) 267. Quoniam latus rectum principale $L = 4AS$, & eſt $4AS \times QR = QT^2$, erit etiam in parabolâ ut in cæteris Sectionibus conicis (264), latus rectum principale $L = \frac{QT^2}{QR}$.

268.

$SPq \times 4SA$: & propterea (per corol. I. & 5. prop. VI.) vis centripeta eſt reciprocè ut $SPq \times 4SA$, id eſt, ob datam $4SA$ reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiæ SP. *Q. E. I.* LIBER PRIMUS.

Corol. 1. (x) Ex tribus noviſſimis propoſitionibus conſequens eſt, quod ſi corpus quodvis *P* ſecundum lineam quamvis rectam *PR* quâcunque cum velocitate exeat de loco *P*, & vi centripetâ, quæ ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ locorum à centro, ſimul agitetur; movebitur hoc corpus in aliquâ ſectionum conicarum umbilicum habente in centro virium; & contra. Nam datis umbilico, & puncto contactus, & poſitione tangentis, deſcribi poteſt ſectio conica, quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit. Datur autem curvatura ex datâ vi centripetâ, & velocitate corporis: & orbes duo ſe mutuo tangentes eâdem vi centripetâ eâdemque velocitate deſcribi non poſſunt.

Co-



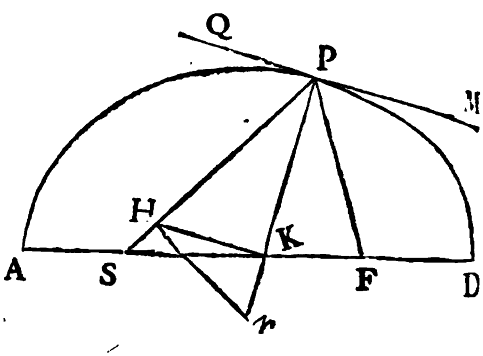
(x) 268. Si corpus moveatur in aliquâ ſectionum conicarum umbilicum habente in centro virium, vis centripeta erit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ locorum ab umbilico, & contrà ſi vis centripeta fuerit quadrato diſtantiæ à centro virium reciprocè proportionalis, corpus movebitur in aliquâ ſectionum conicarum... Dem... Prima pars propoſitionis à Newtono eleganter demonſtrata, poteſt adhuc aliter & generatim demonſtrari. Vis centripeta ut $\frac{SP}{SY^3 \times R}$ (212.) ſed in omni ſectione conicâ $R = \frac{L \times SP^3}{2SY^3}$ (239.) Ergò $\frac{SP}{SY^3 \times R} = \frac{2SY^3 \times SP}{SY^3 \times L \times SP^3} = \frac{2}{L \times SP^2}$ hoc eſt, ob datam $\frac{2}{L}$, vis eſt ut $\frac{1}{SP^2}$. Q. e. 1um.

Corpus P, datâ cum velocitate ſecundum directionem datam PQ projiciatur, ſitque vis centripetæ ad punctum S tendentis quantitas abſoluta data in puncto dato P, in variis à centro diſtantiis ea vis ſit ſemper in ratione inverſâ quadrati diſtantiæ à centro S, ſi ea fuerit corporis P velocitas quam vi centripetâ ut eſt in P uniformiter urgente acquireret cadendo per $\frac{1}{2}$ SP & præterea PS ſit ad PQ perpendicularis, corpus P circulum deſcribet cujus centrum S & radius PS (201.) Si verò alia fuerit velocitas, aut PS ad PQ obliquâ, corpus P aliam deſcribet orbitam in quâ tangens PQ, non ſemper erit ad radium vectorem SP perpendicularis. Sit igitur PQ ad SP obliqua, datur Pr, radius circuli orbitam à corpore P deſcribendam oſculantis in P; ex r in PS demittatur perpendicularis rH, & ex H in Pr perpendicularis HK, jungaturque

Corol. 2. Si velocitas, quâcum corpus exit de loco ſuo *P*, ea ſit, quâ lineola *PR* in minimâ aliquâ temporis particulâ deſcribi poſſit; & vis centripeta potis ſit eodem tempore corpus idem movere per ſpatium *QR*: movebitur hoc corpus in conicâ aliquâ ſectione; cujus latus rectum principale eſt quantitas illa (y) $\frac{QTq}{QR}$, quæ ultimo fit, ubi lineolæ *PR*, *QR* in infinitum diminuuntur. Circulum in his corollariis refero ad ellipſin; & caſum excipio, ubi corpus rectà deſcendit ad centrum.

P R O-

SK; Deindè fiat angulus Q P F complementum ad duos rectos anguli Q P S, & ſi fuerit P F parallela ipſi SK, deſcribatur parabola cujus umbilicus S, axis SK, & punctum perimetri P, data ſunt. Si verò PF ipſi SK occurrat in puncto aliquo F, tunc focis S, & F, & perimetri puncto P datis deſcribatur Hyperbola ſi puncta S & F cadant ad eandem partem puncti K, & Ellipſis ſi cadant ad partes contrarias, & corpus *P* movebitur in ſectione conicâ per eam conſtructionem deſcriptâ. Nam (per conſtruct.) angulus Q P F, eſt complementum anguli Q P S, ad duos rectos; ſed angulus SPM, eſt quoque ejuſdem anguli QPS, complementum ad duos rectos, ac proindè Q P F = SPM, ergò ſubducto communi angulo SPF, erit angulus QPS = FPM, adeòque QP, tangens ſectionis in P, (prop. 48. Lib. 3. conic. Apoll. & per Theor. III. aut IV. de Hyp. Ell. & Parab.) Cum igitur ſectionis axis ſit SK, & PK ad tangentem PQ normalis (per conſtr.) erit P r radius curvaturæ ſectionis in puncto P, (239.) eadem igitur eſt ſectionis conicæ & orbitæ quam corpus *P* deſcribit tangens atque curvatura in puncto P, porrò ſectio conica D P A deſcribi poteſt vi aliquâ centripetâ ad umbilicum S tendente quæ ſit ſemper reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ ab illo puncto S (per ſuperius demonſtrata) & ex datis corporis alicujus *A* ſectionem deſcribentis, velocitate in puncto P, directione tangentis PQ, directione vis PS, & curvaturâ ſectionis conicæ in P, datur vis centripetæ quantitas abſoluta in puncto P, (242.) quâ corpus *A* in ſectione conicâ retinetur in P, ponamus velocitatem corporis *A* eandem cum velocitate projectionis corporis *P* orbitam ſuam deſcribentis, tùm eadem erit ejus orbitæ & Sectionis Conicæ curvatura in P, idem virium centrum S, idem punctum P, eadem tangens PQ, eadem velocitas projectionis, eadem lex vis centripetæ, ac proindè eadem illius quantitas abſoluta in puncto P, tam in ſectione conicâ quàm in orbitâ à corpore *P* deſcribendâ. Cùm igitur corpus P, iis poſitis unicam curvam deſcribere poſſit & quidem ſectionem conicam D P A poſſit deſcribere, eam reverâ deſcribet (244.) Q. e. 2um.



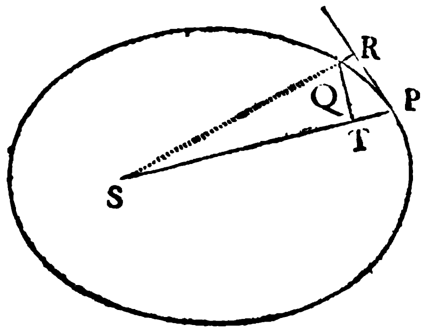
2am. hujuſce propoſitionis partem formulis analyticis invenerunt Hermannus & Bernoullius in monumentis Academiæ Pariſienſis, an. 1710.

(y) * Patet ex notâ 267.

269.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA VI.

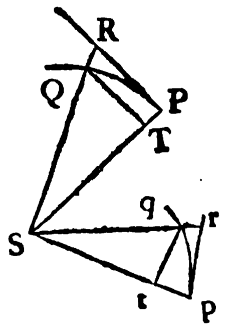
Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta ſit reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiæ locorum à centro; dico quod orbium latera recta principalia ſunt in duplicatâ ratione arearum, quas corpora radiis ad centrum ductis eodem tempore deſcribunt.



[z] Nam (per corol 2. prop. XIII.) latus rectum L æquale eſt quantitati $\frac{QTq}{QR}$, quæ ultimo fit, ubi coeunt puncta P & Q. Sed linea minima QR dato tempore eſt ut vis centripeta generans, hoc eſt (per hypotheſin) reciprocè ut SPq. Ergo $\frac{QTq}{QR}$ eſt ut $QTq \times SPq$, hoc eſt, latus rectum L in duplicatâ ratione areæ $QT \times SP$. *Q. E. D.*

Corol. [a] Hinc ellipſeos area tota, eique proportionale rectangulum ſub axibus eſt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione lateris recti, & ratione temporis periodici. Namque area tota eſt ut area $QT \times SP$, quæ dato tempore deſcribitur, ducta in tempus periodicum.

PRO-

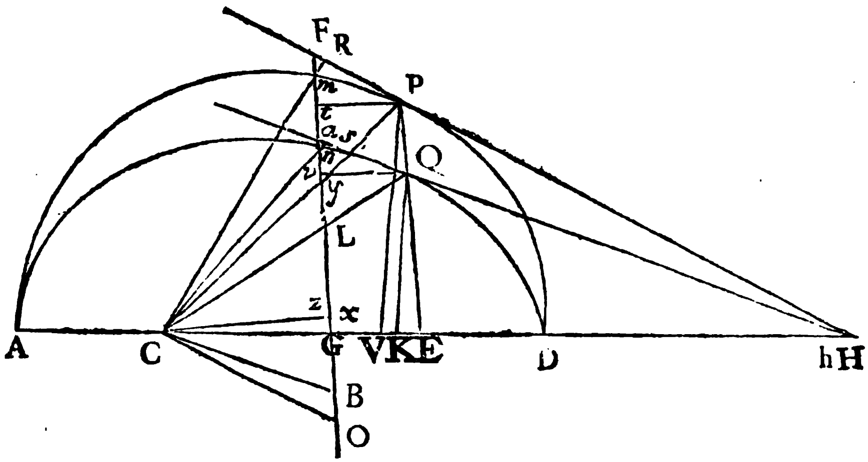


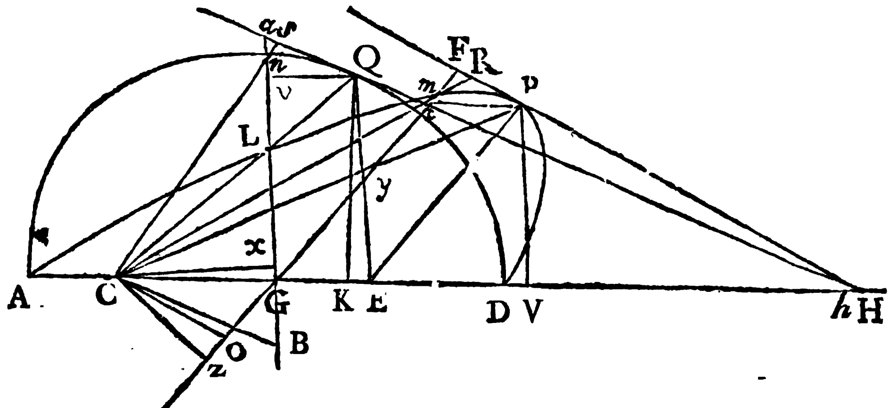
[z] 269. Sint in Hypotheſi propoſitionis XIV. duarum ſectionum conicarum arcus quam minimi PQ, pq, ſimul deſcripti, L, l, earumdem latera recta, (& per prop. VI. & Hyp.) $QR : qr = Sp^2 : SP^2$. Sed (267.) $\frac{QT^2}{QR} : \frac{qt^2}{qr} = L : l = \frac{QT^2}{Sp^2} : \frac{qt^2}{SP^2} = QT^2 \times SP^2 : qt^2 \times Sp^2$.

Sunt autem $QT \times SP$, $qt \times Sp$, ut ſectores evaneſcentes SQP, Sqp, ergò latera recta L, l, ſunt in duplicatâ ratione arearum ſimul deſcriptarum; nam areæ quævis ſimul deſcriptæ ſunt ſemper ut ſectores SQP, Sqp, ſimul deſcripti, ob æquabilem circà centrum virium S arearum deſcriptionem in utrâque ſectione conicâ. Hinc in analogiis loco quadrati areæ dato tempore deſcriptæ ſubſtitui poteſt ſectionis latus rectum & contrà, dummodo id fiat in Hypotheſi propoſitionis.

[a] 270. *Hinc Ellipſeos area tota eique proportionale rectangulum ſub axibus* (250.) *eſt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione lateris recti & ratione temporis periodici.*

DE MOTU CORPORUM.





ſectorum in utrâque figurâ numerum, æquabilem illorum deſcriptionem (prop. I.) & æqualia tempora periodica, ſectores CPm, CQn, æquali tempore deſcribentur. Quare (per prop. VI). Vires centripetæ in punctis P & Q, ſunt inter ſe ut rectæ mR, nS, punctis m & P, n & Q coeuntibus; verùm propter Parallelas QE, aG & PE, FG, eſt, $aG : FG = QE : PE$, (257) & quia nG & mG in eadem ſunt ratione, iis ex aG & FG ſubductis manent an ad Fm ſicut QE ad PE; ductis autem ex C, Parallelis CB CO ad tangentes aH FH, Triangula BCG & OGC ſunt ſimilia triangulis aGH, FGH unde eſt

$$BG : aG = GC : GH$$

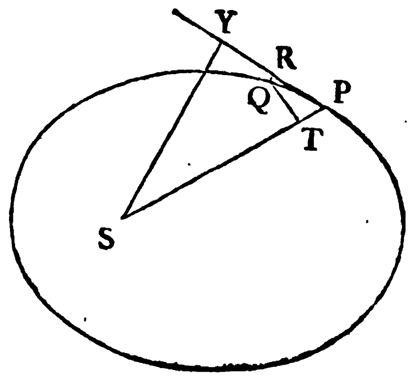
& $OG : FG = GC : GH$ ideoque $BG : OG = aG : FG = QE : PE = nG : mG$ & jungendo terminos primæ & ſecundæ rationis terminis ultimæ eſt $Bn : Om = QE : PE = an : Fm$. Denique quia ob CB, CO, Tangentibus aH FH Parallelas, ſimilia etiam ſunt Triangula, anS & nCB, FmR & mCO, eſt

$$Bn : na = Cn : Sn$$

& eſt $Fm : mO = Rm : mC$, & Compoſitis Rationibus eſt $Bn \times Fm : na \times mO = Cn \times Rm : Sn \times mC$, ſed quia $Bn : Om = an : Fm$, eſt $Bn \times Fm = an \times Om$, ergo etiam $Cn \times Rm = Sn \times mC$, ideoque $Cn : Cm = Rm : Sn$; ſive diſtantiæ à Centro in eâdem ſunt ratione ac vires Centrales.

PROPOSITIO XVI. THEOREMA VIII.

Iiſdem poſitis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demiſſiſque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod velocitates corporum ſunt in ratione compoſitâ ex ratione perpendiculorum inversè, & ſubduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè.



Ab umbilico S ad tangentem PR demitte perpendiculum SY, & velocitas corporis P erit reciprocè in ſubduplicatâ ratione quantitatis $\frac{SYq}{L}$. Nam velocitas illa eſt ut arcus quam minimus PQ in datâ temporis particulâ deſcriptus, hoc eſt (per lem. VII.) ut tangens (d) PR, id eſt, ob proportionales PR ad QT & SP ad SY, ut $\frac{SP \times QT}{SY}$, ſive ut SY reciprocè & $SP \times QT$ directè; eſtque $SP \times QT$ ut area dato tempore deſcripta, id eſt (per prop. XIV.) in ſubduplicatâ ratione lateris recti. *Q. E. D.*

Corol. 1. (e) Latera recta principalia ſunt in ratione compoſitâ ex duplicatâ ratione perpendiculorum, & duplicatâ ratione velocitatum.

Corol. 2. Velocitates corporum, in (f) maximis & minimis ab umbilico communi diſtantiis, ſunt in ratione compoſitâ ex ratione

(d) * Velocitas eſt ut tangens PR, ſed ob angulos ad T & Y rectos & angulos QPT, YPS, punctis P, Q, coeuntibus æquales, triangulum evaneſcens QPT, ſimile erit triangulo PSY, adeòque QP (PR) : QT = SP : SY, & $PR = \frac{SP \times QT}{SY}$.

(e) * Velocitatis quadratum c^2, eſt directè ut $\frac{L}{SY^2}$ (prop. XVI.) ergò L eſt ut $c^2 \times SY^2$.

(f) * Maximæ & minimæ diſtantiæ ſunt axis partes ab umbilico ad vertices principales contentæ, adeoque cùm illic axis ſit per-

X 3

ne diſtantiarum inversè, & ſubduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè. Nam perpendicula jam ſunt ipſæ diſtantiæ.

Corol. 3. (g) Ideoque velocitas in conicâ ſectione, in maximâ vel minimâ ab umbilico diſtantiâ, eſt ad velocitatem in circulo in eadem à centro diſtantia in ſubduplicatâ ratione lateris recti principalis ad duplam illam diſtantiam.

Corol. 4. (h) Corporum in ellipſibus gyrantium velocitates in mediocribus diſtantiis ab umbilico communi ſunt eædem, quæ corporum gyrantium in circulis ad eaſdem diſtantias; hoc eſt (per corol. 6. prop. IV.) reciprocè in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum. Nam perpendicula jam ſunt ſemi-axes minores, & hi ſunt ut mediæ proportionales inter diſtantias & latera recta. Componatur hæc ratio inversè cum ſubduplicatâ ratione laterum rectorum directè, & fiet ratio ſubduplicata diſtantiarum inversè.

Corol. 5. In eadem figurâ, vel etiam in figuris diverſis, quarum latera recta principalia ſunt æqualia, velocitas corporis eſt reciprocè ut perpendiculum demiſſum ab umbilico ad tangentem.

Corol. 6. (i) In parabolâ velocitas eſt reciprocè in ſubduplicatâ ratione diſtantiæ corporis ab umbilico figuræ; in ellipſi ma-

pendicularis tangenti, ipſa perpendicula ad tangentem in maximis & minimis diſtantiis ſunt ipſæ diſtantiæ; mediocres diſtantiæ ſunt diſtantiæ ab umbilico ad vertices axis minoris Ellipſeos, adeòque ſemiaxi majori æquantur.

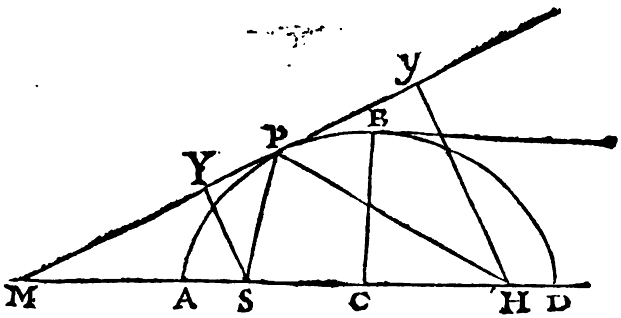
(g) * Nam circulus ille (272.) eſt ellipſis cujus latus rectum eſt ipſa diameter, ideoque eſt ipſa dupla diſtantia ab umbilico ſeu centro, quare cum eadem ponatur diſtantia tam in conicâ ſectione quàm in circulo, velocitates ſunt in ſubduplicatâ ratione laterum rectorum, hoc eſt in ſubduplicatâ ratione lateris recti ſectionis conicæ, ad duplam illam diſtantiam quæ eſt latus rectum circuli.

(h) * Sit *A* corporis in Ellipſi gyrantis mediocris diſtentia ab umbilico, ſit etiam circuli radius *A*; ſemiaxis minor, ſeu perpendicularis demiſſa ex umbilico in tangentem axi majori parallellam ſit *B*, latus rectum *L*, & circuli latus rectum (272.) erit 2 A, velocitas in Ellipſi ſit C, in circulo c, & erit (per prop. XVI.) $C^2 : c^2 = \frac{L}{B^2} : \frac{2A}{A^2} = L \times A : 2B^2$; ſed ex Conicis diſtantiâ à foco ad extremitatem ſemi axis minoris (quæ eſt mediocris diſtantia) eſt æqualis ſemiaxi majori, eſt ergo diſtantia *A* ſemiaxis major, ideoque cum ex conicis ſit $A : B = 2B : L$, eſt $2B^2 = A \times L$, ergò $C^2 = c^2$, & $C = c$.

(i) *In Parabolâ velocitas eſt reciprocè in ſubduplicatâ ratione diſtantiæ corporis ab umbilico figuræ*, cum enim velocitas ſit reciprocè ut perpendiculum demiſſum ab umbili-

magis variatur, in hyperbolâ minus quàm in hac ratione. Nam (per corol. 2. lem. XIV.) perpendiculum demiſſum ab umbilico ad tangentem parabolæ eſt in ſubduplicatâ ratione diſtantiæ. In hyperbolâ perpendiculum minus variatur, in ellipſi magis.

Co-



bilico ad Tangentem, per præced. Coroll., & (per Cor. 2. Lem. XIV.) quadratum ejus perpendiculi ſit ſemper in Parabolâ ut diſtantia à foco, erit velocitas reciproce ut radix quadrata illius diſtantiæ à foco, ſive in *ſubduplicatâ ratione diſtantiæ* &c.

276. Lemma. Sit Ellipſis A P B, cujus axis major A D, foci S & H, ſemiaxis minor B C; M y tangens in P, S Y & H y in tangentem perpendiculares; ob angulos Y P S, H P y, æquales (prop. 48. lib. 3. conic. Apoll. ſup. Theor. IV. de Ellip.) ſimilia ſunt triangula *S* P Y, H P y, undè S P : S Y := H P : H y $= \frac{SY \times HP}{SP}$, ac proindè $SY \times Hy = \frac{SY^2 \times HP}{SP}$ $= BC^2$ (ex conicis. Vid. ſup. n. 236.) ſed H P + S P = A D (prop. 52. lib. 3. conic. Apoll. ſup. Theor. III. de Ellipſi) unde eſt HP=AD−SP ergò $\frac{SY^2 \times AD - SP}{SP}$ $= BC^2$; & $SY^2 = \frac{BC^2 \times SP}{AD - SP}$. Ergò in Ellipſi, SY^2 variatur in ratione $\frac{BC^2 \times SP}{AD - SP}$ ſive ob quantitatem BC^2, conſtantem in ratione $\frac{SP}{AD - SP}$.

Creſcat diſtantia SP, minor fiet AD−SP, ſi non mutaretur denominator fractionis $\frac{SP}{AD - SP} = SY^2$, creſceret SY^2 ſicut SP, cum autem minuatur denominator S p creſcente, eo ipſo major fit valor fractionis $\frac{SP}{AD - SP}$ ergo creſcente S P, SY^2 magis creſcit quam in ſolâ ratione S P, *ergo perpendiculum in ellipſi magis variatur quam in ſubduplicatâ ratione diſtantiæ* S P.

In Hyperbolâ verò, quoniam H P − S P = A D (prop. 51. lib. 3. conic. Apoll. Theor. III. de Hyp.) & H P = A D + S P, eodem modo reperitur $SY^2 = \frac{BC^2 \times SP}{AD + PS}$, & creſcente SP, creſcit etiam AD + S P, ſi idem maneret denominator creſceret SY^2 ſicut SP, denominatore aucto, fractio $\frac{SP}{AD + SP}$ fit minor quam eo manente, ſed ea exprimit valorem quadrati perpendiculi S Y, ergo SY^2 minus creſcit quàm S P ſive *perpendiculum in Hyperbolâ minus variatur quam in ſubduplicatâ ratione diſtantiæ* S P.

277.

Corol. 7. (k) In parabolâ velocitas corporis ad quamvis ab umbilico diſtantiam eſt ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem à centro diſtantiam in ſubduplicatâ ratione numeri binarii ad unitatem; (l) in ellipſi minor eſt, in hyperbolâ major quàm in hac ratione. Nam per hujus corollarium ſecundum velocitas in vertice parabolæ eſt in hac ratione, & per corollaria ſexta hujus & propoſitionis quartæ ſervatur eadem proportio in omnibus diſtantiis. Hinc etiam in parabolâ velocitas ubique æqualis eſt velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam diſtantiam, in ellipſi minor eſt, in hyperbolâ major.

Co-

(k) 277. Sit latus rectum parabolæ L, adeóque diſtantia foci à vertice $\frac{1}{4}L$, & ex umbilico tanquam centro ac radio $\frac{1}{4}L$, deſcribatur circulus, ejus latus rectum ſeu diameter erit $\frac{1}{2}L$; undè velocitas corporis in vertice parabolæ erit ad velocitatem corporis in illo circulo revolventis ut $\sqrt{L}$ ad $\sqrt{\frac{1}{2}L}$, hoc eſt, ut $\sqrt{2}$ ad 1. (corol. 2. hujuſce Prop.) ſed per coroll. 6. velocitas in vertice parabolæ eſt ad velocitatem in aliâ quâvis ab umbilico diſtantiâ SP, ut $\sqrt{SP}$ ad $\sqrt{\frac{1}{4}L}$, & (per corol. 6. prop. IV.) velocitas in circulo cujus radius $\frac{1}{4}L$, eſt etiam ad velocitatem in alio circulo cujus radius SP, ut $\sqrt{SP}$, ad $\sqrt{\frac{1}{4}L}$; quarè velocitas in vertice parabolæ eſt ad velocitatem in eâdem parabolâ ad diſtantiam SP, ut velocitas in circulo cujus radius $\frac{1}{4}L$, ad velocitatem in circulo cujus radius eſt SP, ac proindè alternando velocitas in vertice parabolæ eſt ad velocitatem in circulo radio $\frac{1}{4}L$ deſcripto, hoc eſt, $\sqrt{2}$ ad 1, ut velocitas in parabolâ in diſtantiâ SP, ad velocitatem in circulo ad eandem à centro ſeu umbilico diſtantiam deſcripto.

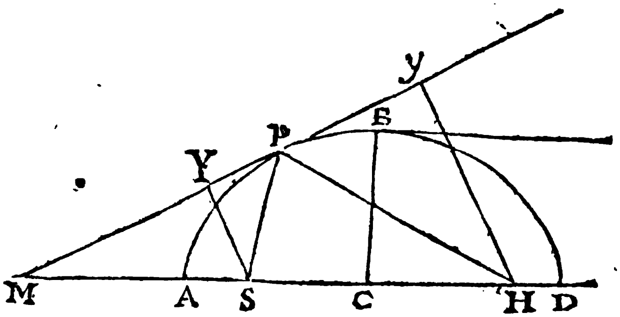
278. *Hinc etiam in parabolâ velocitas ubique æqualis eſt velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam diſtantiam*; nam velocitas in circulo cujus radius $\frac{1}{2}SP$ eſt ad velocitatem in circulo cujus radius SP, ut $\sqrt{2}$ ad 1, (per coroll. 6. prop. IV.) ſed velocitas in parabolâ ad diſtantiam SP, eſt ad velocitatem in circulo cujus radius SP, etiam ut $\sqrt{2}$. ad 1, velocitas igitur in parabolâ ad diſtantiam SP, æquatur velocitati in circulo cujus radius $\frac{1}{2}SP$.

(l) 279. *In Ellipſi velocitas corporis ad quamvis ab umbilico diſtantiam eſt ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem à centro diſtantiam in minore ratione quam* $\sqrt{2}$ *ad* 1; *in Hyperbolâ in ratione majore.* Sit enim Ellipſis vel hyperbolæ latus rectum L, diſtantia ab umbilico SP, perpendiculum ad tangentem ſectionis in puncto P demiſſum SY; SP, ſit radius circuli, c ſit velocitas in Ellipſi vel hyperbola ad diſtantiam SP; C, velocitas in circulo, & erit (per prop. XVI.) $c^2 : C^2 = \frac{L}{SY^2} : \frac{2SP}{SP^2} = L \times SP : 2SY^2$; ſed (276) $2SY^2 = \frac{2BC^2 \times SP}{AD \mp SP}$, ergo $c^2 : C^2 = L \times SP : \frac{2BC^2 \times SP}{AD \mp SP} = L \times \overline{AD \mp SP} : 2BC^2$; & ob $L \times AD = 4BC^2$ ſeu $2BC^2 = L$

Corol. 8. Velocitas gyrantis in ſectione quâvis conicâ eſt ad velocitatem gyrantis in circulo in diſtantiâ dimidii lateris recti principalis ſectionis, ut diſtantia illa ad perpendiculum ab umbilico in tangentem ſectionis demiſſum. (m) Patet per corollarium quintum.

Corol. 9. (n) Unde cum (per corol. 6. prop. IV.) velocitas gyrantis in hoc circulo ſit ad velocitatem gyrantis in circulo quovis alio reciprocè in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum; fiet ex æquo velocitas gyrantis in conicâ ſectione ad velocitatem gyrantis in circulo in eâdem diſtantiâ, ut media proportionalis inter diſtantiam illam communem & ſemiſſem principalis lateris recti ſectionis, ad perpendiculum ab umbilico communi in tangentem ſectionis demiſſum.

PRO-



$=\frac{L\times AD}{2}$, eſt $c^2 : C^2 = 2AD \mp 2SP : AD$; undè in Ellipſi in quâ 2 S P habet ſignum —, ratio c^2 ad C^2, minor eſt quam ratio 2, ad 1, & ratio c ad C, minor quam ratio $\sqrt{2}$, ad 1; in hyperbolâ major ob + 2 S P (276.)

280. Coroll. Quoniam diſtantia ab altero ſectionis foco $HP = AD \mp SP$, erit $c^2 : C^2 = 2HP : AD = HP : \frac{1}{2}AD$, hoc eſt, velocitas in Ellipſi & hyperbolâ ad quamvis ab umbilico ſeu centro virium diſtantiam S P eſt ad velocitatem in circulo ad eandem diſtantiam in ratione ſubduplicatâ diſtantiæ H P ab altero umbilico ad ſemiaxem majorem.

(m) * Nam iſte circulus & ſectio Conica idem latus rectum habent, quia in circulo diſtantia à Centro ſemi diametro æquatur & tota diameter eſt latus Rectum, ideo velocitates ſunt reciprocè ut perpendicula in Tangentem demiſſa (per Cor. 5, hujuſce) ſed in circulo ſemidiameter perpendiculo æquatur, ergo velocitates in ſectione & in circulo ſunt ut ſemi-diameter circuli ad Perpendiculum &c.

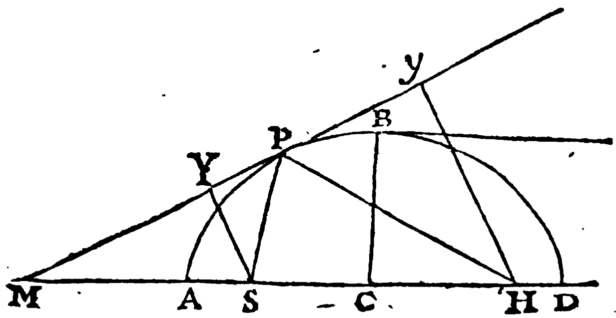
(n) 281. Sit *C* velocitas corporis gyrantis in circulo ad diſtantiam dimidii lateris recti $\frac{1}{2}L$, *c* velocitas in ſectione conicâ ad diſtantiam SP, *K* velocitas in circulo ad eandem diſtantiam SP, & erit (per coroll. 8.) $c^2 : C^2 = \frac{1}{4}L^2 : SY^2$ (& per cor. 6. prop. IV.) $C^2 : K^2 = SP : \frac{1}{2}L$, undè, ex æquo, $c^2 : K^2 = SP \times \frac{1}{4}L^2 : SY^2 \times \frac{1}{2}L = SP \times \frac{1}{2}L : SY^2$. Fiat $SP : m = m : \frac{1}{2}L$, & erit $m^2 = SP \times \frac{1}{2}L$, ac proindè $c^2 ; K^2 = m^2 : SY^2$ & $c : K = m : SY$.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IX.

Poſito quod vis centripeta ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ locorum à centro, & quod vis illius quantitas abſoluta ſit cognita; requiritur linea, quam corpus deſcribit de loco dato cum datâ velocitate ſecundum datam rectam egrediens.

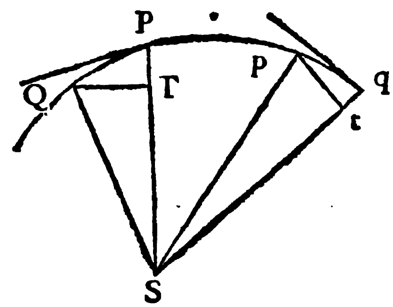
Vis centripeta tendens ad punctum S ea ſit, quâ corpus p in orbitâ quâvis datâ $p\,q$ gyretur, & cognoſcatur hujus velocitas in loco p. De loco P ſecundum lineam PR



282. Sit C, centrum Ellipſis, CB ſemiaxis minor, foci S & H, tendatque vis centripeta ad focum S; velocitas in P erit ad velocitatem in B, in ſubduplicatâ ratione diſtantiæ H P à foco H, ad diſtantiam S P ab altero foco ſeu centro virium S; Nam velocitas in P dicatur C, velocitas in B dicatur c, & erit (per cor. 5. prop. XVI.) $C:c = CB:SY$, adeóque $C^2:c^2 = CB^2:SY^2$, hoc eſt, ob $CB^2 = SY \times Hy$ (235.) $C^2:c^2 = SY \times Hy : SY^2 = Hy:SY$; ſed ob ſimilia triangula SPY, HPy, $Hy:SY = HP:SP$. Ergò $C^2:c^2 = HP:SP$, & $C:c = HP^{\frac{1}{2}} : SP^{\frac{1}{2}}$ Q. e. D.

Theorema illud invenit clariſſimus Geometra Abrahamus de Moivre.

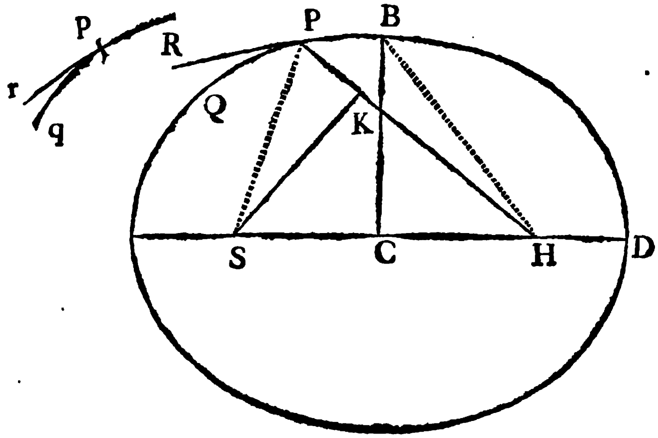
283. Velocitas angularis corporis P, in quâvis orbitâ Q P p, revolventis ſeu angulus P S Q, quem radius vector S P, dato tempore minimo deſcribit eſt directè ut Q T perpendicularis ad radium vectorem SP, & diſtantia S P inversè, dum puncta Q & P coeunt, nam linea perpendicularis Q T pro arcu circuli haberi poteſt, undè angulus $PSQ = \frac{QT}{SP}$ (153.)



284. Coroll. 1. Hinc velocitas angularis in eâdem orbitâ eſt ubique reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiæ S P à centro virium S. Nam ſectores P S Q, p S q, eodem tempuſculo deſcripti ſunt æquales (prop. I.). Undè $QT \times SP = qt \times Sp$, adeóque $QT : qt = Sp : SP$, & hinc $\frac{QT}{SP} : \frac{qt}{Sp} = \frac{Sp}{SP} : \frac{SP}{Sp} = Sp^2 : SP^2$.

285. Coroll. 2... Velocitates angulares in ſectionibus conicis circà umbilicum communem ceu centrum virium deſcriptis ſunt inter ſe ut radices quadratæ laterum rectorum principalium directè & quadrata diſ-

exeat corpus *P* cum datâ velocitate, & mox inde, cogente vi centripetâ, deflectat illud in coni ſectionem *P Q*. Hanc igitur recta *P R* tanget in *P*. Tangat itidem recta aliqua *p r* orbitam *p q* in *p*, & ſi ab *S* ad eas tangentes demitti intelligantur perpendicula, erit (per corol. 1. prop. XVI.) latus rectum principale coni ſectionis ad latus rectum principale orbitæ in ratione compoſitâ ex duplicatâ ratione perpendiculorum & duplicatâ ratione velocitatum, atque ideo datur. (a) Sit *L* coni ſectionis latus



diſtantiarum inverſè. Nam, (per prop. XIV.) Latera recta L, l, ſunt in duplicatâ ratione ſectorum P S Q, p S q, ſimul deſcriptorum, ſeu $L^{\frac{1}{2}} : l^{\frac{1}{2}} = QT \times SP : qt \times Sp$, adeóque $\frac{L^{\frac{1}{2}}}{SP} : \frac{l^{\frac{1}{2}}}{Sp} = QT : qt$; & hinc velocitates angulares ſeu anguli minimi P S Q, p S q, hoc eſt, $\frac{QT}{SP}$, $\frac{qt}{Sp}$, ſunt ut $\frac{L^{\frac{1}{2}}}{SP^2}$, $\frac{l^{\frac{1}{2}}}{Sp^2}$.

(a) Solutio hujus Problematis duas continet partes; Sit enim corpus è puncto P ſecundum lineam P R datâ cum velocitate projectum & retineatur circa punctum S per vim centripetam quæ ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ locorum à Centro cujuſque quantitas abſoluta in puncto P ſit cognita, id corpus deſcribet (per Cor. 1. Prop. XIII.) ſectionem aliquam Conicam cujus 1°. quæritur Latus Rectum principale, 2°. Dato umbilico S illius ſectionis, puncto P, Tangente PR, & latere recto quæritur alter umbilicus, quo nempe invento & ex cæteris datis deſcribetur ſectio Conica quam Corpus propoſitum percurrit.

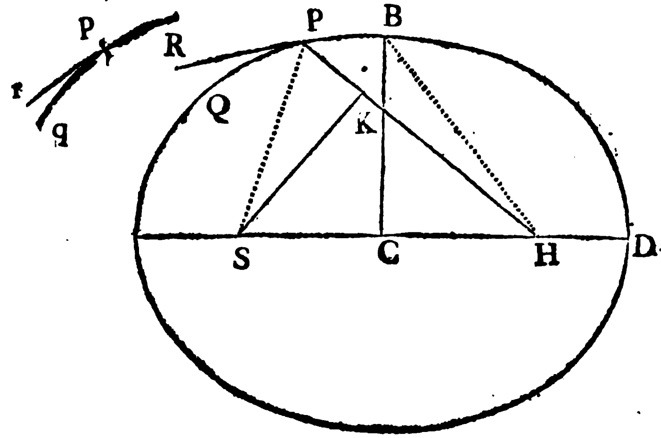
Ad primam ſolutionis partem, fingitur ſectio quælibet Conica cujus umbilicus ſit S, & alter umbilicus & latus rectum ad arbitrium ſumuntur, unde in quovis ejus puncto P duci poterit Tangens, & quantitas vis in eo puncto erit cognita, eſt enim ad vim in puncto P quæ data eſt reciprocè ut quadrata linearum S p, S P; Invenietur etiam velocitas in eo puncto p; Nam velocitas corporis gyrantis in circulo ad diſtantiam S p (ſive arcus in eo deſcriptus tempore quo arcus PQ deſcribitur) eſt media proportionalis inter vim centripetam in p, quæ inventa eſt, & duplam diſtantiam S p (per naturam circuli), hæc verò eſt ad velocitatem in hâc Sectione Conicâ, ut perpendiculum ab S ad Tangentem communem demiſſum ad mediam proportionalem inter diſtantiam S p & ſemiſſem lateris Recti iſtius ſectionis.

Cum ergo (per Cor. 1. Prop. XVI.) *Latera Recta principalia ſectionum circà umbilicum communem deſcriptarum ſint in ratione compoſitâ ex duplicatâ ratione perpendiculorum & duplicatâ ratione velocitatum* & ob datas Tangentes in p & P dentur perpendicula ex S in eas Tangentes demiſſa, deturque Velocitas corporis moti in P & inventa ſit velocitas in puncto p, datur ratio Lateris

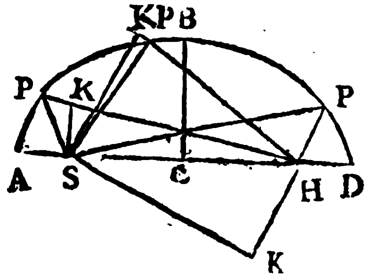
 Recti

De Motu Corporum.

rectum. Datur præterea ejuſdem coni ſectionis umbilicus S. Anguli RPS complementum ad duos rectos fiat angulus RPH; & dabitur poſitione linea PH, in quâ umbilicus alter H locatur. Demiſſo ad PH perpendiculo SK, erigi intelligatur ſemiaxis conjugatus BC, (b) & erit $SPq - 2KPH + PHq = SHq = 4CHq = 4BHq - 4BCq = \overline{SP+PH}: quad. - L \times \overline{SP+PH}$ (c) $= SPq + 2SPH + PHq - L \times \overline{SP+PH}$. Addantur utrobique $2KPH - SPq - PHq + L \times \overline{SP+PH}$, & fiet $L \times \overline{SP+PH} = 2SPH + 2KPH$, ſeu $SP+PH$ ad PH ut $2SP + 2KP$ ad L. Unde datur PH tam longitudine quam poſitione. Nimirum ſi ea ſit corporis in P velocitas, ut latus rectum L minus fuerit quam $2SP + 2KP$, jacebit PH ad eandem partem tangentis PR



Recti ſectionis aſſumptæ ad Latus Rectum ſectionis quam corpus P deſcribit; Quod ergo invenitur, eratque primum.



(b) *Erit* $SP^2 - 2KP \times PH + PH^2 = SH^2$; Etenim (per 12. & 13. 2. Elem.) in omni Triangulo SPH, quadratum lateris SH quod conſideratur ut Hypothenuſa anguli P, æquatur quadratis aliorum laterum SP PH dempto duplo Rectanguli lateris PH in quod cadit perpendiculum, ducti in partem PK ab Angulo P ad perpendiculum uſque interceptam, quæ quidem PK ſumitur cum ſigno + ſi ſit ab eâdem parte Tangentis ac S & cum ſigno − ſi ſit in parte oppoſitâ.

(c) 287. $SH^2 = 4CH^2 = 4BH^2 - 4BC^2$ &c. Ex naturâ Ellipſeos eſt $2BH$ æqualis axi majori $2AC$ ideoque æqualis $SP + PH$ & $4BH^2 = \overline{SP+PH}^2$, pariter eſt $2AC : 2BC = 2BC : L$ eſt ergo $4BC^2 = L \times 2AC$ ſive $L \times \overline{SP+PH}$ unde eſt $4BH^2 - 4BC^2 = \overline{SP+PH}^2 - L \times \overline{SP+PH}$.

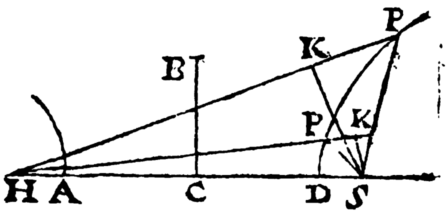
Collatis itaque valoribus ejuſdem quantitatis SH^2, eſt $SP^2 - 2KP \times PH + PH^2 = SP^2 + 2SP \times PH + PH^2 - L \times \overline{SP+PH}$, utrinque detractis æqualibus manet $-2KP \times PH = 2SP \times PH - L \times \overline{SP+PH}$ transpoſitiſque partibus negativis eſt $L \times \overline{SP+PH} = 2SP \times PH + 2KP \times PH$ ſive $\overline{2SP+2KP} \times PH$ unde eſt $2SP + 2KP : L = SP + PH : PH$ & dividendo $2SP + 2KP - L : L = SP : PH$ unde

cum linea PS; ideoque figura erit ellipſis, & ex datis umbilicis S, H, & axe principali $SP+PH$, dabitur. Sin tanta ſit corporis velocitas ut latus rectum L æquale fuerit $2SP+2KP$, longitudo PH infinita erit; & propterea figura erit parabola axem habens SH parallelum lineæ PK, & inde dabitur. Quod ſi corpus majori adhuc cum velocitate de loco ſuo P exeat, capienda erit longitudo PH ad alteram partem tangentis; ideoque tangente inter umbilicos pergente, figura erit hyperbola axem habens principalem æqualem differentiæ linearum SP & PH, & inde dabitur. Nam ſi corpus in his caſibus revolvatur in conicâ ſectione ſic inventâ, demonſtratum eſt in prop. XI, XII, & XIII, quod vis centripeta erit ut quadratum diſtantiæ corporis à centro virium S reciprocè; ideoque linea PQ rectè exhibetur, quam corpus tali vi deſcribet, de loco dato P, cum datâ velocitate, ſecundum rectam poſitione datam PR egrediens. *Q.E.F.*

Corol. 1. Hinc in omni coni ſectione ex dato vertice principali D, latere recto L, & umbilico S, datur umbilicus alter H capiendo DH ad DS ut eſt latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4DS$. (d) Nam proportio $SP+PH$ ad PH ut $2SP+2KP$ ad L in caſu hujus corollarii, fit $DS+DH$ ad DH ut $4DS$ ad L, & diviſim DS ad DH ut $4DS-L$ ad L.

unde quo magis accedit valor lateris recti L ad quantitatem $2SP+2KP$, eo major eſt PH reſpectu SP, ſi $L=2SP+2KP$, infinitum eſt SP reſpectu PH, hoc eſt, Ellipſis abit in Parabolam, ſi L ſit majus quam $2SP+2KP$, primus terminus Proportionis fit negativus, ideoque PH in partem oppoſitam Tangentis cadet & ſectio fiet Hyperbola; manentibus autem cæteris creſcit Latus Rectum cum velocitate in puncto P datâ: Unde quo major ſit velocitas reſpectu vis centripetæ eo magis elongatur Ellipſis quam deſcribit corpus propoſitum vel etiam in Parabolâ movetur, & tandem in Hyperbolâ.

288. *Demonſtratio* pro Hyperbolâ ita inſtituitur: Quia PK non eſt in eâdem parte Tangentis ac S, ſumitur PK cum ſigno $-$ ideoque eſt $SH^2=SP^2+2KP\times PH+PH^2$; & per naturam Hyperbolæ $SH^2=4CH^2=4CA^2+4CB^2$ ſive quia $2CA=PH-SP$ & $4CB^2=L\times 2CA$ eſt $SH^2=PH^2-2SP\times PH+SP^2+L\times\overline{PH-SP}$ unde collatis valoribus SH^2 & detractis quantitatibus communibus eſt $2KP\times PH=-2SP\times PH+L\times\overline{PH-SP}$ & tranſpoſitis quantitatibus negativis eſt $2KP\times PH+2SP\times PH=L\times\overline{PH-SP}$ unde eſt $2SP+2KP:L=PH-SP:PH$, & convertendo $L-2SP-2KP:L=SP:PH$.



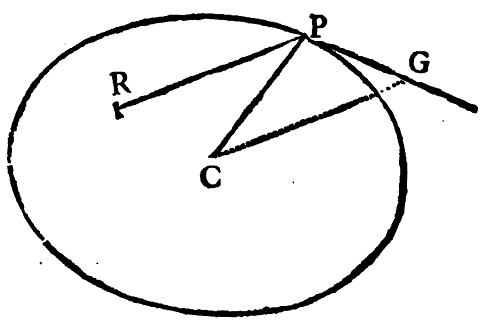
(d) 289. In caſu hujus corollarii punctum P cadit in D, punctum K cadit in S, fitque $PK=DS=SP$, & $PH=DH$. Quare in omni ſectione conicâ eſt DH, ad DS, ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4DS$.

Corol. 2. Unde ſi datur corporis velocitas in vertice principali D, invenietur orbita expeditè, capiendo ſcilicet latus rectum ejus ad duplam diſtantiam DS, in duplicatâ ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in circulo ad diſtantiam DS gyrantis (per corol. 3. prop. XVI.); dein DH ad DS ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4\,DS$.

Corol. 3. Hinc etiam ſi corpus moveatur in ſectione quâcunque conicâ, & ex orbe ſuo impulſu quocunque exturbetur; cognoſci poteſt orbis, in quo poſtea curſum ſuum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo, quem impulſus ſolus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulſus loco, ſecundum rectam poſitione datam, exibit.

Corol. 4. Et ſi corpus illud vi aliquâ extrinſecus impreſſâ continuo perturbetur, innoteſcet curſus quam proximè, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibuſdam inducit, & ex ſeriei analogiâ mutationes continuas in locis intermediis æſtimando.

Scholium.



Si corpus P vi centripetâ ad punctum quodcunque datum R tendente moveatur in perimetro datæ cujuſcunque ſectionis conicæ, cujus centrum ſit C; & requiratur lex vis centripetæ: ducatur CG radio RP parallela, & orbis tangenti PG occurrens in G; & (e) vis illa (per corol. 1. & ſchol. prop. X. & corol. 3. prop. VII.) erit ut $\frac{CG\ cub.}{RP\ quad.}$

(e) 290. Vis ad centrum vel à centro C, tendens eſt ut CP, (per coroll. 1. Prop. X. & Not. 232.) adeòque exponatur per lineam CP; vis ad punctum R, tendens exponatur per lineam A, & (per corol. 3. prop. VII.) erit $CP \times RP^2$; $CG^3 = CP : A = \frac{CG^3}{RP^2}$.

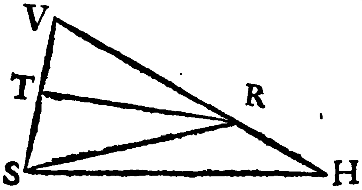
Si

SECTIO IV.

De inventione orbium ellipticorum, parabolicorum & hyperbolicorum ex umbilico dato.

LEMMA XV.

Si ab ellipſeos vel hyperbolæ cujuſvis umbilicis duobus S, H, *ad punctum quodvis tertium* V *inflectantur rectæ duæ* SV, HV, *quarum una* HV *æqualis ſit axi principali figuræ, id eſt, axi in quo umbilici jacent, altera* SV *à perpendiculo* TR *in ſe demiſſo biſecetur in* T; *perpendiculum illud* TR *ſectionem conicam alicubi tanget: & contra, ſi tangit, erit* HV *æqualis axi principali figuræ.*

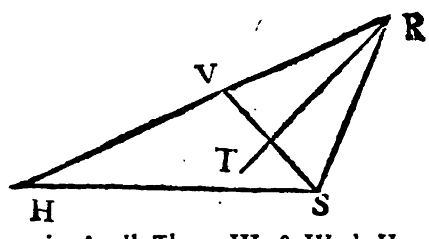


Secet enim perpendiculum *TR* rectam *HV* productam, ſi opus fuerit, in *R*; & jungatur *SR*. Ob æquales *TS*, *TV*, æquales erunt & rectæ *SR*, *VR* & anguli *TRS*, *TRV*. (f) Unde punctum *R* erit ad ſectionem conicam, & perpendiculum *TR* tanget eandem & contra. *Q. E. D.*

PRO-

(f) * Si fuerint S, & H, Ellipſeos umbilici, erit $SR + RH = HV =$ axi majori, ac proinde R punctum perimetri Ellipſis quam TR tangit in R, ob angulos TRS, TRV, æquales (per prop. 52. & 46. lib. 3. conic. Apollon. Theor. III. & IV. de El.) & contrà ſi TR tangat Ellipſim in R, & ducatur SV, ad TR perpendicularis, erit ob angulos TRS, TRV, æquales $VR = SR$, & $VH = SR + RH =$ axi majori.

* Si fuerint S, & H, Hyperbolæ umbilici ob æquales TS, TV, erit $SR = VR$, & $HR - SR = HV$ æqualis axi majori, & R punctum Hyperbolæ quam tangit in R recta TR ob angulos VRT, TRS, æquales (per prop. 51. & 46. lib. 3. conic. Apoll. Theor. III. & IV. de Hyperb.) & contrà ſi TR tangat Hyperbolam in R, & agatur SV ad TR perpendicularis erit $VR = SR$, & $HV = HR - RS$, æqualis axi majori, ut patet.



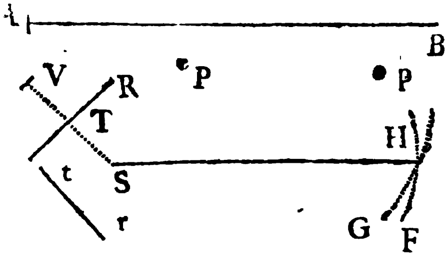
Si

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA X.

Datis umbilico & axibus principalibus deſcribere trajectorias ellipticas & hyperbolicas, quæ tranſibunt per puncta data, & rectas poſitione datas contingent.

Sit S communis umbilicus figurarum; AB longitudo axis principalis trajectoriæ cujuſvis; P punctum per quod trajectoria debet tranſire; & TR recta quam debet tangere. Centro P intervallo $AB-SP$, ſi orbita ſit ellipſis, vel $AB+SP$, ſi ea ſit hyperbola, deſcribatur circulus HG. Ad tangentem TR demittatur perpendiculum ST, & producatur idem ad V, ut ſit TV æqualis ST; centroque V & intervallo AB deſcribatur circulus FH. Hac methodo ſive dentur duo puncta P, p, ſive duæ tangentes TR, tr, ſive punctum P & tangens TR, deſcribendi ſunt circuli duo. Sit H eorum interſectio communis, & umbilicis S, H, axe illo dato deſcribatur trajectoria. Dico factum. Nam trajectoria deſcripta (eo quod $PH+SP$ in ellipſi, & $PH-SP$ in hyperbola æquatur axi) tranſibit per punctum P, & (per lemma ſuperius) tanget rectam TR. Et eodem argumento vel tranſibit eadem per puncta duo P, p, vel tanget rectas duas TR, tr. (g) *Q. E. F.*



PROPOSITIO XIX. PROBLEMA XI.

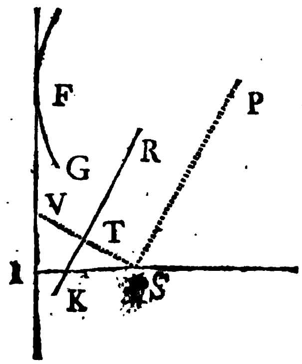
Circa datum umbilicum trajectoriam parabolicam deſcribere, quæ tranſibit per puncta data, & rectas poſitione datas continget.

Sit S umbilicus, P punctum & TR tangens trajectoriæ deſcribendæ. Centro P intervallo PS deſcribe circulum FG. Ab um-

* (g) Si orbita ſit Hyperbola, focus H, erit in rectâ H S, ultra S, productâ.

291.

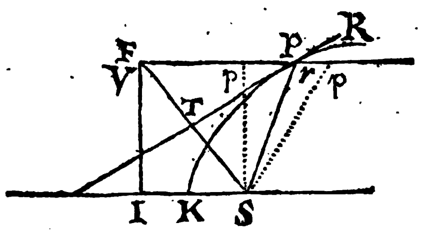
umbilico ad tangentem demitte perpendicularem *ST*, & produc eam ad *V*, ut ſit *TV* æqualis *ST*. Eodem modo deſcribendus eſt alter circulus *fg*, ſi datur alterum punctum *p*; vel inveniendum alterum punctum *v*, ſi datur altera tangens *tr*; dein ducenda recta *IF* quæ tangat duos circulos *FG*, *fg* ſi dantur duo puncta *P*, *p*, vel tranſeat per duo puncta *V*, *v*, ſi dantur duæ tangentes *TR*, *tr*, vel tangat circulum *FG* & tranſeat per punctum *V*, ſi datur punctum *P* & tangens *TR*. Ad *FI* demitte perpendicularem *SI*, eamque biſeca in *K*; & axe *SK*, vertice principali *K* deſcribatur parabola. Dico factum. (h) Nam parabola, ob æquales *SK*&*IK*, *SP*&*FP*, tranſibit per punctum *P*; & (per lem. XIV. corol. 3.) ob æquales *ST*&*TV* & angulum rectum *STR*, tanget rectam *TR*. *Q. E. F.*



PRO-

(h) 291. *Nam Parabola ob æquales SK & IK, SP & FP, tranſibit per punctum P* ſcilicet Parabola deſcripta *ob æquales SK & IK* habet pro directrice lineam IF (per Theor. II. de Parab. n. 224. de Conicis), cum verò diſtantia puncti cujuſvis Parabolæ à Directrice ſit æqualis diſtantiæ ejus puncti à foco, vice verſâ, punctum quod æqualiter à foco & à Directrice diſtabit pertinebit ad Parabolam, Finge enim lineam FP Directrici perpendicularem occurrere quidem Parabolæ in puncto P, ita ut ſit FP=SP, ſed in eâ poſſe ſumi aliud punctum p ita ut ſit etiam Sp=Fp=FP±Pp, erit ob FP=SP, Sp=SP±Pp ſed cum SPp ſit Triangulum, abſurdum eſt (per 20. 1. Elem.) eſſe Sp=SP±Pp ergo abſurdum eſt fingere aliud Punctum præter id quod ad Parabolam pertinet tale ut ejus diſtantiâ à directrice ſit æqualis ejus diſtantiæ à foco, ergo *ob æquales SP & FP*, Parabola cujus directrix eſt IF & umbilicus S *tranſibit per punctum P*.

2us. Caſus. Parabola deſcripta *ob æquales ST, TV, ob angulum Rectum STR tanget rectam* TR, ejus enim Parabolæ deſcriptæ directrix eſt VI. Jam verò ducatur ex V perpendicularis in directricem quæ rectæ TR occurrat in r & ab r ducatur ad focum linea rS, ob æquales ST TV & angulum rectum STR erit Vr=rS & punctum r ad Parabolam pertinebit per ſuperiorem demonſtrationis partem, eâdem ratione probabitur angulum VrT æqualem eſſe angulo TrS ideoque linea Tr bifariam dividit angulum VrS, ſed ea linea Parabolæ Tangens eſt quæ bifariam dividit angulum quem faciunt duæ lineæ ductæ à puncto quovis Parabolæ una ad focum altera perpendiculariter ad directricem (per Theor. III. de Parabola n. 224.) ergo linea TR tangit Parabolam deſcriptam ſive *Parabola deſcripta tanget Rectam TR*.

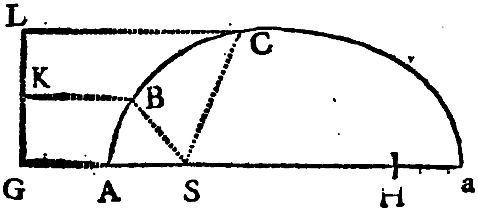


292.

PROPOSITIO XX. PROBLEMA XII.

Circa datum umbilicum trajectoriam quamvis ſpecie (i) *datam deſcribere, quæ per data puncta tranſibit & rectas tanget poſitione datas.*

Caſ. 1. Dato umbilico *S*, deſcribenda ſit trajectoria *ABC* per puncta duo *B*, *C*. Quoniam trajectoria datur ſpecie, dabitur ratio axis principalis ad diſtantiam umbilicorum. In ea ratione cape *KB* ad *BS*, & *LC* ad *CS*. Centris *B*, *C*, intervallis *BK*, *CL*, deſcribe circulos duos, & ad rectam *KL*, quæ tangat eoſdem in *K* & *L*, demitte perpendiculum *SG*, idemque ſeca in *A* & *a*, ita ut ſit *GA* ad *AS* & *Ga* ad *aS* ut eſt *KB* ad *BS* & axe *Aa*, verticibus *A*, *a*, deſcribatur trajectoria. Dico factum. Sit enim *H* umbilicus alter figuræ deſcriptæ, & cum ſit *GA* ad *AS* ut *Ga* ad *aS*, erit diviſim *Ga*−*GA* ſeu *Aa* ad *aS*−*AS* ſeu *SH* in eâdem ratione, ideoque in ratione quam habet axis principalis figuræ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus; (k) & propterea figura deſcripta eſt ejuſdem ſpeciei cum deſcribenda. (l) Cumque ſint *KB* ad *BS* & *LC* ad *CS* in eâdem ratione, tranſibit hæc figura per puncta *B*, *C*, ut ex conicis manifeſtum eſt.



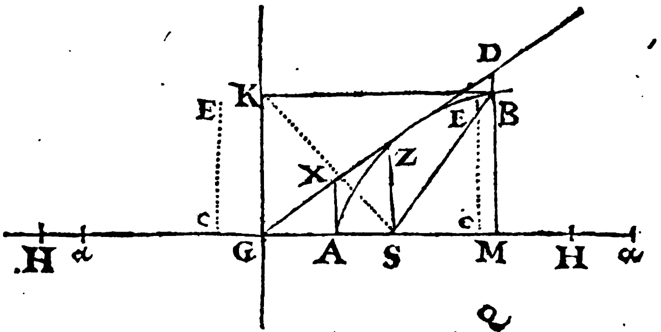
(i) 292. Sectiones conicæ ſunt ejuſdem ſpeciei ſeu ſimiles quarum axes duo, vel quod idem eſt, axis major & focorum diſtantia ſunt inter ſe in datâ ratione; Ex hâc enim ratione unicè pendent partium ſectionis ratio ac reſpectiva poſitio, atque hinc fit ut parabolæ omnes ſimiles ſint quod in omnibus focorum diſtantia infinita majori axi æqualis ſit.

(k) * Si deſcribenda ſit hyperbola, punctum a, ſumi debet in perpendiculo SG, ad alteram partem lineæ GL, producto ut ſit G, inter A, & a, tumque erit Ga + GA, ſeu Aa ad aS + AS, ſeu SH, in ratione GA ad AS, adeóque in ratione quam habet axis principalis hyperbolæ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus, & propterea hyperbola deſcripta ſimilis eſt hyperbolæ deſcribendæ.

(l) Ut demonſtretur *puncta B & C ad Sectionem Conicam deſcriptam pertinere* quædam prævia ex Conicis ſunt uſurpanda.

293. Lemma... Sit ſectionis conicæ AZB, axis major A a, foci S, H, ſemiaxis minor c E erectâ ad axem perpendiculari SZ per punctum Z, ducatur tangens D Z G quæ axi occurrat in G; tum ex punctis G, A, & quovis alio axis puncto M, erigantur ad axem perpendiculares G K, A X, M B D, & ex puncto ſectionis B, ducatur ad GK, perpendicularis BK, erit 1°. $SZ = \frac{1}{2} L$, ſeu dimidio lateri recto, etenim ordinata in foco eſt ſemper æqualis ſemilateri Recto, (per Theor. III. de Ell. & Hyp. & Cor. 2. Theor. I. de Parab. n. 224.)

294



294. 2°. Erit. GA ad AS ſicut axis major ad diſtantiam focorum, hoc eſt $GA:AS=Aa:SH$; Nam cum G ſit punctum in quo Tangens ſecat Diametrum, ejus diſtantiæ GA, Ga, ab utroque vertice ſunt inter ſe ſicut abſciſſæ AS Sa ab utroque vertice Diametri ſumptæ, ſive eſt (per Lem. V. de Conic. n. 224.) $GA:Ga=AS:Sa$ & convertendo $GA:Aa=AS:Sa-AS$ ſive SH (quia $AS=Ha$) ergo alternando $GA:AS=Aa:SH$.

295. 3°. Erit factum $GS\times Sc$ æquale quadrato ſemi axis minoris, nam quia eſt $GA:AS=Aa:SH$, eſt componendo $GS:AS=SH+Aa:SH$, & ſumendo dimidium terminorum ultimæ rationis eſt $GS:AS=Sc+ca$ (ſive Sa)$:Sc$, eſt ergo $GS\times Sc=AS\times Sa$, ſed factum $AS\times Sa$, (partium ab uno foco ad utrumque axis majoris verticem ſumptarum) eſt ſemper æquale quadrato ſemi axis minoris, nam id factum æquatur in Ellipſi cA^2-cS^2 (per 5. 2. Elem.) & in Hyperbola cS^2-cA^2 (per 6. 2. Elem.) utrumque verò æquatur quadrato ſemi axis minoris per naturam focorum (Theor. III. de Hyper. & Ellip. 224.) eſt ergo $GS\times Sc=cE^2$.

296. 4°. Perpendicularis AX in axis Vertice A erecta & terminata ad Tangentem in extremitate Z ordinatæ quæ inſiſtit foco S eſt æqualis AS diſtantiæ foci à Vertice... Nam cum ob Triangula ſimilia XGA ZGS ſit $GA:AX=GS:SZ$ ſive $\frac{1}{2}L=\frac{2cE^2}{2cA}$ & ſit $cE^2=GS\times Sc$ eſt $GA:AX=GS:\frac{GS\times Sc}{cA}=cA:Sc$ (& duplicando hos terminos) $=Aa:SH$, ſed in eadem ratione eſt GA ad AS (294) ergo $GA:AX=GA:AS$ & $AX=AS$.

In Parabolâ idem verum eſt, in ea enim eſt $GA=AS$, $GS=2AS$ & $SZ=\frac{1}{2}L=2AS$ (Cor. I. Lem. V. de Coni. 224). Ergo hæc proportio $GA:AX=GS:SZ$ in hanc mutatur $AS:AX=2AS:2AS$ ergo $AS=AX$.

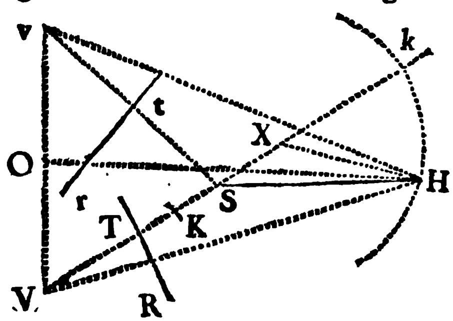
297. 5°. Linea à foco S, ad curvæ punctum quodvis B ducta eſt æqualis lineæ DM, quæ per id punctum tranſit, & perpendiculariter ad axim ducitur, terminaturque hinc ab axi, illinc à Tangente GZ Producenim DM ad Q ubi iterum occurrit Sectioni Conicæ ſitque $MQ=BM$, erit (per Cor. 2. Lem. III. de Conic. n. 224.) $ZX^2:ZD^2=AX^2:DM\times DP$ (ſive DM^2-BM^2 per 6. 2. Elem.) ſed ob Parallelas AX, SZ, MD eſt $ZX:ZD=AS:SM$ & $ZX^2:ZD^2=AS^2:SM^2$. Ergo eſt $AS^2:SM^2=AX^2$ (ſive AS^2 per 296)$:DM^2-BM^2$ unde eſt $SM^2=DM^2-BM^2$ & addendo utrinque BM^2, SM^2+BM^2 (ſive SB^2 per 47. 1. Elem.) $=DM^2$ & $SB=DM$.

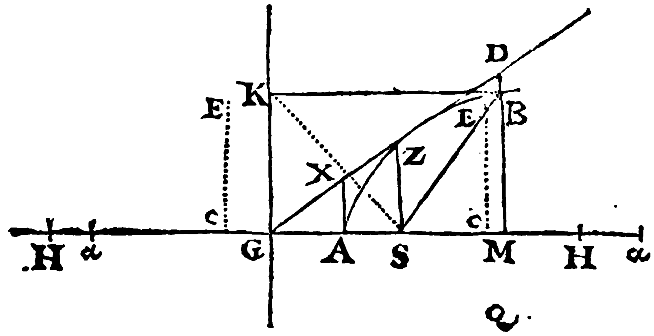
298. 6°. Si ex ſectionis quovis puncto B, ducatur perpendicularis BK ad lineam GK, & linea BS ad focum, erit ſemper $KB:BS=GA:AS$, nam propter Triangula ſimilia GMD GAX, eſt GM (ſive KB ob Parallelas GM & KB, GK & MB)$:MD$ (ſive BS per 297) $=GA:AX$ (ſive AS per 296) hoc eſt $KB:BS=GA:AS$ ideoque $KB:BS=Aa:SH$ quoniam $GA:AS=Aa:SH$ (per 294).

299. Converſa etiam vera eſt ſi ducatur perpendicularis in lineam GK, & in ea ſumatur B, ita ut ſit $KB:BS=GA:AS=Aa:SH$ punctum B eſt in Sectione Conicâ deſcriptâ.

Sit enim Sectio Hyperbola aut Parabola, illa in unico puncto B ſecabitur per lineam KB, eritque (per 298) $KB:BS=Aa:SH$, dico autem nullum aliud punctum β ſumi poſſe in ea linea KB producta ſi lubet, ita ut ſit $KB:BS=Aa:SH$, fingatur enim dari illud punctum β, ſubtrahanturque termini duarum priorum rationum à ſe mutuo, erit $KB-K\beta$ (ſive $B\beta$)$:BS-\beta S=Aa:SH$ ſed quia in Hyperbola eſt Aa, minor quam SH, & in Parabola ei eſt æqualis, erit $B\beta$ minor

Caſ. 2. Dato umbilico *S*, deſcribenda ſit trajectoria quæ rectas duas *TR*, *tr* alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte perpendicula *ST*, *St* & produc eadem ad *V*, *v*, ut ſint *TV*, *tv*, æquales *TS*, *tS*. Biſeca *Vv* in *O*, & erige perpendiculum infinitum *OH*, rectamque *VS* infinite productam ſeca in *K* & *k*, ita ut ſit *VK* ad *KS* & *Vk* ad *kS* ut eſt trajectoriæ deſcribendæ





nor aut æqualis differentiæ $SB - S\beta$, ſed $SB\beta$ eſt Triangulum, ergo abſurdum eſt (per 20. 1. Elem.) unum ejus latus ut $B\beta$ eſſe minus aut æquale differentiæ aliorum, non datur ergo punctum illud β.

2°. Sectio ſit Ellipſis; Ducatur SK; ſi GK ſit æqualis ſemi axi minori, erit SK : GK = Aa : SH nam (per 295) eſt GS : cE (ſive GK ex Hyp.) = cE : Sc & $GS^2 : GK^2 = cE^2 : Sc^2$, & componendo $GS^2 + GK^2$ (ſive SK^2 per 47. 1. Elem.) : $GK^2 = cE^2 + Sc^2$ (ſive cA^2 per nat. focorum) : Sc^2 & SK : GK = cA : Sc & duplicando terminos poſterioris rationis eſt SK : GK = Aa : SH.

Si GK ſit major quam cE erit $GS^2 : GK^2$ in minori ratione quam cE^2 ad Sc^2, & componendo erit $GS^2 + GK^2$ ſive SK^2 ad GK^2 in minori ratione quam $cE^2 + Sc^2$ ad Sc^2 unde tandem deducetur in hoc caſu eſſe SK ad GK in minori ratione quam Aa ad SH.

Et pariter ſi GK ſit minor quam cE, erit SK ad GK in majori ratione quam Aa ad SH.

Sed (per princ. Trigo.) eſt in Triang. SKG, ſinus totalis ad ſinum ang. KSG (ſive ad ſinum anguli SKB huic æqualem ob Parallelas GS KB) ſicut KS ad KG. Ergo ratio ſinus totalis ad ſin Ang. SKB, æqualis eſt rationi Aa ad SH, ſi GK ſit æqualis cE, eſt illâ minor ſi GK ſuperet cE, eſt illa major ſi GK minor ſit quam cE.

Ut verò lineæ KB BS habeant rationem Aa ad SH, oportet ut in Triang. KBS, ſinus angulorum KSB SKB ſint in eâ ratione Aa ad SH; Ergo ſi GK ſit æqualis cE, eſt Sinus totalis: Sin. SKB = Sin. KSB : Sin. SKB, ideoque in hoc caſu erit Sin. tot. = Sin. KSB, hoc eſt, linea SB erit perpendicularis in SK, unica ergo erit, unicumque punctum B, ſicut etiam linea KB in unico puncto Sectioni Conicæ occurret.

Si GK ſit major cE eſt ſin. totalis ad ſin. SKB in minori ratione quam ſin. KSB ad ſin. SKB, unde ſinus totalis minor eſſe deberet ſinu KSB quod quidem eſt abſurdum, nul-

axis principalis ad umbilicorum diſtantiam. Super diametro Kk deſcribatur circulus ſecans OH in H, & umbilicis S, H, axe principali ipſam VH æquante, deſcribatur trajectoria. Dico factum. Nam biſeca Kk in X, & junge HX, HS, HV, Hv. Quoniam eſt VK ad KS ut Vk ad kS; & compoſite ut $VK+Vk$ ad $KS+kS$; diviſimque ut $Vk-VK$ ad $kS-KS$, id eſt, (m) ut $2VX$ ad $2KX$ & $2KX$ ad $2SX$, ideoque ut VX ad HX & HX ad SX, ſimilia erunt triangula VXH, HXS, & propterea VH erit ad SH ut VX ad XH, ideoque ut VK ad KS. Habet igitur trajectoriæ deſcriptæ axis principalis VH eam rationem ad ipſius umbilicorum diſtantiam SH, quam habet trajectoriæ deſcribendæ axis principalis ad ipſius umbilicorum diſtantiam, & propterea ejuſdem eſt ſpeciei. Inſuper cum VH, vH æquentur axi principali, & VS, vS à rectis TR, tr perpendiculariter biſecentur, liquet (ex lem. xv.) rectas illas trajectoriam deſcriptam tangere. *Q. E. F.* (n)

Caſ.

nulla ergo duci poteri linea SB quæ determinet punctum B tale ut ſit KB ad SB ſicut A a ad SH, ſicut etiam in eo caſu linea KB nullibi occurrit Sectioni Conicæ.

Denique ſi GK ſit minor c E, eſt ſin. tot. ad ſin. SKB in majori ratione quam ſinus KSB ad ſin. SKB, dabitur ergo ſinus KSB, ſed ut ad acutum vel obtuſum angulum æqualiter pertinet duæ duci poterunt lineæ SB (ſed non plures) quæ requiſitam cum KB habeant rationem, ut etiam linea KB hoc in caſu duobus in punctis Ellipſim ſecat.

Ergo ſi KB : BS = GA : AS = A a : SH punctum B eſt in Sectione Conicâ.

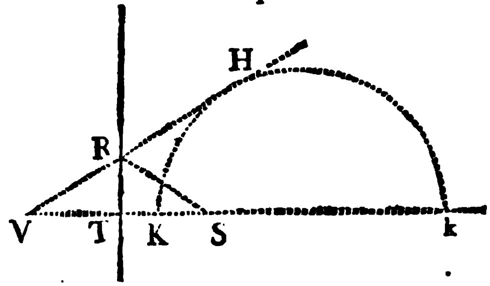
Ex his autem liquet curvam ſecundum Newtonianam ſolutionem deſcriptam tranſire per puncta B & C omnia enim planè conveniunt ad Lemmatis (193) Hypotheſim.

In iis omnibus parabolam uſurpamus pro ellipſi in quâ diſtantia focorum infinita eſt, ac proindè axi majori æqualis.

(m) * *Id eſt, ut $2VX$ ad $2KX$, & $2KX$ ad $2SX$;* nam KX = kX = HX (per conſtr.) adeóque VK + Vk = 2 VK + 2 KX = 2 VX, & KS + kS = Kk = Vk − VK = 2 KX; & quia kS − KS = kX + SX = KX + SX = KS + 2 SX, erit kS − KS = 2 SX, adeóque VK : KS = VX : HX = HX : SX. Quarè ſimilia erunt triangula VXH, HXS, quorum latera VX & XH, HX & KS, proportionalia communem angulum X, complectuntur.

(n) * Si deſcribenda ſit hyperbola, in SV, versùs V productâ, ità ſumantur puncta K, k, ut inter utrumque poſitum ſit V, cæteraque fiant ut Newtonus præſcribit, & quoniam VK : KS = Vk : kS, erit Vk − VK : kS − KS = VK : KS = VK + Vk : KS + kS, ſed Vk − VK = 2 VX, kS − KS = 2 KX, VK + Vk = 2 KX, & KS + kS = 2 SX. Reliqua demonſtratio eadem eſt ac pro ellipſi.

Caſ. 3. Dato umbilico *S* deſcribenda ſit trajectoria quæ rectam *TR* tanget in puncto dato *R*. In rectam *TR* demitte perpendicularem *ST*, & produc eandem ad *V*, ut ſit *TV* æqualis *ST*. Junge *VR* & rectam *VS* infinite productam ſeca in *K* & *k*, ita ut ſit *VK* ad *SK* & *Vk* ad *Sk* ut ellipſeos deſcribendæ axis principalis ad diſtantiam umbilicorum; circuloque ſuper diametro *Kk* deſcripto ſecetur producta recta *VR* in *H*, & umbilicis *S*, *H*, axe principali rectam *VH* æquante, deſcribatur trajectoria. Dico factum. Namque *VH* eſſe ad *SH* ut *VK* ad *SK* atque ideo ut axis principalis trajectoriæ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus, (o) patet ex demonſtratis in caſu ſecundo, & propterea trajectoriam deſcriptam ejuſdem eſſe ſpeciei cum deſcribendâ, rectam vero *TR* quâ angulus *VRS* biſecatur, tangere trajectoriam in puncto *R*, patet ex conicis. *Q. E. F.*

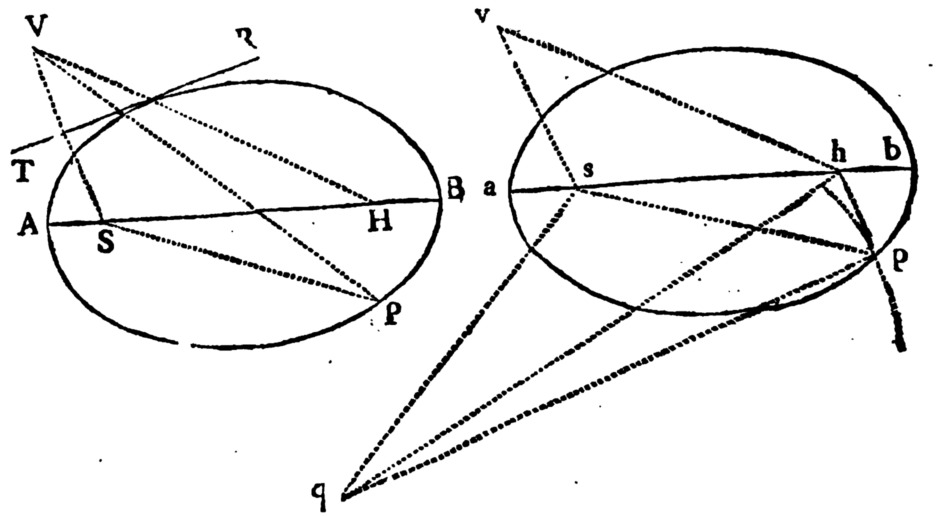


Caſ. 4. Circa umbilicum *S* deſcribenda jam ſit trajectoria *APB*, quæ tangat rectam *TR*, tranſeatque per punctum quodvis *P* extra tangentem datum, quæque ſimilis ſit figuræ *a p h*, axe principali *a b* & umbilicis *s*, *h* deſcriptæ. In tangentem *TR* demitte perpendiculum *ST*, & produc idem ad *V*, ut ſit *TV* æqualis *ST*. Augulis autem *SVP*, *SPV* fac angulos *h s q*, *s h q* æquales; centroque *q* & intervallo quod ſit ad *a b* ut *SP* ad *VS* deſcribe circulum ſecantem figuram *a p b* in *p*. Junge *s p* & age *SH* quæ ſit ad *s h* ut eſt *SP* ad *s p*, quæque angulum *PSH* angulo *p s h* & angulum *VSH* angulo *p s q* æquales conſtituat. Denique umbilicis *S*, *H*, & axe principali *AB* diſtantiam *VH* æquante, deſcribatur ſectio conica. Dico factum. Nam ſi agatur *s v* quæ ſit ad *s p* ut eſt *s h* ad *s q*, quæ-

(o) * Centro circuli litterâ X, notato, jungantur H X, H S, H V, & eadem eſt demonſtratio quæ caſus 2ⁱ pro ellipſi, & ſi producatur R V, S V, verſùs V, ut punctum V, ſitum ſit inter K & k, eadem quoque erit demonſtratio pro hyperbolâ.

Si-

que conſtituat angulum *vsp* angulo *hsq* & angulum *vsh* angulo *psq* æquales, triangula *svh*, *spq* erunt ſimilia, & propterea *vh*



erit ad *pq* ut eſt *sh* ad *sq*, id eſt (ob ſimilia triangula *VSP*, *hsq*) ut eſt *VS* ad *SP* ſeu *ab* ad *pq*. Æquantur ergo *vh* & *ab*. Porro (p) ob ſimilia triangula *VSH*, *vsh*, eſt *VH* ad *SH* ut *vh* ad *sh*, id eſt, axis conicæ ſectionis jam deſcriptæ ad illius umbilicorum intervallum, ut axis *ab* ad umbilicorum intervallum *sh*; & propterea figura jam deſcripta ſimilis eſt figuræ *aph*. Tranſit autem hæc figura per punctum *P*, (q) eo quod triangulum *PSH* ſimile ſit triangulo *psh*; & quia *VH* æquatur ipſius axi & *VS* biſecatur perpendiculariter à recta *TR*, tangit eadem rectam *TR*. (r) *Q. E. F.*

LEM-

* (p) Similia ſunt triangula VSH, vsh, nam (per conſtr.) angulus VSP = hsq = vsp, & angulus HSP = hsp, adeóque angulus VSH = vsh; & præterea sp : sh = SP : SH, & sv : sp = sh : sq = SV : SP, ob ſimilia triangula VSP, hsq; quarè ex æquo sv : sh = SV : SH, triangula igitur VSH, vsh, quorum latera proportionalia æquales angulos complectuntur ſunt ſimilia.

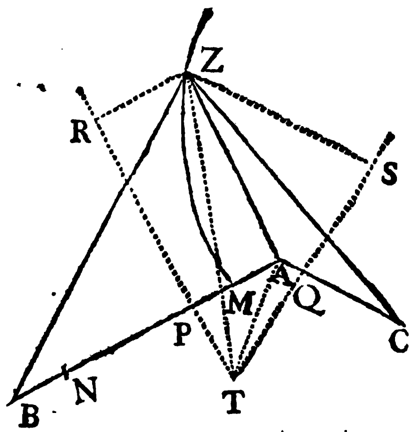
* (q) Nam ſi ducatur recta SP, perimetro figuræ occurrens in P, & angulum PSH, æqualem faciens angulo psh, patet ob ſimilitudinem ſectionum conicarum, triangula duo PSH, psh, fore ſimilia; undè viciſſim manifeſtum eſt punctum P, eſſe in perimetro figuræ, ſi triangulum PSH, ſimile ſit triangulo psh.

* (r) Eadem eſt conſtructio ac demonſtratio pro hyperbolâ, ſi foci H, h, & vertices B, b, ad contrariam partem transferantur.

Erit

LEMMA XVI.

A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas quarum differentiæ vel dantur vel nullæ ſunt.



Caſ. 1. Sunto puncta illa data *A*, *B*, *C* & punctum quartum *Z*, quod invenire oportet; ob datam differentiam linearum *AZ*, *BZ*, locabitur punctum *Z* in hyperbola cujus umbilici ſunt *A* & *B*, & principalis axis differentia illa data. Sit axis ille *MN*. Cape *PM* ad *MA* ut eſt *MN* ad *AB*, & erecta *PR* perpendiculari ad *AB*, demiſſaque *ZR* perpendiculari ad *PR*; erit, (ſ) ex naturâ hujus hyperbolæ, *ZR* ad *AZ* ut eſt *MN* ad *AB*. Simili diſcurſu punctum *Z* locabitur in aliâ hyperbolâ, cujus umbilici ſunt *A*, *C* & principalis axis differentia inter *AZ* & *CZ*, ducique poteſt *QS* ipſi *AC* perpendicularis, ad quam ſi ab hyperbolæ hujus puncto quovis *Z* demittatur normalis *ZS*, hæc fuerit ad *AZ* ut eſt differentia inter *AZ* & *CZ* ad *AC*. Dantur ergo rationes ipſarum *ZR* & *ZS* ad *AZ*, & idcirco datur earundem *ZR* & *ZS* ratio ad invicem; ideoque ſi rectæ *RP*, *SQ* concurrant in *T*, & agantur *TZ* & *TA*, figura *TRZS* dabitur ſpecie, & recta *TZ* in qua punctum *Z* alicubi locatur, dabitur poſitione. Dabitur etiam recta *TA*, ut & angulus *ATZ*; & ob datas rationes ipſarum *AZ*

* (ſ) Erit ex naturâ hujus hyperbolæ ZR, ad AZ, ut eſt MN, ad AB, (298). 309.

A Z ac (t) *TZ* ad *ZS* dabitur earundem ratio ad invicem; & inde dabitur triangulum *A T Z*, cujus vertex eſt punctum *Z*. *Q. E. I.*

Caſ. 2. Si duæ ex tribus lineis, puta *A Z* & *B Z*, æquantur, ita age rectam *T Z*, ut biſecet rectam *A B*; dein quære triangulum *A T Z* ut ſupra.

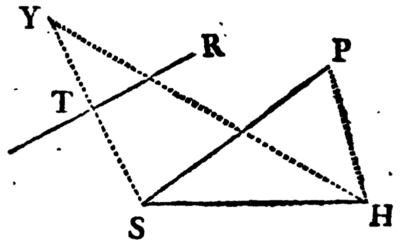
Caſ. 3. Si omnes tres æquantur, locabitur punctum *Z* in centro circuli per puncta *A*, *B*, *C* tranſeuntis. *Q. E. I.*

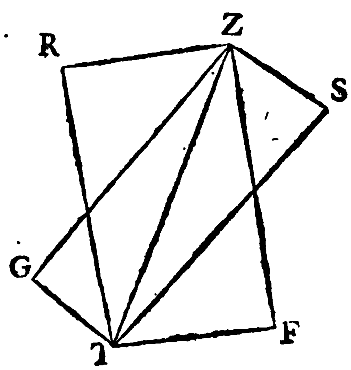
Solvitur etiam hoc lemma problematicum per librum tactionum *Apollonii* à *Vieta* reſtitutum.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XIII.

Trajectoriam circa datum umbilicum deſcribere, quæ tranſibit per puncta data & rectas poſitione datas continget.

Detur umbilicus *S*, punctum *P*, & tangens *TR*, & inveniendus ſit umbilicus alter *H*. Ad tangentem demitte perpendiculum *ST*, & produc idem ad *Y*, ut ſit *TY* æqualis *ST*, & erit *YH* æqualis axi principali. Junge *SP*, *HP*, & erit *SP* diffe-

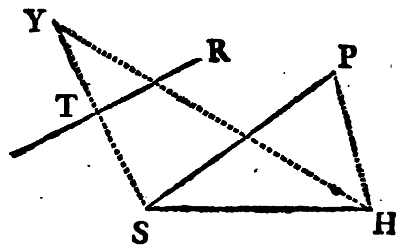




(t) 300. Et recta T Z, in quâ punctum Z, alicubi locatur, dabitur poſitione; ductis enim T F ad R T, & T G ad S T perpendicularibus, quæ ſint in ratione datâ R Z ad Z S, agantur G Z, F Z, ipſis T S, R T parallelæ & ſe mutuò interſecantes in puncto aliquo Z, juncta TZ, habebit poſitionem quæſitam; patet enim perpendicula Z S, Z R, ex puncto Z, in rectas T S, T R, demiſſa, eſſe lineis TG, T F æqualia adeóque in datâ ratione.

DE MOTU CORPORUM.

differentia inter HP & axem principalem. (u) Hoc modo ſi dentur plures tangentes TR, vel plura puncta P, devenietur ſemper ad lineas totidem YH, vel PH, à dictis punctis Y vel P ad umbilicum H ductas, quæ vel æquantur axibus, vel datis longitudinibus SP differunt ab iiſdem, atque ideo quæ vel æquantur ſibi invicem, vel datas habent differentias; & inde, per lemma ſuperius, datur umbilicus ille alter H. Habitis autem umbilicis una cum axis longitudine (quæ vel eſt YH; vel, ſi trajectoria ellipſis eſt, $PH+SP$; ſin hyperbola, $PH-SP$) habetur trajectoria. *Q. E. I.*

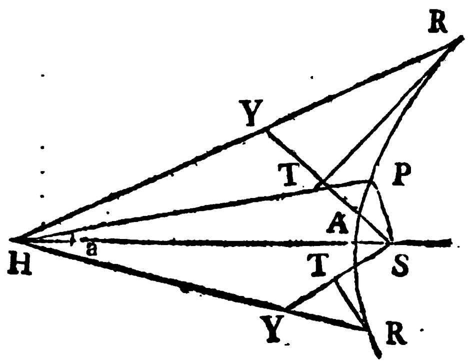


Scholium.

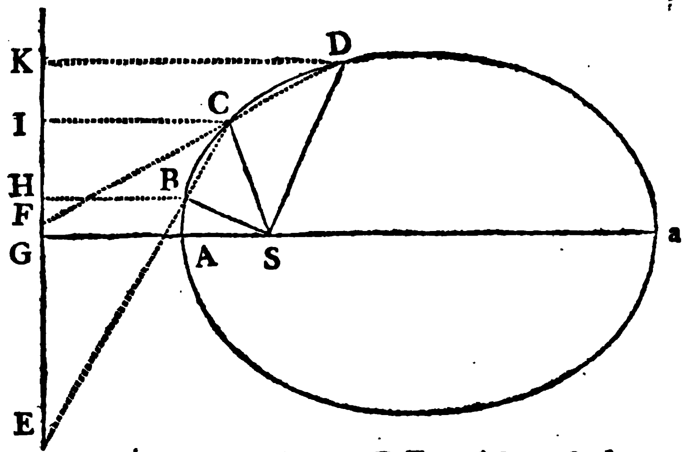
Ubi trajectoria eſt hyperbola, ſub nomine hujus trajectoriæ oppoſitam hyperbolam non comprehendo. Corpus enim pergendo in motu ſuo in oppoſitam hyperbolam tranſire non poteſt.

Caſus

(u) 301. Si dentur tres tangentes, dabuntur tria puncta ut Y, ex quibus ad umbilicum H, inflectendæ erunt tres rectæ æquales ut YH, quod fit per Caſ. 3. Lemmatis ſuperioris. Si duæ dentur tangentes & punctum perimetri ſectionis P, dabuntur duo puncta ut Y, ex quibus ad umbilicum H, inflectendæ erunt duæ rectæ æquales, & 3um punctum P, ex quo ducenda PH, cujus differentia à lineâ YH, eſt data SP. Nam in ellipſi $PH+SP=YH$, adeóque $YH-PH=SP$; in hyperbolâ $PH-SP=YH$, undè $PH-YH=SP$, eſtque Caſus 2us Lem. XVI. Tandem ſi dentur tria perimetri puncta ut P, locum habet Caſus 1us ejuſdem Lemmatis.



Caſus ubi dantur tria puncta ſic ſolvitur expeditius. Dentur puncta *B*, *C*, *D*. Junctas *BC*, *CD* produc ad *E*, *F*, ut ſit *EB* ad *EC* ut *SB* ad *SC*, & *FC* ad *FD* ut *SC* ad *SD*. Ad *EF* ductam & productam demitte normales *SG*, *BH*, inque *GS* infinite productâ cape *GA* ad *AS* & *Ga* ad *aS* ut eſt *HB* ad *BS*; & erit *A* vertex, & *Aa* axis principalis trajectoriæ: quæ, perinde ut *GA* major, æqualis, vel minor fuerit quam *AS*, erit ellipſis, parabola vel hyperbola; puncto *a* in primo caſu cadente ad eandem partem lineæ *GF* cum puncto *A*; in ſecundo caſu abeunte in infinitum; in tertio cadente ad contrariam partem lineæ *GF*. Nam ſi demittantur ad *GF* perpendicula *CI*, *DK*; erit *IC* ad *HB* ut *EC* ad *EB*, hoc eſt, ut *SC* ad *SB*; & viciſſim *IC* ad *SC* ut *HB* ad *SB* ſive ut *GA* ad *SA*. Et ſimili argumento probabitur eſſe *KD* ad *SD* in eâdem ratione. (x) Jacent ergo puncta *B*, *C*, *D* in coni ſectione circa umbilicum *S* ita deſcripta, ut rectæ omnes, ab umbilico *S* ad ſingula ſectionis puncta ductæ, ſint ad perpendicula à punctis iiſdem ad rectam *GF* demiſſa in datâ illâ ratione.



Methodo haud multum diſſimili hujus problematis ſolutionem tradit clariſſimus Geometra *de la Hire*, conicorum ſuorum lib. VIII. prop. XXV.

SEC-

(x) * *Jacent ergo puncta B, C, D, in Coni Sectione* (vide n. 298.)

DE MOTU CORPORUM.

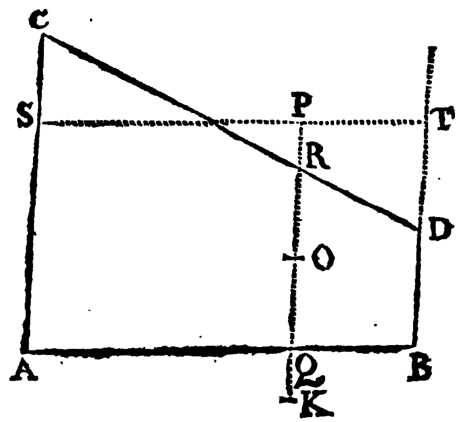
SECTIO V.

Inventio orbium ubi umbilicus neuter datur.

LEMMA XVII.

Si à datæ conicæ ſectionis puncto quovis P *ad trapezii alicujus* ABDC, *in conicâ illâ ſectione inſcripti, latera quatuor infinitè producta* AB, CD, AC, DB *totidem rectæ* PQ, PR, PS, PT *in datis angulis ducantur, ſingulæ ad ſingula: rectangulum ductarum ad oppoſita duo latera* PQ×PR, *erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera oppoſita* PS×PT *in datâ ratione.*

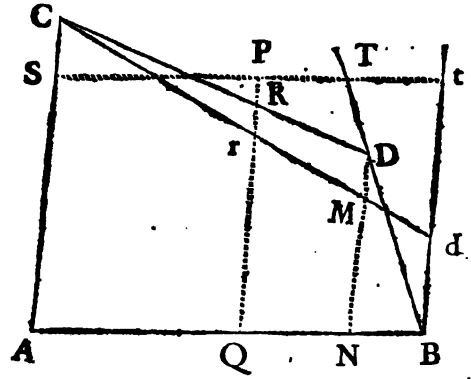
Caſ. 1. Ponamus primò lineas ad oppoſita latera ductas parallelas eſſe alterutri reliquorum laterum, putà *PQ* & *PR* lateri *AC*, & *PS* ac *PT* lateri *AB*. Sintque inſuper latera duo ex oppoſitis, putà *AC* & *BD*, ſibi invicem parallela. Et recta, quæ biſecat parallela illa latera, erit una ex diametris conicæ ſectionis, & biſecabit etiam *RQ*. Sit *O* punctum in quo *RQ* biſecatur, & erit *PO* ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc *PO* ad *K*, ut ſit *OK* æqualis *PO*, & erit *OK* ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta *A*, *B*, *P* & *K* ſint ad conicam ſectionem, & *PK* ſecet *AB* in dato angulo, erit (per prop. 17, 19, 21 & 23. lib. III. conicorum *Apollonii*) rectangulum *PQK* ad rectangulum *AQB* in datâ ratione. (γ) Sed *QK* & *PR* æqua-



(γ) *Erit Rectangulum PQK ad Rectangulum AQB in datâ ratione.* Liquet (per Lem. III. de Conic.) quod ſi linea quævis in Sectione Conicâ terminata ut PK ſecet aliam

æquales ſunt, utpote æqualium OK, OP, & OQ, OR differentiæ, & inde etiam rectangula PQK & $PQ \times PR$ æqualia ſunt; atque ideo rectangulum $PQ \times PR$ eſt ad rectangulum AQB, hoc eſt ad rectangulum $PS \times PT$ in datâ ratione. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Ponamus jam trapezii latera oppoſita AC & BD non eſſe parallela. Age Bd parallelam AC & occurrentem tum rectæ ST in t, tum conicæ ſectioni in d. Junge Cd ſecantem PQ in r, & ipſi PQ parallelam age DM ſecantem Cd in M & AB in N. Jam ob ſimilia triangula BTt, DBN; eſt Bt ſeu PQ ad Tt ut DN ad NB. Sic & [z] Rr eſt ad AQ ſeu PS ut DM ad AN. Ergo ducendo antecedentes in antecedentes & conſequentes in conſequentes, ut rectangulum PQ in Rr eſt ad rectangulum PS in Tt, ita rectangulum NDM eſt ad rectangulum ANB, & (per caſ. 1.) ita rectangulum PQ in Pr eſt ad rectangulum PS in Pt, (†) ac diviſim ita rectangulum $PQ \times PR$ eſt ad rectangulum $PS \times PT$. *Q. E. D.*



Caſ.

aliam lineam etiam in Sectione Conicâ terminatam ut A B, Rectangulum partium lineæ PK erit ad Rectangulum partium lineæ A B ut Rectangulum partium lineæ cujuſvis alius Parallelæ lineæ P K & ad Sectionem terminatæ, ad Rectangulum partium quas hæc nova linea ſecat in lineâ A B: ideo ubicumque ſit punctum P Rectangula PQK & AQB erunt in eâdem datâ ratione.

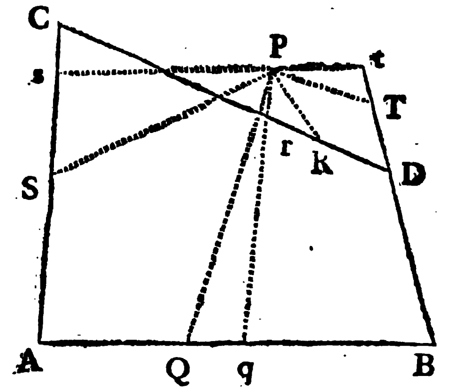
(z) * *Rr : AQ ſeu PS = DM : AN.* Sunt enim propter parallelas R r, D M, triangula r C R M C D ſimilia, ideóque R r : D M = C r : C M; ſed eſt C r : C M = AQ vel PS : AN; ergò R r : D M = AQ, vel PS : A N & R r : PS = D M : A N.

(†) * *Ac diviſim.* Ex Demonſtratis NDM : A N B = PQ × R r : PS × T t = PQ × P r : P S × P t, & diviſim N D M : A N B = P Q × P r − P Q × R r : P S × P t − P S × T t = P Q × P R : P S × P T, ſed ratio N D M ad A N B data eſt, ergò & ratio PQ × PR ad PS × PT.

 * Cum

De Motu Corporum.

Caſ. 3. Ponamus denique lineas quatuor PQ, PR, PS, PT non eſſe parallelas lateribus AC, AB, ſed ad ea utcunque inclinatas. Earum vice age Pq, Pr parallelas ipſi AC; & Ps, Pt parallelas ipſi AB; & propter datos angulos triangulorum PQq, PRr, PSs, PTt, dabuntur rationes PQ ad Pq, PR ad Pr, PS ad Ps, & PT ad Pt; atque ideo rationes compoſitæ $PQ \times PR$ ad $Pq \times Pr$, & $PS \times PT$ ad $Ps \times Pt$. Sed, per ſuperius demonſtrata, ratio $Pq \times Pr$ ad $Ps \times Pt$ data eſt: ergò & ratio $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. *Q. E. D.*



LEMMA XVIII.

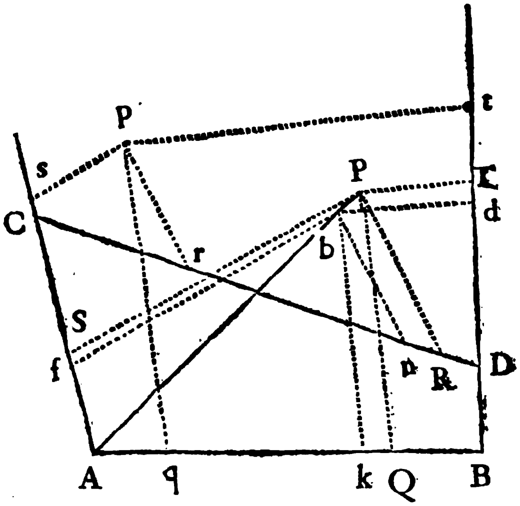
Iiſdem poſitis, ſi rectangulum ductarum ad oppoſita duo latera trapezii PQ×PR *ſit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera* PS×PT *in datâ ratione; punctum* P, *à quo lineæ ducuntur, tanget conicam ſectionem circa trapezium deſcriptam.*

Per puncta A, B, C, D & aliquod infinitorum punctorum P, putà p, concipe conicam ſectionem deſcribi: dico punctum P hanc ſemper tangere. Si negas, junge AP ſecantem hanc conicam ſectionem alibi quam in P, ſi fieri poteſt, putà in b. Ergo ſi ab his punctis p & b ducantur in datis angulis ad latera trapezii rectæ pq, pr, ps, pt & bk, bn, bf, bd; erit ut $bk \times bn$ ad $bf \times bd$ ita (per lem. XVII.) $pq \times pr$ ad $ps \times pt$, & ita (per hypoth.) $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. Eſt & propter ſimilitudinem trapeziorum $bkAf$, $PQAS$, ut bk ad bf ita PQ ad PS. Quare, applicando terminos prioris proportionis ad terminos correſpondentes hujus, erit bn ad bd ut PR ad PT. (‡) Ergo trapezia æquiangula $Dnbd$, $DRPT$

(‡) * Cum ſit $bk \times bn : bf \times db = PQ \times PR : PS \times PT$ item $bf : bk = PS : PQ$ erit $bn : bd = PR : PT$.

Ergò

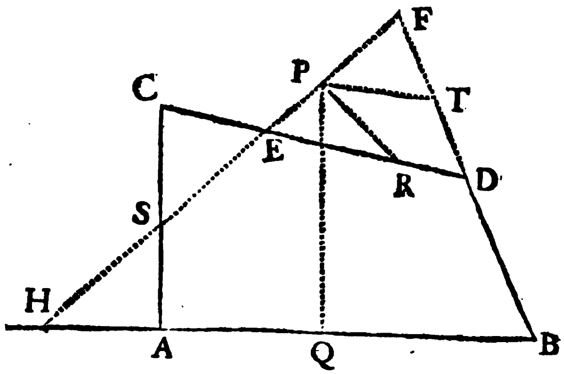
ſimilia ſunt, & (a) eorum diagonales *Db*, *DP* propterea coincidunt. Incidit itaque *b* in interſectionem rectarum *AP*, *DP* ideoque coincidit cum puncto *P*. Quare punctum *P*, ubicunque ſumatur, incidit in aſſignatam conicam ſectionem. *Q. E. D.* (b)



Corol. Hinc ſi rectæ tres *PQ*, *PR*, *PS* à puncto communi *P* ad alias totidem poſitione datas rectas *AB*, *CD*,

ſin-

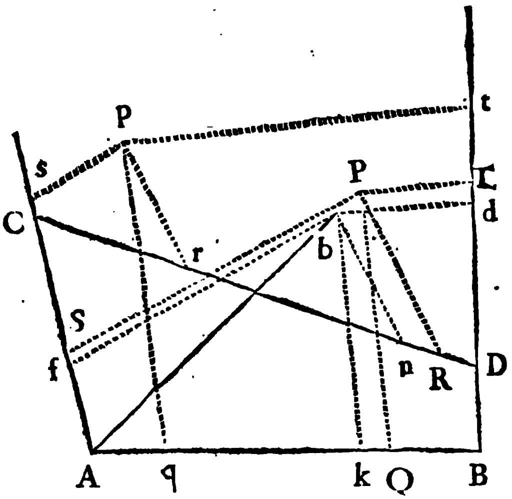
(a) *Ergò trapezia æquiangula D n b d, D R P T, ſimilia ſunt, & eorum diagonales D d, D P, propterea coincidunt;* nam jungantur n d, R T, & duo triangula n d b, R T P, æquiangula erunt ob latera b n, b d, & P R, P T; proportionalia, & angulos n b d, R P T, æquales; quarè & duo triangula n d D, R T D, æquiangula erunt ob angulum D, communem, & angulos ad T & t, R & n, æquales, erit igitur b n : n D = P R : R D, adeóque ductis diagonalibus D b, D P, duo triangula b D n, P D R, erunt ſimilia, ac proindè angulus P D R, æqualis angulo b D n, quod eſſe non poteſt, niſi diagonales D b, D P, coincidant.

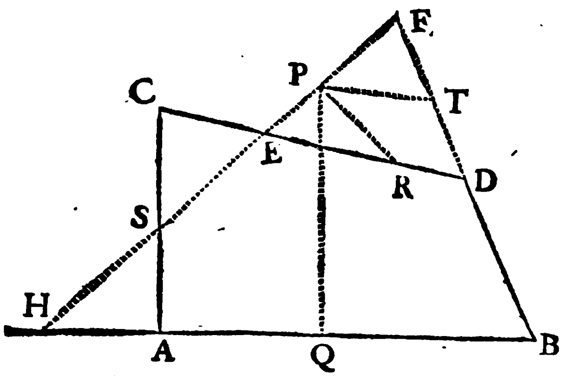


(b) 302. Lemma XVIII per analyſim facilè demonſtrari poteſt. Producta enim P S, donec ſingulis trapezii lateribus occurrat in F, E, S, H, ob datos omnes angulos figuræ, data erit ratio laterum quibus ſingula triangula F P T, F E D, P E R, E C S, S H A, P H Q, clauduntur. Aſſumptis igitur C E, tanquam abſciſsâ & P E tanquam ordinatâ loci punctorum P, data erit ratio P E, ad P R, adeóque P E, in datam quantitatem ducta æquabitur ipſi P R; ob datam C D, invenietur E D, ut potè æqualis C D − C E, & per triangulum F E D ſpecie datum invenietur E F, ac proindè P F = E F − E P, & inde per triangulum FPT, invenietur PT, omneſque illæ lineæ exprimentur per lineas C E, P E, unius dimenſionis, & alias datas quantitates. Similiter E S & C S & S A = C A − C S, atquè H S, per triangulum S A H, ſpecie datum, & hinc P H = H S + S E + E P, adeóque P Q, per triangulum P H Q, invenientur in lineis C E & P E, unius dimenſionis & aliis datis quantitatibus. Quare in rectangulis P Q × P R, P S × P T, rectæ variabiles C E, P E, non plures quam duas dimenſiones obtinebunt; unde æquatio quæ ex rectangulo-

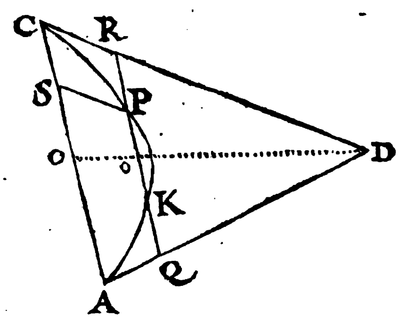
DE MOTU CORPORUM.

ſingulæ ad ſingulas, in datis angulis ducantur, ſitque rectangulum ſub duabus ductis (c) $PQ \times PR$ ad quadratum tertiæ PS in datâ ratione: punctum P, à quibus rectæ ducuntur, locabitur in ſectione conicâ quæ tangit lineas AB, CD in A & C; & contra. Nam coeat linea BD cum lineâ AC, manente poſitione trium AB, CD, AC; dein coeat etiam linea PT cum linea PS: & rectangulum $PS \times PT$ evadet PS *quad.* rectæque AB, CD, quæ





gulorum illorum ratione datâ reperitur ſecundum gradum non ſuperabit; Cum igitur, ut vulgò notum eſt, æquationis quadraticæ locus ſit Sectio conica, patet locum punctorum P, eſſe ad ſectionem conicam. Quod autem ſectio illa per puncta C, D, P, A, tranſeat inito calculo facilè oſtenditur, nam ſi in æquatione loci ponatur C E = o, invenietur valor unus ipſius P E = o, adeóque punctum P, cadit in C, ſi ponatur C E = C D, invenietur quoque valor unus P E = o, ac proindè punctum P, cum puncto D, coincidit; Idem pari argumento reſpectu punctorum A, B, reperitur, ſi ponatur A Q = o vel A Q = A B.



(c) *Hinc ſi rectæ tres &c.* Sint tres lineæ A B, C D, A C poſitione datæ, & lineæ A B, C D tangant ſectionem conicam in A & C, & à puncto communi P, ducantur tres Rectæ P Q, P R, P S in datis angulis ad ſingulas A B, C D, A C erit P Q × P R in ratione datâ ad quadratum tertiæ P S: Sit enim P S parallela lineæ D C & ſint R P, P Q parallelæ lineæ CA ſitque P K chorda Sectionis, ſumatur medium

quæ curvam in punctis *A* & *B*, *C* & *D* ſecabant, jam (†) curvam in punctis illis coeuntibus non amplius ſecare poſſunt, ſed tantùm tangent.

Scholium.

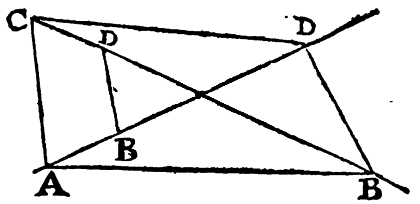
Nomen conicæ ſectionis in hoc lemmate latè ſumitur, ita ut ſectio tam rectilinea per verticem coni tranſiens, quam circularis baſi parallela includatur. ([d]) Nam ſi punctum *p* incidit in rectam, quâ puncta *A* & *D* vel *C* & *B* junguntur, conica ſectio vertetur in geminas rectas, quarum una eſt recta illa in quam punctum *p* incidit, & altera eſt recta quâ alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si trapezii anguli duo oppoſiti ſimul ſumpti æquentur duobus rectis, & lineæ quatuor *PQ*, *PR*, *PS*, *PT* ducantur ad latera ejus vel perpendiculariter vel in angulis quibuſvis æqualibus, ſitque rectangulum ſub duabus ductis *PQ* × *PR* æquale rectangulo ſub duabus aliis *PS* × *PT*, ſectio conica eva-

dium O chordæ A C ducaturque per punctum D DO, quæ ſecabit tam chordam PK quam totam RQ in medio (vide Lem. IV. de Conic. n. 224.) hinc erit RK=PQ, ſed eſt (per Cor. 2. Lem. III. de Conic. n. 224.) CR^2 ad RP × RK in datâ ratione, ideoque eſt CR^2 ad RP × PQ in datâ ratione, ſed ob parallelas CR SP & CS RP eſt PS=CR, ergo PS^2 eſt ad RP × PQ in datâ ratione.

Si lineæ PS, RP, PQ in aliis ſed datis angulis ad lineas AC CD AD inclinentur, dabuntur earum rationes ad has priores, unde deducetur eodem modo ac in Lemmate XVII. in iſto etiam caſu fore SP^2 ad RP × PQ in datâ ratione.

Pariter & converſa demonſtrabitur ut Lemma XVIII.

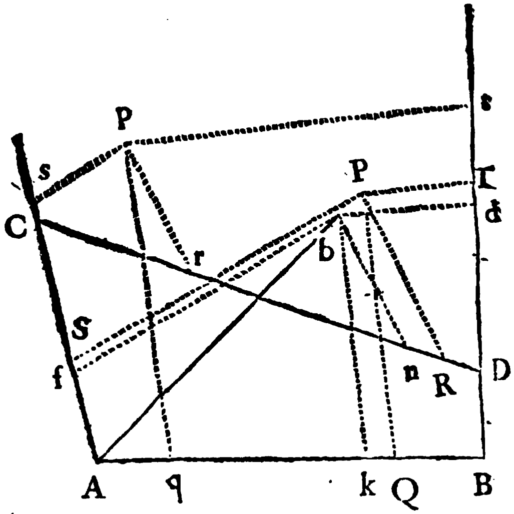
(†) * *Jam curvam in punctis illis coeuntibus non amplius ſecare poſſunt, ſed tantùm tangent*; puncta enim A & B, C & D, ſemper ſupponuntur in conicæ ſectionis perimetro poſita; quarè evaneſcentibus diſtantiis AB & CD, lineæ AB & CD, ultimò coincidunt cum tangentibus ſectionem in punctis A & C. Vid. Lem. VI. Newt.



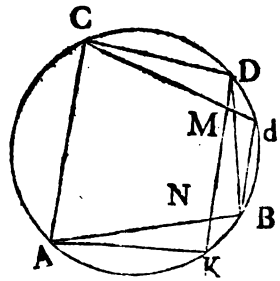
([d]) 303. Puncta quatuor A, B, D, C, ſint in perimetro hyperbolæ vel in perimetris duarum hyperbolarum oppoſitarum, planum ſectionis quo hyperbola in cono generatur accedat ad coni verticem; hyperbolæ in triangula rectilinea mutantur quæ erunt loca punctorum P, & quorum latera vel coincidunt cum duobus trapezii lateribus vel ſunt ipſius diagonales, ac proindè punctum P, incidit in rectam quâ quævis ex punctis quatuor A, B, C, D, junguntur & *conica ſectio vertitur in geminas rectas quarum una eſt recta illa in quâ punctum P incidit & altera eſt recta quâ alia duo ex punctis quatuor junguntur*.

De Motu Corporum.

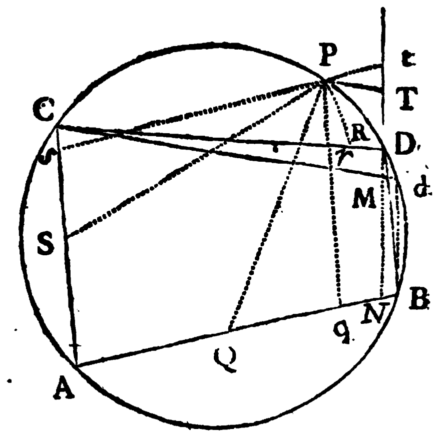
evadet circulus. (e) Idem fiet, ſi lineæ quatuor ducantur in angulis quibuſvis, & rectangulum ſub duabus ductis $PQ \times PR$ ſit ad rectangulum ſub aliis duabus $PS \times PT$ ut rectangulum ſub ſinubus angulorum S, T, in quibus duæ ultimæ PS, PT ducuntur, ad rectangulum ſub ſinubus angulorum Q, R, in quibus duæ primæ PQ, PR,



(e) 304. *Sectio Conica evadet circulus.* Si ex trapezii ABDC circulo inſcripti angulo quovis D, agatur recta DN, lateri AC parallela, & lateri AB occurrens in N, deindè ex altero angulo B, ducatur Bd, lateri AC parallela circulo occurrens in d, jungaturque Cd rectam DN, ſecans in N, erit $DN \times DM = AN \times NB$. Nam jungatur AK, & quoniam arcus CD, & AK, Dd, & KB, inter eaſdem parallelas intercepti æquales ſunt, anguli DCd, & BAK, CDK & AKD, iis arcubus inſiſtentes & æqualium arcuum chordæ CD, AK, æquantur; quarè triangula AKN, CDM, ſimilia & æqualia ſunt; eſt igitur $DM = NK$; ſed ex naturâ circuli $AN \times NB = KN \times DN$, ergò $AN \times NB = DM \times DN$.



305. Si ergo ſectio conica trapezio circumſcripta vertatur in circulum, hoc eſt, ſi ſectionis planum baſi coni fiat parallelum, erit rectangulum $PQ \times PR$ ad rectangulum $PS \times PT$, ut rectangulum ſub ſinubus angulorum S, T, ad rectangulum ſub ſinubus angulorum Q, R... Dem... factâ conſtructione Caſ. 3i. Lem. XVII. agantur rectæ DN, Bd, lateri AC parallelæ, ut in articulo ſuperiori; & erit per demonſtrationem caſus 2i. Lem. XVII, $ND \times DM : AN \times NB = Pq \times Pr : Ps \times Pt$, hoc eſt (304) $Pq \times Pr = Ps \times Pt$. Jam verò angulorum ſinubus litterâ S deſignatis



P R, ducuntur. ([f]) Cæteris in caſibus locus puncti *P* erit aliqua trium figurarum, quæ vulgo nominantur ſectiones conicæ. ([g]) Vice autem trapezii *A B C D* ſubſtitui poteſt quadrilaterum, cujus latera duo oppoſita ſe mutuo inſtar diagonalium decuſſant. Sed & è punctis quatuor *A*, *B*, *C*, *D* poſſunt unum vel duo abire ad infinitum, eoque pacto latera figuræ, quæ ad puncta illa convergunt, evadere parallela: quo in caſu ſectio conica tranſibit per cætera puncta, & in plagas parallelarum abibit in infinitum.

LEM-

ſignatis erit S. P q A = S. C A B, & S. P r C = S. A C D, ob parallelas P q, A C, & S. P s S = S. P s C = S. C A B, & S. P t T = S. A B D, ob parallelas s t, A B, & ob angulum A C D, complementum anguli ABD ad duos rectos, S. P t T = S. ACD.

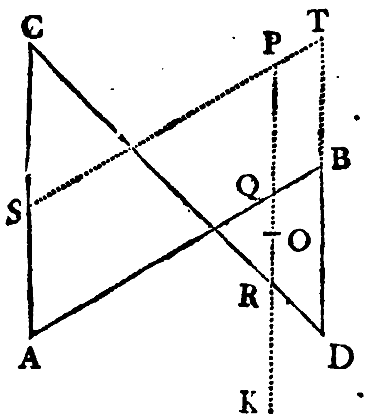
Porrò
P Q : P q = S. P q A (S. C A B) : S. P Q B
P s : P S = S. P S C : S. P s S (S. C A B).
P R : P r = S. P r C (S. ACD) : S. P R C.
P t : P T = S. P T t : S. P t T. (S. A C D).

Ergò per compoſitionem rationum
P Q × P R × P s × P t : P S × P T × P q × P r
= P Q × P R : P S × P T
= S. P S C × S. P T t : S. P Q B × S. P R C.
Q. e. D.

306. Coroll... Eâdem manente proportione, ſi omnes anguli ad S, T, Q, R, fuerint æquales, rectangulum P Q × P R, erit quoque æquale rectangulo P S × P T.

(f) * Nam vel punctum P, locabitur in ſectione rectilineâ per verticem coni tranſeunte, vel in circulo, vel tandem in aliquâ trium ſectionum conicarum, nullæ enim aliæ ſunt ſectiones conicæ, ut notum eſt.

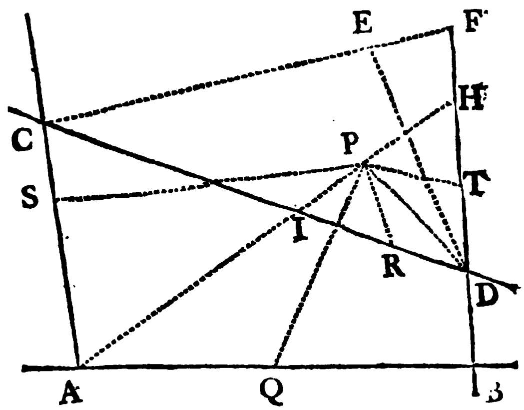
(g) 307. *Vice autem trapezii ſubſtitui poteſt quadrilaterum A B D C, cujus latera duo A B, C D, ſe mutuò inſtar diagonalium decuſſant*; huic enim quadrilatero abſque mutatione aptari poſſunt tam conſtructiones quam demonſtrationes Lemmatum X V I I. & XVIII. Exemplum ſit



Caſ. 1. Lem. X V I I. ponamus lineas ex puncto P, ad oppoſita latera ductas parallelas eſſe alterutri reliquorum laterum, putà P Q & P R, lateri A C & P S, ac PT, lateri A B; ſintque inſuper latera duo ex oppoſitis putà A C & B D, ſibi invicem parallela & recta quæ biſecat &c. cæteræ omnes demonſtrationis partes eodem modo transferuntur ad quadrilaterum CABD.

LEMMA XIX.

Invenire punctum P, *à quo ſi rectæ quatuor* PQ, PR, PS, PT *ad alias totidem poſitione datas rectas* AB, CD, AC, BD, *ſingulæ ad ſingulas, in datis angulis ducantur, rectangulum ſub duabus ductis*, PQ×PR, *ſit ad rectangulum ſub aliis duabus*, PS×PT, *in datâ ratione*.



Lineæ *AB*, *CD*, ad quas rectæ duæ *PQ*, *PR* unum rectangulorum continentes ducuntur, conveniant cum aliis duabus poſitione datis lineis in punctis *A*, *B*, *C*, *D*. Ab eorum aliquo *A* age rectam quamlibet *AH*, in quâ velis punctum *P* reperiri. Secet ea lineas oppoſitas *BD*, *CD*, nimirum *BD* in *H*, & *CD* in *I*, & ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes *PQ* ad *PA* & *PA* ad *PS*, ideoque ratio *PQ* ad *PS*. Auferendo hanc à datâ ratione *PQ*×*PR* ad *PS*×*PT*, dabitur ratio *PR* ad *PT*, & addendo datas rationes *PI* ad *PR*, & *PT* ad *PH* dabitur ratio *PI* ad *PH*, atque ideo punctum *P*. *Q.E.I.*

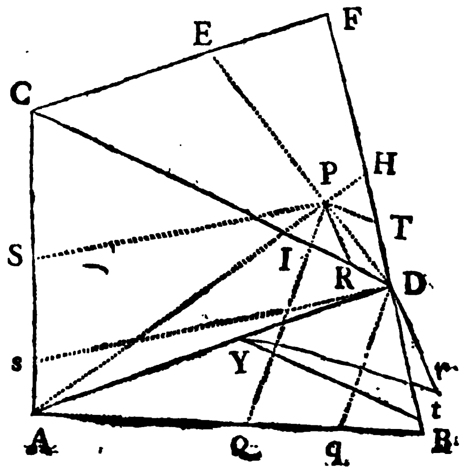
Corol. 1. Hinc (h) etiam ad loci punctorum infinitorum *P*

(h) 308. Minima ſit punctorum P, D, diſtantia PD, agantur Ds, Dq, ad AC, AB, in angulis datis PSC, PQA, & junctâ AD, ex illius quovis puncto Y, ducantur Yr, lateri CD, parallela, & Yt, ad DB, in angulo dato PTH; tum ex puncto D, ad Yr, ducatur Dr, in angulo dato PRI; punctis P, D, coeuntibus erit PQ : PA = Dq : DA, & PA : PS = DA : Ds, adeóque PQ : PS = Dq : Ds, & proindè PQ×PR : PS×PT = Dq×PR : Ds×PT. Ratio data rectanguli PQ×PR ad PS×PT ſit A ad B, & erit Dq×PR : Ds×PT = A : B, adeóque

PR : PT = A×Ds : B×Dq

& evaneſcente PD, ob ſimilia triangula RIR, DYr, erit

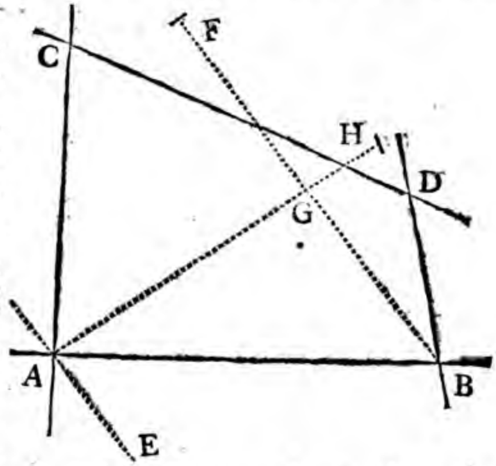
PI : PR = DY : Dr.



punctum quodvis D tangens duci poteſt. Nam chorda PD, ubi puncta P ac D conveniunt, hoc eſt, ubi AH ducitur per punctum D, tangens evadit. Quo in caſu, ultima ratio evaneſcentium IP & PH invenietur ut ſupra. Ipſi igitur AD duc parallelam CF, occurrentem BD in F, & in eâ ultimâ ratione ſectam in E, & DE tangens erit, propterea quod CF & evaneſcens IH parallelæ ſunt, & in E & P ſimiliter ſectæ.

LIBER PRIMUS.

Corol. 2. Hinc etiam locus punctorum omnium P definiri poteſt. Per quodvis punctorum A, B, C, D, puta A, duc loci tangentem AE, & per aliud quodvis punctum B duc tangenti parallelam BF occurrentem loco in F. Invenietur autem punctum F per lem. XIX. Biſeca BF in G, & actâ indefinita AG erit poſitio diametri ad quam BG & FG ordinatim applicantur. Hæc AG occurrat loco in H, (i) & erit AH diameter ſive latus tranſverſum, ad quod latus rectum erit ut BGq ad $AG \times GH$. Si (k) AG nuſquam occurrit loco, lineâ AH exiſtente infinitâ, locus erit parabola, & latus rectum ejus ad diametrum AG pertinens erit $\frac{BGq}{AG}$. Sin ea alicubi occurrit, locus hyperbola erit, ubi puncta A & H ſita ſunt ad eaſdem partes ipſius G: & ellipſis, ubi G intermedium eſt, niſi forte angulus AGB rectus ſit, & inſuper BG *quad.* æquale rectangulo AGH, quo in caſu circulus habebitur.



& ob ſimilia triangula PTH, YtD, erit
PT : PH = Yt : DY
ergò per compoſitionem rationum
PI : PH = A × Ds × Yt : B × Dq × Dr = CE : EF, ob parallelas IH : CF, ducta DE, erit tangens in D.

(i) * Et erit AH, diameter (per prop. 7am lib. 2. conic. Apoll. Lemma IV. de Conic. 224.) ſive latus tranſverſum ad quod latus rectum erit ut BG^2 ad $AG \times GH$ (per prop. 21. lib. 1. conic. Apoll. Theor. II. de Hyp. & de Ellip. & Theor. I. de Parab. n. 224.)

(k) 309. Locus omnium punctorum P. eſt aliqua ex quinque coni ſectionibus, per Lem. XVIII. & ipſius ſcholium. Si locus

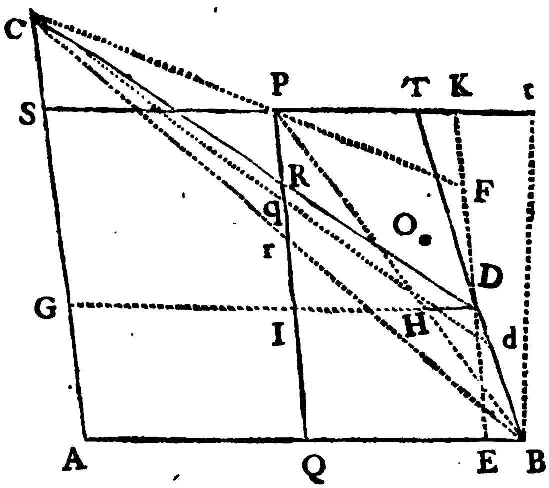
 fuo-

Atque ita problematis veterum de quatuor lineis ab *Euclide* incœpti & ab *Appollonio* continuati non calculus, ſed compoſitio geometrica, qualem veteres quærebant in hoc corollario exhibetur. (1)

LEMMA XX.

Si parallelogrammum quodvis ASPQ *angulis duobus oppoſitis* A *&* P *tangit ſectionem quamvis conicam in punctis* A *&* P; *&* *lateribus unius angulorum illorum infinitè productis* AQ, AS *occurrit eidem ſectioni conicæ in* B *&* C; *à punctis autem occurſuum* B *&* C *ad quintum quodvis ſectionis conicæ punctum* D *agantur rectæ duæ* BD, CD *occurrentes alteris duobus infinitè productis parallelogrammi lateribus* PS, PQ *in* T *&* R: *erunt ſemper abſciſſæ laterum partes* PR *&* PT *ad invicem in datâ ratione. Et contra, ſi partes illæ abſciſſæ ſunt ad invicem in datâ ratione, punctum* D *tanget ſectionem conicam per puncta quatuor* A, B, C, P *tranſeuntem.*

Caſ. 1. Jungantur *BP*, *CP* & à puncto *D* agantur rectæ duæ *DG*, *DE*, quarum prior *DG* ipſi *AB* parallela ſit & occurrat *PB*, *PQ*, *CA* in *H*, *I*, *G*; altera *DE* parallela ſit ipſi *AC* & occurrat *PC*, *PS*, *AB* in *F*, *K*, *E*: & erit (per lem. XVII.) rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$



fuerit linea recta ac proindè tangens ipſa AE, (303) recta BF, tangenti parallela nullibi occurret loco; ſi verò locus fuerit alia coni ſectio, recta BF, huic ſectioni occurret in puncto aliquo F, tumque diameter AG, vel utrinque terminabitur ad hyperbolas oppoſitas, quo caſu, puncta A & H, ſita erunt ad eaſdem partes ipſius G, vel claudetur Ellipſi aut circulo, & punctum G, inter A & H poſitum erit, vel tandem nullibi occurret loco qui proindè erit parabola. Porrò datis ſectionis conicæ vertice, diametro, hujus latere recto ac ordinatarum angulo ſectio deſcribi poteſt (per prop. 52. 53. 54. 55. lib. 1. conic. Apoll. ſive ex iis quæ in notâ 224. de Conicis tradita fuere).

(1) * Hoc veterum problema primus in ſuâ Geometriâ Carteſius per calculum analyticum generaliter reſolvit.

in ratione datâ. Sed eſt PQ ad DE (ſeu IQ) ut PB ad HB, ideoque ut PT ad DH; & viciſſim PQ ad PT ut DE ad DH. Eſt & PR ad DF ut RC ad DC, ideoque ut (IG vel) PS ad DG, & viciſſim PR ad PS ut DF ad DG; & conjunctis rationibus fit rectangulum PQ×PR ad rectangulum PS×PT ut rectangulum DE×DF ad rectangulum DG×DH, atque ideo in datâ ratione. Sed dantur PQ & PS, & propterea ratio PR ad PT datur. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Quod ſi PR & PT ponantur in datâ ratione ad invicem, (m) tum ſimili ratiocinio regrediendo, ſequetur eſſe rectangulum DE×DF ad rectangulum DG×DH in ratione datâ, ideoque punctum D (per lem. XVIII.) contingere conicam ſectionem tranſeuntem per puncta A, B, C, P. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi agatur BC ſecans PQ in r, & in PT capiatur Pt in ratione ad Pr quam habet PT ad PR: erit Bt tangens conicæ ſectionis ad punctum B. Nam concipe punctum D coire cum puncto B, ita ut chordâ BD evaneſcente, BT tangens evadat; & CD ac BT coincident cum CB & Bt.

Corol. 2. Et vice verſâ ſi Bt ſit tangens, & ad quodvis conicæ ſectionis punctum D conveniant BD, CD; erit PR ad PT ut Pr ad Pt. Et contra, ſi ſit PR ad PT ut Pr ad Pt: convenient, BD, CD ad conicæ ſectionis punctum aliquod D.

Corol. 3. Conica ſectio non ſecat conicam ſectionem in punctis pluribus quam quatuor. Nam, ſi fieri poteſt, tranſeant duæ conicæ ſectiones per quinque puncta A, B, C, P, O; eaſque ſecet recta BD in punctis D, d, & ipſam PQ ſecet recta Cd in q. Ergo PR eſt ad PT ut Pq ad PT; (n) unde PR & Pq ſibi invicem æquantur, contra hypotheſin.

LEM-

(m) * *Nam ſi PR & PT* ponantur *in ratione datâ*, erit quoque ob datas PQ, PS, rectangulum PQ × PR, ad rectangulum PS × PT, in ratione datâ; ſed per demonſtrata in 1°. caſu PQ × PR : PS × PT = DE × DF : DH × DG; ergò DE × DF ad DH × DG in ratione datâ.

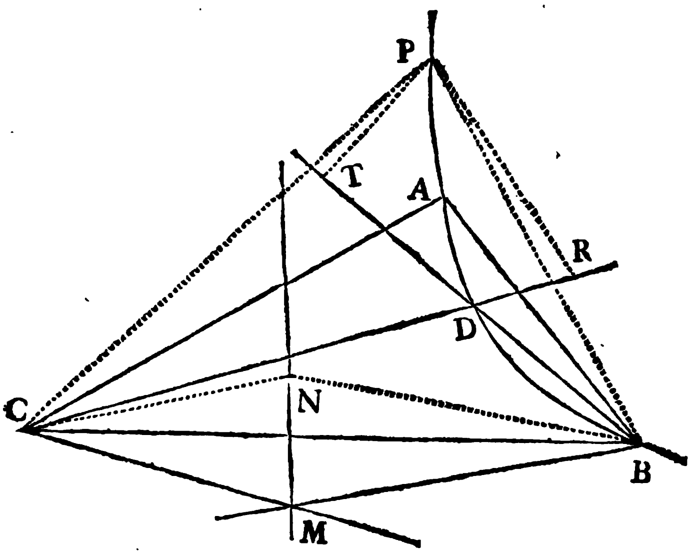
(n) * Cum enim duæ ſectiones conicæ ſe mutuò interſecent in punctis O & B, (per hyp.) duci poterit recta BD, quæ duos ſectionum arcus in B & O convenientes ſecet in punctis duobus, eritque per coroll. 1. Lem. XX. PR : PT = Pr : Pt = Pq : PT, adeóque PR : PT = Pq : PT, undè PR & Pq ſibi invicem æquantur, ac proindè Cd, coincidit cum CD, & punctum d, cum puncto D, (contra hyp.).

De Motu Corporum.

LEMMA XXI.

Si rectæ duæ mobiles & infinitæ BM, CM *per data puncta* B, C *ceu polos ductæ, concurſu ſuo* M *deſcribant tertiam poſitione datam rectam* MN; *& aliæ duæ infinitæ rectæ* BD, CD, *cum prioribus duabus ad puncta illa data* B, C *datos angulos* MBD, MCD *efficientes ducantur: dico quod hæ duæ* BD, CD *concurſu ſuo* D *deſcribent ſectionem conicam per puncta* B, C *tranſeuntem. Et vice verſâ, ſi rectæ* BD, CD *concurſu ſuo* D *deſcribant ſectionem conicam per data puncta* B, C, A *tranſeuntem, & ſit angulus* DBM *ſemper æqualis angulo dato* ABC, *anguluſque* DCM *ſemper æqualis angulo dato* ACB: *punctum* M *continget rectam poſitione datam.*

Nam in rectâ *MN* detur punctum *N*, & ubi punctum mobile *M* incidit in immotum *N*; incidat punctum mobile *D* in im-



motum *P*. Junge *CN*, *BN*, *CP*, *BP*, & a puncto *P* age rectas *PT*, *PR* occurrentes ipſis *BD*, *CD* in *T* & *R*, & facientes an-

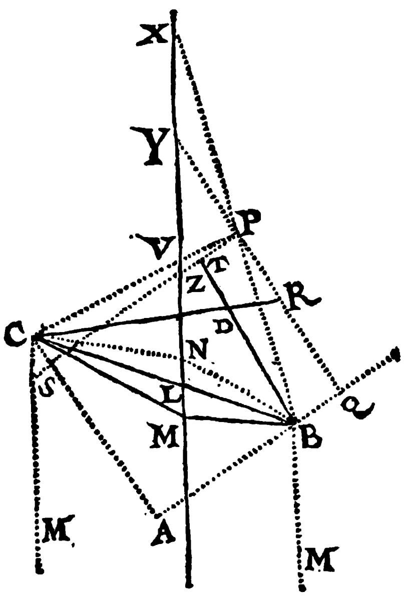
angulum *BPT* æqualem angulo dato *BNM*, & angulum *CPR* æqualem angulo dato *CNM*. Cum ergo (ex hypotheſi) æquales ſint anguli *MBD*, *NBP*, ut & anguli *MCD*, *NCP*; aufer communes *NBD* & *NCD*, & reſtabunt æquales *NBM* & *PBT*, *NCN* & *PCR*: ideoque triangula *NBM*, *PBT* ſimilia ſunt, ut & triangula *NCM*, *PCR*. Quare *PT* eſt ad *NM* ut *PB* ad *NB*, & *PR* ad *NM* ut *PC* ad *NC*. Sunt autem puncta *B*, *C*, *N*, *P* immobilia. Ergo *PT* & *PR* datam habent rationem ad *NM*, proindeque datam rationem inter ſe; atque ideo (per lem. xx. (o)) punctum *D*, perpetuus rectarum mobilium *BT* & *CR* concurſus, contingit ſectionem conicam, per puncta *B*, *C*, *P* tranſeuntem. *Q. E. D.*

Et

(o) *Atque ideo per Lemma XX.* &c. ut pateat Lemma XX. ad hanc demonſtrationem applicari, hæc ſunt ſupplenda conſtructioni Newtonianæ.

Concurrant lineæ BM, CM in puncto lineæ NM infinitè diſtanti, hoc eſt, ſint illi lineæ NM parallelæ, & ducantur lineæ BA, CA facientes cum illis lineis BM, CM angulos MBA, MCA datis MBD, MCD æquales. Dico lineas BA, CA fore parallelas lineis PT, PR ſecundum conſtructionem Newtonianam deſcriptis: Productis enim BP & PT (ſi neceſſe ſit) donec ſecent rectam datam MN in X & Z, erit angulus BPZ exterior reſpectu Trianguli PZX, ideoque æqualis angulis X & PZX, & angulus BNM erit exterior reſpectu Trianguli BNX ideoque æqualis angulis X & XBN, anguli vero BPZ & BNM æquales ſunt per conſtructionem Newton. ergo anguli X & PZX æquales ſunt angulis X & XBN, unde angulus PZX, quem facit linea PT cum recta NM eſt æqualis angulo XBN ſive angulo dato MBD quem facit linea BA cum linea BM ipſi NM parallela, ergo per naturam Parallelarum, eſt linea PT parallela lineæ BA.

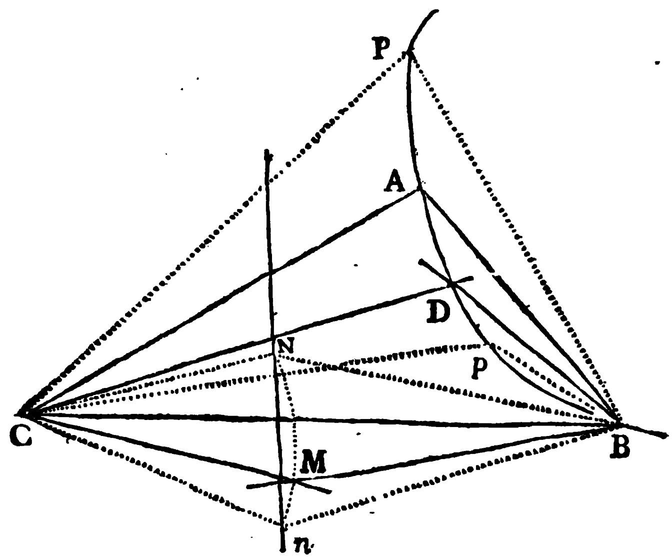
Eodem planè modo demonſtrabitur lineam CA eſſe Parallelam lineæ PR. Quibus poſitis, ſit ſectio Conica per puncta B, C, P & A tranſiens, lineæ BD, CD juxta conditiones in Lemmate præſcriptas ductæ, concurſu ſuo D percurrent eam ſectionem Conicam: Productis enim lineis PT PR, donec ſecent lineas CA, BA, in S & Q fiet *Parallelogrammum ASPQ*,



quod in Angulis ſuis oppoſitis A & P tangit ſectionem conicam & lateribus anguli A productis occurrit eidem ſectioni in B & C, & lineæ BD, CD à punctis occurſuum B & C ductæ (ſecundum conditiones Lemmatis hujuſce XXI.) *abſcindunt à Parallelogrammi lateribus PS, PQ partes PT, PR quæ ſunt ad invicem in datâ ratione* (per demonſtrationem Newtonianam hujuſce) *ergo* (per 2. caſum Lem. XX.) *punctum D tangit ſectionem Conicam per puncta quatuor A, B, C, P tranſeuntem.*

DE MOTU CORPORUM.

Et contra, ſi punctum mobile D contingat ſectionem conicam tranſeuntem per data puncta B, C, A, & ſit angulus DBM ſemper æqualis angulo dato ABC, & angulus DCM ſemper æqualis angulo dato ACB, & ubi punctum D incidit ſucceſſivè in duo quævis ſectionis puncta immobilia p, P, punctum mobile M incidat ſucceſſivè in puncta duo immobilia n, N: per



eadem n, N, agatur recta nN, & hæc erit locus perpetuus puncti illius mobilis M. Nam, ſi fieri poteſt, verſetur punctum M in lineâ aliquâ curvâ. Tanget ergo punctum D ſectionem conicam per puncta quinque B, C, A, p, P tranſeuntem, ubi punctum M perpetuò tangit lineam curvam. Sed & ex jam demonſtratis tanget etiam punctum D ſectionem conicam per eadem quinque puncta B, C, A, p, P, tranſeuntem, (p) ubi punctum

(p) * *Ubi punctum M, perpetuò tangit lineam rectam* n N &c. cum enim angulorum datorum A B C, A C B, latera duo coincidunt cum rectâ C B, punctum A, aliorum laterum B A, C A, interſectio, locatur in ſectione conicâ per polos C, B, tranſeunte; dum verò latera duo B n, & C n, B N, & C N, ſeſe interſecant in n, N, aliorum laterum B p, & C p, B P & C P interſectiones p, P, ſunt in eâdem ſectione conicâ ex demonſtratis.

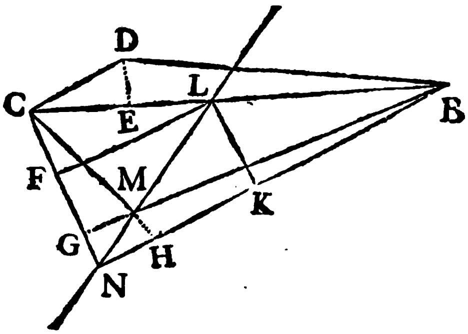
310.

tum *M* perpetuò tangit lineam rectam. Ergo duæ ſectiones conicæ tranſibunt per eadem quinque puncta, contra corol. 3. lemmat. xx. Igitur punctum *M* verſari in lineâ curvâ abſurdum eſt. *Q. E. D.* (q)

(q) 310. In hâc organicâ ſectionum conicarum deſcriptione, angulorum circà polos mobilium crura utrinque producantur, ut cum duo crura v. gr. C P, B P ſuprà lineam C B divergunt, infrà eandem producta convergant.

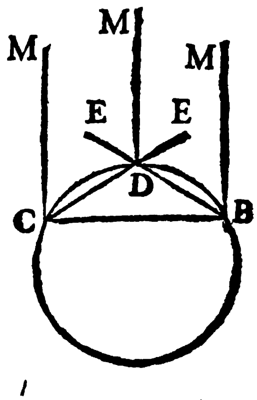
Si recta N M, per polorum alterutrum C, vel B, tranſeat, aut ſi anguli B C D, C B D, ſimul evaneſcant, punctum D deſcribet lineam rectam. Nam in 1°. caſu angulorum datorum unus immobilis manet, dum alter circà polum ſuum rotatur & crurum ſuorum cum immobilis anguli cruribus interſectione lineam rectam deſcribit; Si enim recta N M cum anguli dati D C M crure altero C M coincidat, immobili manente angulo D C M, alterius D B M crura rectas M C, C D perpetuò interſecabunt; deindè ſi crure B M, coincidente cum C B, ut rectam C M poſitione datam perpetuò ſecet in C, immobilis maneat angulus D B M, alterius D C M circà polum C rotati crus C D rectam B D perpetuò interſecabit.

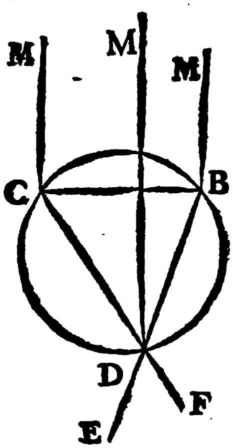
In 2°. caſu anguli B C N, C B N circà polos C, B mobiles, crurum duorum C N, B N concurſu, rectam N M L poſitione datam & aliorum crurum C B, B C ſeu C D, B D concurſu D lineam quamlibet percurrant, ſintque N punctum fixum M & D puncta mobilia; ductis ex puncto L dato ad latera data C N, B N perpendicularibus L F, L K ex puncto mobili M ad eaſdem perpendicularibus M G, M H & ex puncto D ad rectam C B, perpendiculari D E; ſit $CE = x$, $DE = y$, $CB = a$, ac proinde $EB = a - x$, $MN = z$, $LN = b$, $LF = c$, $FN = d$ $CN = e$, $LK = f$, $NK = h$, $NB = g$; & ob triangula N M G, N F L ſimilia, $NL\ (b) : LF\ (c) = MN\ (z) : GM = \frac{cz}{b}$, & $LN\ (b) : FN\ (d) = MN\ (z) : GN = \frac{dz}{b}$, adeòque $CG = CN - GN$



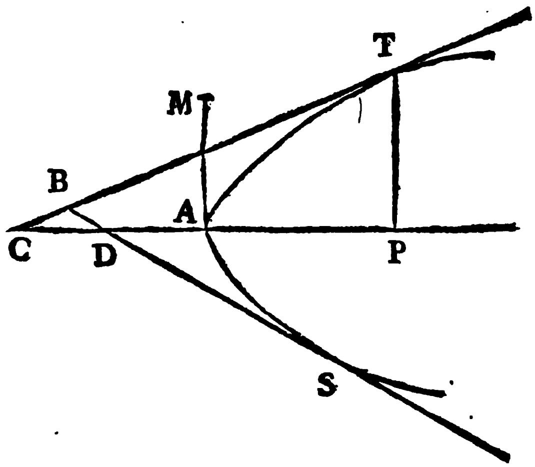
$= \frac{be - dz}{b}$; porrò ob angulos æquales D C E, M C G, & D E C, M G C, triangula D C E, M C G ſimilia ſunt; quarè $CG\ (\frac{be-dz}{b}) : GM\ (\frac{cz}{b}) = CE\ (x) : DE\ (y)$. Undè $czx = bey - dzy$, & $z = \frac{bey}{cx + dy}$; ob triangula N L K, N M H, ſimilia $NL\ (b) : LK\ (f) = NM\ (z) : MH = \frac{fz}{b}$, & $NL\ (b) : NK\ (h) = MN\ (z) : NH = \frac{hz}{b}$. undè $BH = \frac{gb - hz}{b}$; ob ſimilia triangula B E D, B H M, $BH\ (\frac{gb-hz}{b}) : MH\ (\frac{fz}{b}) = BE\ (a-x) : DE\ (y)$ quarè $faz - fzx = gby - hzy$, & $z = \frac{gby}{fa + hy - fx} = \frac{bey}{cx + dy}$, adeòque $gcx + gdy = fae + hey - fex$. Cum igitur æquatio ſit unius dimenſionis, locus punctorum D, eſt linea recta.

De Motu Corporum.

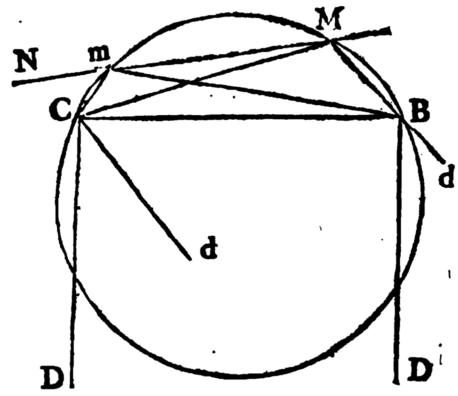




311. Si angulorum mobilium M C D, M B D crura C M, B M ſibi invicem parallela maneant, ſeu, ſi recta N M ad diſtantiam infinitam abeat, crura alia C D, B D concurſu ſuo D circulum deſcribent, & contrà. Concurrant enim C M, D M, B M ad diſtantiam infinitam, & angulus M C D æqualis erit angulo M D F, ac M B D æqualis M D E; quoniam igitur dati ſunt anguli M C D, M B D dabuntur quoque anguli M D F, M D E ac etiam angulus B D F & ei æqualis C D B. quarè cum curva concurſu D deſcripta, neceſſariò tranſeat per puncta data C, & B, patet punctum D ſeu verticem anguli dati C D B chordæ C B inſiſtentis eſſe in circuli peripheriâ. Et contrà, ſi congreſſus D, tangat circulum per puncta C, & B tranſeuntem, dabuntur tres anguli C D B, M C D, M B D atque adeò in quadrilatero M C D B M, cujus duo latera C M, B M concurrunt in M, dabitur angulus C M B, quod fieri nequit, niſi recta N M ad diſtantiam infinitam abeat, hoc eſt, niſi parallela fiant crura C M, B M.



312. Lemma. Si duæ rectæ parabolam tangant, & puncta contactuum in infinitum abeant, binæ tangentes ſe mutuò interſecant ad angulum infiniteſimum & evadunt parallelæ axi parabolæ. Sit enim parabolæ axis C P, vertex A, C T tangens in T & axem ſecans in C, T P ad axem ordinata, A M latus rectum axis, erit $CP = 2AP$, & $AP : PT = PT : AM$, adeóque $2AP\ (CP) : PT = 2PT : AM$. Si punctum contactûs T, in infinitum abeat, erit 2 P T, infinita reſpectu A M, & proindè C P, infinita reſpectu P T, hoc eſt, ſinus totus C P infinitus evadit reſpectu tangentis P T anguli T C P, quarè angulus ille infiniteſimus eſt, & tangens axi C P parallela, altera tangens B S, axem ſecet in D, & tangentem C T in B, & punctum contactûs S in infinitum abeat; erit angulus S D P infiniteſimus & angulus T B D duobus internis atque infiniteſimis B C D, B D C æqualis, erit quoque infiniteſimus.

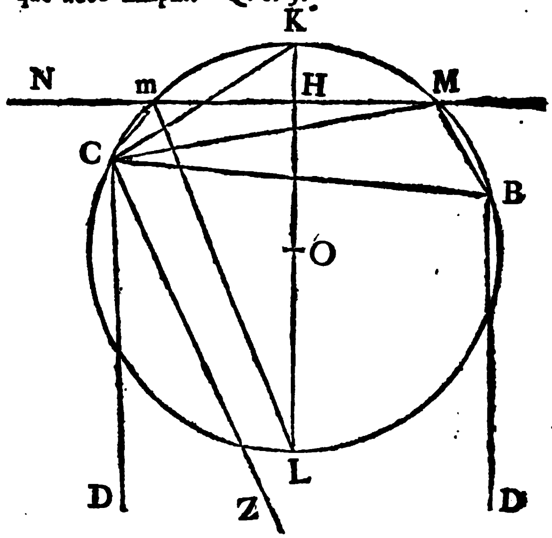


313. Super datâ rectâ C B, deſcribatur ſegmentum circuli B M m C, quod capiat angulum B M C, datorum M C D, M B D ſupplementum ad quatuor rectos & compleatur circulus. Si recta data N M, quam in deſcriptione ſectionis conicæ percurrit crurum B M C M concurſus M hunc circulum ſecet, deſcribetur hyperbola; ſi recta N M circulum contingat, deſcribetur parabola; ſi recta N M circulo nullibi occurrat, deſcribetur ellipſis.

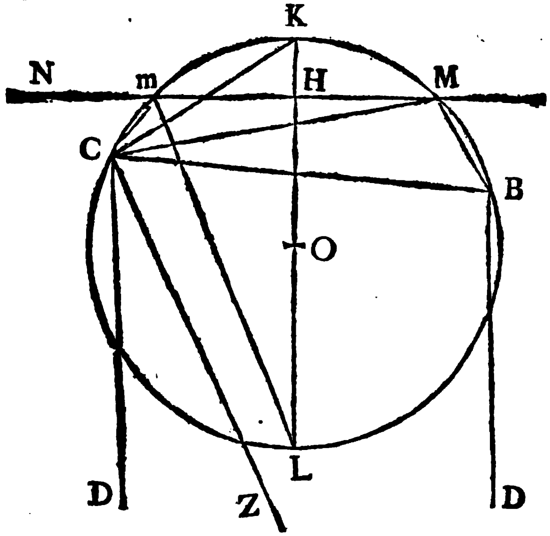
Caſ. 1. Recta N M circulum ſecet in punctis m, M, & crura C d, B d, & C D, B D, ſibi invicem parallela erunt ſive concurrent ad diſtantiam infinitam; nam cum in quadrilatero DCMBD dCmBd angulus M vel m ſit complementum angulorum C & B ad quatuor Rectos, angulus ad D vel d, evaneſcit, ideoque lineæ CD, BD erunt parallelæ. Cum verò in omni Sectione Conicâ inveniri poſſit Tangens parallela chordæ cuivis datæ (per Lemma IV. de Conicis pag. 129.) ductæ intelligantur Tangentes Sectionis chordis C D C d Parallelæ, illæ Tangentes facient inter ſe angulum æqualem angulo D c d quem faciunt inter ſe illæ chordæ, & puncta contactuum erunt ad diſtantiam infinitam, nulla verò eſt ſectio conica præter hyperbolam cujus ad infinitam diſtantiam tangentes angulum finitum communi interſectione faciant; in Ellipſi enim nulla eſt tangens ad diſtantiam infinitam, & in parabolâ hujuſmodi tangentes angulum infiniteſimum duntaxat, facerent (per Lemma ſuperius 313). Si igitur recta M N circulum ſecet, deſcribetur hyperbola cujus aſymptoti ſeu tangentes ad diſtantiam infinitam rectis C D, C d parallelæ ſunt & ſe mutuò interſecant in centro trajectoriæ. Q. e. 1.

Caſ. 2. Quoniam angulus m C M, in 1°. caſu æqualis eſt aſymptotorum angulo DCd, ob æquales D C M, d C m; ſi manentibus circulo & diſtantiâ polorum C B, puncta interſectionum m, M ad ſe mutuò accedant, decreſcet angulus D C d, & tandem punctis m, M coeuntibus, hoc eſt, ſecante M N in tangentem mutatâ angulus ille evaneſcet, dum rectæ C D, B D manent parallelæ, & ad diſtantiam infinitam cum trajectoriâ conveniunt. In hoc igitur caſu duæ rectæ, ipſis C D, C d parallelæ & trajectoriam ad diſtantiam infinitam tangentes, ſe mutuò interſecant in angulo infiniteſimo, ſeu in unicam lineam coeunt axi trajectoriæ parallelam, & proindè hyperbola caſus primi mutatur in parabolam (312). Q. e. 2.

Caſ. 3. Si recta N M nullibi circulo occurrat, rectæ B D, C D quarum concurſu D ſectio conica deſcribitur nunquam poſſunt fieri parallelæ, & proindè curva non abit in infinitum, ſed in ſe redit, eſtque adeò Ellipſis. Q. e. 3.

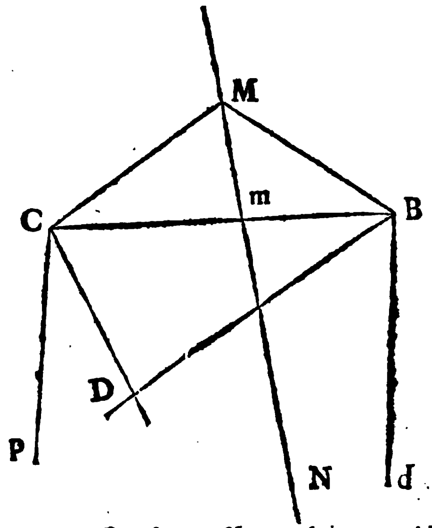


314. Coroll. 1. Ex his axes trajectoriæ facilè determinantur. Sit O centrum circuli C m M B ut ſuprà (313) deſcripti, ab hoc centro in rectam N M cadat perpendicularis O H circulo occurrens in pun-



punctis K & L, & rectæ N M in H, jungatur C K, & fiat angulus K C Z æqualis angulo mobili M C D, aut quod idem eſt, anguli M C D crus C M ducatur ad poſitionem C K, & alterum crus C Z erit parallelum axi majori, & perpendiculare axi minori trajectoriæ, modò punctum K ſit rectæ M N propius quam punctum oppoſitum L; nam arcus K m, K M ſunt æquales & angulus $KCm = KCM = \frac{1}{2} mCM = DCZ$; cumque m C M æqualis ſit angulo quo aſymptoti ſe mutuò interſecant, erit DCZ dimidium illius anguli, adeóque C Z parallela axi qui aſymptotorum angulum biſecat; & ſi punctum K regulæ propiùs ſit quam punctum oppoſitum L, erit angulus m C M acutus, ac proindè axis major qui angulum aſymptotorum acutum biſecat, erit rectæ C Z parallelus, axis verò minor huic rectæ perpendicularis; undè ſi detur trajectoriæ centrum dabuntur axes, & ſi deſcripta ſit trajectoria, invenitur axis poſitio, ductâ ad C Z normali ad trajectoriam utrinque terminatâ quam axis perpendiculariter & biſariam dividit; inventâ autem axium poſitione, habetur centrum in eorum interſectione communi. Superior autem conſtructio non ſolum hyperbolæ convenit, ſed & parabolæ in quam hyperbola mutatur, dum puncta m, M coeunt, atque etiam Ellipſi in quam vertitur parabola, dum recta M N, extrà circulum tranſit.

315. Coroll. 2. Axium trajectoriæ quadrata ſunt ad invicem ut K H, ad L H; nam axes ſunt inter ſe ut coſinus dimidii anguli aſymptotorum ad ſinum dimidii ejuſdem anguli; eſt verò K C m qui æqualis eſt dimidio anguli aſymptotorum, etiam æqualis angulo m L K, adeóque L H eſt ad H m ut axis ad axem; ſed $LH : Hm = Hm : KH$, ac proindè $LH : KH = LH^2 : Hm^2$. Ergò quadrata axium ſunt ad invicem ut L H ad K H.

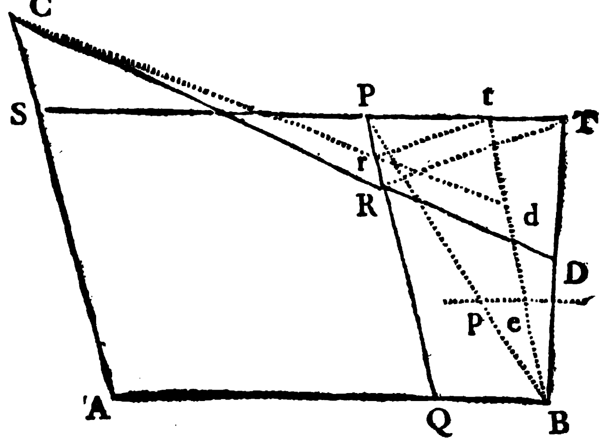


316. Corol. 3. Si angulorum mobilium ſumma duobus rectis æqualis fuerit, rectæ B D, C D fiunt parallelæ, quandò punctum M pervenit ad m, ubi recta N M occurrit rectæ C B productæ, ſi opus eſt, & quandò M abit in infinitum, cum in utroque caſu evaneſcat angulus B M C. Si itaque linea M N, in hâc hypotheſi alicubi occurrat rectæ B C productæ, duæ rectæ trajectoriam in diſtantiâ infinitâ contingent, & ſe mutuò ad angulum datum interſecabunt, adeóque deſcribetur hyperbola; at ſi M N rectæ C B non occurrat, ſed ipſi parallela ſit, rectæ C D, B D non evadent parallelæ, niſi quando punctum M abit in infinitum, ac proindè trajectoria erit parabola. Quoniam igitur recta M N rectæ C B productæ occurrit,

PROPOSITIO XXII. PROBLEMA XIV.

Trajectoriam per data quinque puncta deſcribere.

Dentur puncta quinque *A*, *B*, *C*, *P*, *D*. Ab eorum aliquo *A* ad alia duo quævis *B*, *C*, quæ poli nominentur, age rectas *AB*, *AC*, hiſque parallelas *TPS*, *QRP* per punctum quartum *P*. Deinde à polis duobus *B*, *C* age per punctum quintum *D*, infinitas duas *BDT*, *CRD*, noviſſimè ductis *TPS*, *PRQ* (priorem priori & poſteriorem poſteriori) occurrentes in *T* & *R*. Denique de rectis *PT*, *PR*, actâ rectâ *tr* ipſi *TR* parallelâ, abſcinde quaſvis *Pt*, *Pr* ipſis *PT*, *PR* proportionales; & ſi per earum terminos *t*, *r* & polos *B*, *C* actæ *Bt*, *Cr* concurrant in *d*, locabitur punctum illud *d* in trajectoriâ quæſitâ. Nam punctum illud *d* (per lem. xx.) verſatur in conicâ ſectione per puncta quatuor *A*, *B*, *C*, *P* tranſeunte; & lineis *Rr*, *Tt* evaneſcentibus, coit punctum *d* cum puncto *D*. Tranſibit ergo ſectio conica per puncta quinque *A*, *B*, *C*, *P*, *D*. *Q. E. D.*



Idem

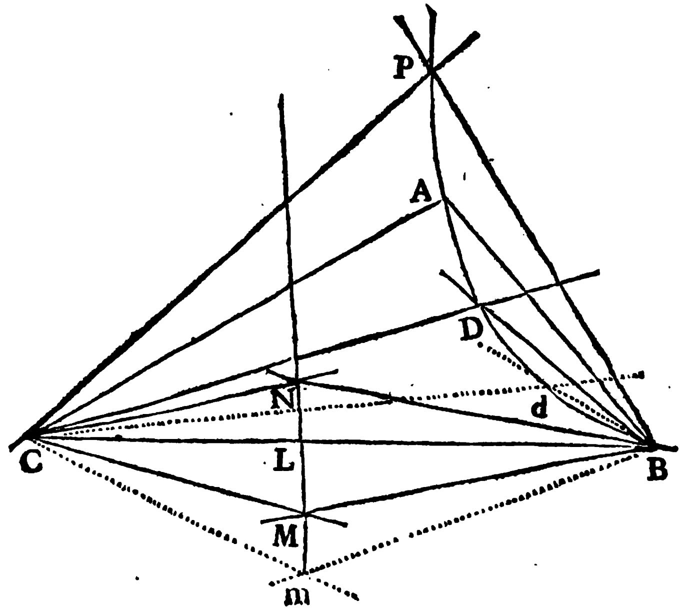
occurrit, vel ipſi parallela eſt, patet nunquam poſſe Ellipſim deſcribi, ſi angulorum mobilium ſumma, duobus rectis æqualis fuerit.

Scholium. Si crura CM, BM concurſu ſuo M percurrant ſectionem conicam per polum alterum C tranſeuntem, crura duo reliqua CD, BD concurſu ſuo D deſcribunt curvam ſecundi generis per polum alterum B tranſeuntem, præterquam ubi anguli BCD, CBD ſimul evaneſcunt, quo caſu punctum D deſcribet ſectionem conicam per polum C tranſeuntem, & eâdem methodo curvas varias tertii, quarti, ſuperiorum generum deſcribere licet. Sed hæc ad præſens inſtitutum non pertinent, qui plura deſideraverit legat Geometriam Organicam Celeberrimi Matheſeos Profeſſoris Colini Mac-Laurin, ex quo eximio opere non pauca excerpſimus.

De Motu Corporum.

Idem aliter.

E punctis datis junge tria quævis *A*, *B*, *C*; & circum duo eorum *B*, *C*, ceu polos, rotando angulos magnitudine datos *ABC*, *ACB*, applicentur crura *BA*, *CA* primò ad punctum *D*, deinde ad punctum *P*, & notentur puncta *M*, *N* in qui-



bus altera crura *BL*, *CL* caſu utroque ſe decuſſant. Agatur recta infinita *MN*, & rotentur anguli illi mobiles circum polos ſuos *B*, *C*, eâ lege ut crurum *BL*, *CL* vel *BM*, *CM* interſectio, quæ jam ſit *m*, incidat ſemper in rectam illam infinitam *MN*; & crurum *BA*, *CA*, vel *BD*, *CD*, interſectio, quæ jam ſit *d*, trajectoriam quæſitam *PADdB* delineabit. Nam punctum *d* (per lem. XXI.) continget ſectionem conicam per puncta *B*, *C* tranſeuntem; & ubi punctum *m* accedit ad puncta *L*, *M*, *N*, punctum *d* (per conſtructionem) accedet ad puncta *ADP*. Deſcribetur itaque ſectio conica tranſiens per puncta quinque *A*, *B*, *C*, *P*, *D*. *Q. E. F.*

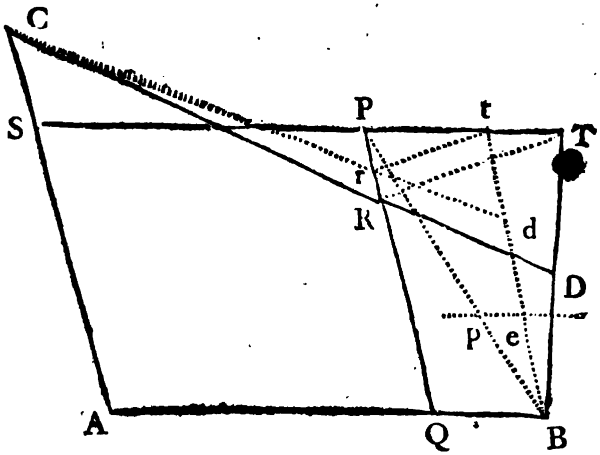
Corol.

Corol. 1. (r) Hinc recta expeditè duci poteſt, quæ trajectoriam quæſitam in puncto quovis dato *B* continget. Accedat punctum *d* ad punctum *B*, & recta *B d* evadet tangens quæſita.

Corol. 2. (ſ) Unde etiam trajectoriarum centra, diametri & latera recta inveniri poſſunt, ut in corollario ſecundo lemmatis XIX.

Scholium.

Conſtructio prior evadet paulo ſimplicior jungendo *B P*, & in eâ, ſi opus eſt, productâ capiendo *Bp* ad *BP* ut eſt *PR* ad *PT*; & per *p* agendo rectam infinitam *p e* ipſi *SPT* parallelam, & in eâ (t) capiendo ſemper *p e* æqualem *P r*; & agendo rectas *B e*, *C r* concurrentes in *d*. Nam cum ſint *P r* ad *P t*, *P R* ad *PT*, *pB* ad *PB*, *p e* ad *P t* in eâdem ratione; erunt *p e* & *P r* ſemper æquales. Hâc methodo puncta trajectoriæ inveniuntur expeditiſſimè, niſi mavis curvam, ut in conſtructione ſecundâ, deſcribere mechanicè.



PRO-

(r) 317. Tangens in B, coincidit cum crure B d anguli mobilis d B m, dum alterius anguli d C m, crus C d, coincidit cum rectâ C B. Nam in hoc caſu, chorda B d evaneſcit & poſitione congruit cum tangente; undè tangens per punctum quodvis datum expeditè duci poteſt etiam nondùm deſcriptâ ſectione conicâ, ſi punctum illud datum pro polo uſurpetur.

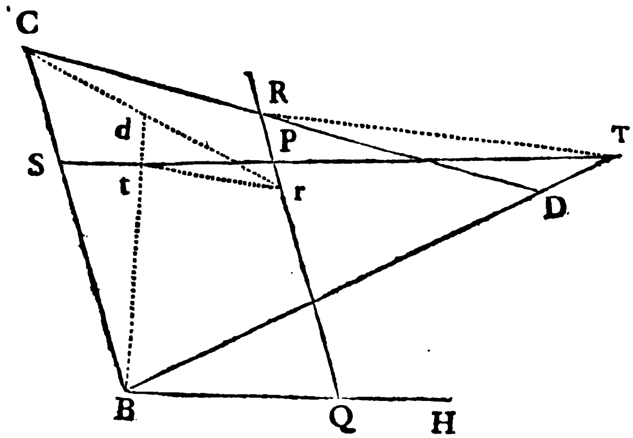
(ſ) 318. Per quodvis punctorum datorum puta h, duc trajectoriæ tangentem, & per aliud quodvis punctum datum C, duc tangenti parallelam occurrentem trajectoriæ jam deſcriptæ in puncto aliquo; aut ſi deſcripta non fuerit trajectoria circà polos, rotentur anguli mobiles, donec crurum C D, B D concurſus D, reperiatur in rectâ tangenti parallelâ; vel tandem punctum illud in quo recta tangenti parallela trajectoriæ occurrit, geometricè quæratur per lem. XIX. Nam (vid. fig. & demonſtr. Lem. XX) cùm data ſint quinque puncta C, A, B, D, P, dabitur ratio conſtans rectangulorum PQ×PR, PS×PT, hoc eſt, rectangulorum DE×DF, DG×DH, adeóque (per Lem. XIX.) invenietur punctum concurſus trajectoriæ cum lineâ per punctum datum C ductâ. Cætera fiant ut in coroll. 2°. Lem. XIX. poſſent etiam trajectoriarum axes & centra inveniri eo modo quo docuimus num. 314.

(t) * Hoc eſt linearum p e, P r, alterutra ad arbitrium capiatur, & altera aſſumptæ æqualis fiat, aganturque rectæ B e, C r, concurrentes in d; nam (per priorem conſtr.) P r : P t = P R : P T = p B : P B, (per hanc conſtr.); & junctâ B t, ob parallelas p e, P t, erit p B : P B = p e : P t, atque adeò P r : P t = p e : P t, unde P r = p e.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA XV.

Trajectoriam deſcribere, quæ per data quatuor puncta tranſibit, & rectam continget poſitione datam.

Caſ. 1. Dentur tangens *HB*, punctum contactus *B*, & alia tria puncta *C*, *D*, *P*. Junge *BC*, & agendo *PS* parallelam rectæ *BH*, & *PQ* parallelam rectæ *BC*, comple parallelogrammum *BSPQ*. Age *BD* ſecantem *SP* in *T*, & *CD* ſecantem



PQ in *R*. Denique, agendo quamvis *tr* ipſi *TR* parallelam, de *PQ*, *PS* abſcinde *Pr*, *Pt* ipſi *PR*, *PT* proportionales reſpectivè; & actarum *Cr*, *Bt* concurſus *d* (per lem. xx.) (u) incidet ſemper in trajectoriam deſcribendam.

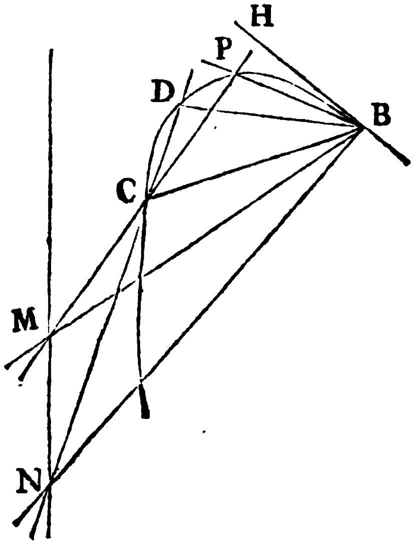
Idem aliter.

Revolvatur tum angulus magnitudine datus *CBH* circa polum *B*, tum radius quilibet rectilineus & utrinque productus *DC* circa polum *C*. Notentur puncta *M*, *N*, in quibus anguli crus *BC*

(u) * Demonſtratio clara fit, ſi in figurâ Lem. XX; punctum B accedat ad punctum A, & recta A B Q ſectionis conicæ tangens evadat.

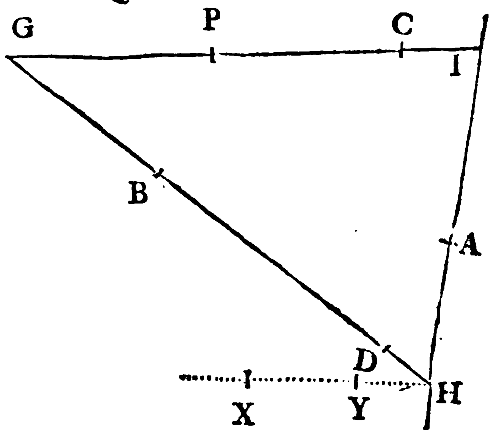
* Nam

BC ſecat radium illum, ubi crus alterum *BH* concurrit cum eodem radio in punctis *P* & *D*. Deinde ad actam infinitam *MN* concurrant perpetuo radius ille *CP* vel *CD* & anguli crus *BC*, & cruris alterius *BH* concurſus cum radio delineabit trajectoriam quæſitam.



Nam ſi in (x) conſtructionibus problematis ſuperioris accedat punctum *A* ad punctum *B*, lineæ *CA* & *CB* coincident, & linea *AB* in ultimo ſuo ſitu fiet tangens *BH*; atque ideo conſtructiones ibi poſitæ evadent eædem cum conſtructionibus hic deſcriptis. Delineabit igitur cruris *BH* concurſus cum radio ſectionem conicam per puncta *C*, *D*, *P* tranſeuntem, & rectam *BH* tangentem in puncto *B*. *Q. E. F.*

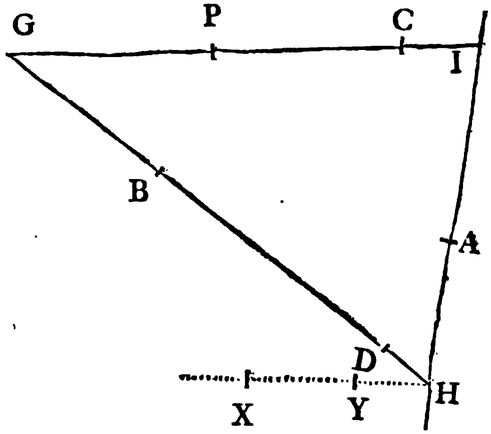
Caſ. 2. Dentur puncta quatuor *B*, *C*, *D*, *P* extra tangentem *HI* ſita. Junge bina lineis *BD*, *CP* concurrentibus in *G*, tangentique occurrentibus in *H* & *I*. Secetur tangens in *A*, ita ut ſit *HA* ad *IA*, ut eſt rectangulum ſub mediâ proportionali inter *CG* & *GP* & mediâ proportionali inter *BH* & *HD*,



(x) * Nam in alterâ problematis XXII. ſolutione ABC, ACB, ſunt anguli circà polos C & B mobiles; undè ſi punctum A accedat ad punctum B, coincidunt crura CA, CB, & unicam rectam conſtituunt, evaneſcente angulo ACB, remanet verò angulus ABC quem tangens AB cum BC continet; quarè dum anguli ABC, crus BC cum radio AC, ſi neceſſum ſit, producto, perpetuò concurrit in rectâ aliquâ poſitione datâ ut NM, cruris AB & radii CA concurſus trajectoriam deſcribit.

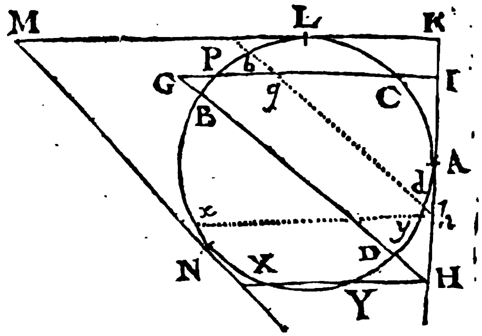
DE MOTU CORPORUM.

ad rectangulum ſub mediâ proportionali inter *D G* & *G B* & mediâ proportionali inter *P I* & *I C*; & erit *A* punctum contactus. Nam ſi rectæ *P I* parallela *H X* trajectoriam ſecet in punctis quibuſvis *X* & *Y*: erit (ex conicis) (y) punctum *A* ita locandum, ut fuerit *HA quad.* ad *AI quad.* in ratione compoſitâ ex ratione rectanguli *XHY* ad rectangulum *BHD*, ſeu rectanguli *CGP* ad rectangulum *DGB*, & ex ratione rectanguli *BHD* ad rectangulum *PIC*. Invento autem contactus puncto *A*, deſcribetur trajectoria ut in caſu primo. *Q. E. F.*



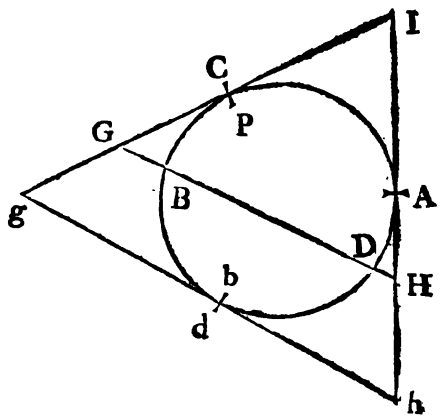
Capi autem poteſt punctum *A* vel inter puncta *H* & *I*, vel extra; & perinde trajectoria dupliciter deſcribi.

(y) 319. *Erit ex Conicis*; ſcilicet ſi A ſit punctum contactus erit (per Cor. 3. Lem. III. de Conic. p. 119.) HA^2 ad AI^2 ut rectangulum XHY ad rectangulum PIC, ſed ratio rectanguli XHY ad rect. PIC, poteſt conſiderari ut compoſita ex ratione rect. XHY ad rect. BHD, & ex ratione ejuſdem rect. BHD ad rect. PIC. Eſt verò rect. XHY ad rect. BHD ut rect. CGP ad rect. DGB (per Lem. III. de Conic. p. 117.) ſunt enim HX, GC, duæ Parallelæ in Sectione Conicâ ductæ & per tertiam lineam GH ſectæ, ideoque factum partium HX, HY Parallelæ HX, quæ ſumuntur ab interſectione H ad curvæ puncta X & Y, eſt ad $BH \times HD$ factum partium lineæ ſecantis GH ſumptarum ab interſectione H ad puncta curvæ B & D, ſicut factum partium alterius Parallelæ $CG \times GP$, ad $DG \times GB$ factum partium correſpondentium lineæ ſecantis. Eſt ergo ratio HA^2



ad AI^2 æqualis rationi compoſitæ ex ratione rect. CGP ad rect. DGB &, rect. BHD ad rect. PIC ideoque eſt HA: ad AI ut $\sqrt{CGP} \times \sqrt{BHD}$ ad $\sqrt{DGB} \times \sqrt{PIC}$, ſed Radices quadratæ illorum Rectangulorum ſunt ipſæ mediæ

dīæ proportionales inter illorum latera; Ergo *eſt HA ad AI ut eſt rect. ſub media proportionali inter CG & GP & media proportionali inter BH & HD ad rect. ſub media proportionali inter DG & GB & media proportionali inter PI & IC.* Si itaque HI in A ſecetur in eâ ratione, habebitur punctum contactus.



320. Coroll. 1. Si ex punctis quibuſlibet H & I rectæ HI ſectionem conicam tangentis in A, agantur duæ quævis rectæ IG, HG convenientes in G, & ſectionem conicam ſecantes in punctis quatuor C, P, D, B; factum $CGP \times BHD$, erit ad factum $DGB \times PIC$, in datâ ratione, nempè in ratione HA^2, ad AI^2; Ducta enim linea HYX lineæ ICP parallela, erit ut prius (per Lem. III. de Conic. p. 117.) $DGB : BHD = CGP : XHY = \frac{CGP \times BHD}{DGB}$, eſt verò $HA^2 : AI^2 = HXY \left(\frac{CGP \times BHD}{DGB}\right) : PIC$ (per Cor. 3. ejuſdem Lem.) ergo $HA^2 : AI^2 = CGP \times BHD : DGB \times PIC$.

Quod ſi linea HYX, extra ſectionem cadat aut eam tangat, ex puncto quovis h lineæ HAI, ducatur alia linea hyx lineæ ICP parallela quæ ſectioni occurrat in x & y, & ducatur alia linea hdbg lineæ HDBG Parallela ita ut ſectioni occurrat in d & b, & lineæ PC in g, habebiturque ut prius $hA^2 : AI^2 = CgP \times bhd : dgb \times PIC$. Sed cum ob parallelas GH, bh ſit (per Lemma 3um. de Con. p. 117.) $CgP : dgb = CGP : DGB$, & (per Cor. 3. ejuſd. Lem.) ſit $hA^2 : bhd = HA^2 : BHD$ ſubſtitutis his ultimis rationibus loco priorum in proportione $hA^2 : AI^2 = CgP \times bhd : dgb \times PIC$ fiet $HA^2 : AI^2 = CGP \times BHD : DGB \times PIC$ ut prius. Undè ſatis patet demonſtrationem conſtructionis univerſalem eſſe, quomodocumque rectæ GI, GH flectantur, adeóque etiam valere, ubi recta HX ſectioni non occurrit.

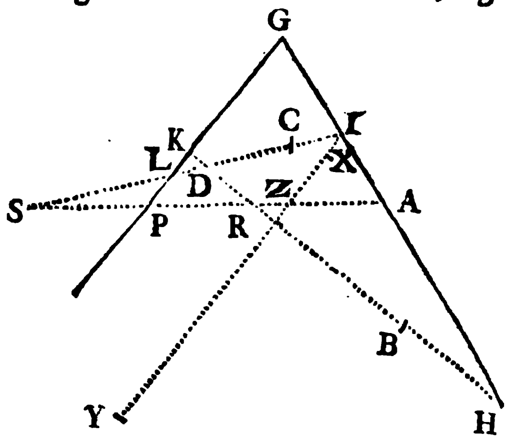
321. Coroll. 2. Coeuntibus punctis C, P, recta IG fit tangens in C & $GP = GC$, $CI = PI$, adeóque $CGP = GC^2$, & $PIC = CI^2$; unde in hoc caſu $HA^2 : AI^2 = GC^2 \times BHD : CI^2 \times DGB$. Coeuntibus quoque punctis B & D, & ſecante GH, in tangentem gh, mutatâ erit $hA^2 : AI^2 = gC^2 \times dh^2 : CI^2 \times gd^2$, ac proindè $hA : AI = gC \times dh : CI \times gd$; & $hA \times CI \times gd = AI \times gC \times dh$. Quare ſi ducantur tres rectæ ſectionem conicam tangentes & inter ſe concurrentes in punctis I, g, h, facta ex tribus tangentium partibus inter concurſum & contactuum puncta alternatim ſumptis AI, Cg, dh, & Ah, IC, gd, ſunt æqualia.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XXIV. PROBLEMA XVI.

Trajectoriam deſcribere, quæ tranſibit per data tria puncta, & rectas duas poſitione datas continget.

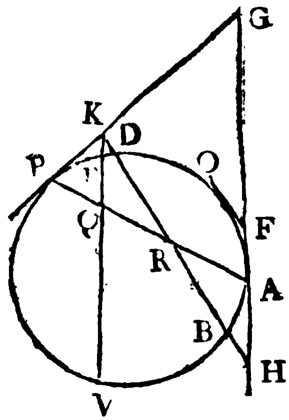
Dentur tangentes *HI*, *KL* & puncta *B*, *C*, *D*. Per punctorum duo quævis *B*, *D* age rectam infinitam *BD* tangentibus occurrentem in punctis *HK*. Deinde etiam per alia duo quævis *C*, *D* age infinitam *CD* tangentibus occurrentem in punctis *I*, *L*. Actas ita ſeca in *R* & *S*, ut ſit *HR* ad *KR* ut eſt media proportionalis inter *BH* & *HD* ad mediam proportionalem inter *BK* & *KD*; & *IS* ad *LS* ut eſt media proportionalis inter *CI* & *ID* ad mediam proportionalem inter *CL* & *LD*. Seca autem pro lubitu vel inter puncta *K* & *H*, *I* & *L*, vel extra eadem; dein age *RS* ſecantem tangentes in *A* & *P*, & erunt *A* & *P* puncta contactuum. Nam ſi *A* & *P* ſupponantur eſſe puncta contactuum alicubi in tangentibus ſita; & per punctorum *H*, *I*, *K*, *L* quodvis *I*, in tangente alterutra *HI* ſitum, agatur recta *IY* tangenti alteri *KL* parallela, quæ occurrat curvæ in *X* & *Y*, & in ea ſumatur *IZ* media proportionalis inter *IX* & *IY*, erit, ex conicis, (z) rectangulum *XIY* ſeu *IZ quad.* ad *LP quad.* ut rectangulum *CID* ad rectangulum *CLD*, id eſt (per conſtructionem) ut *SI quad.* ad *SL quad.* atque ideo *IZ* ad *LP* ut *SI* ad *SL*. Jacent ergo puncta *S*, *P*, *Z*



(z) *Erit ex Conicis rect. XIY ad LP² ut rect. CID ad rect. CLD.* Scilicet cum P ſupponatur punctum contactus alicubi in Tangente KL ſitum & cum linea IY ſit (per conſt.) parallela Tangenti KL & utraque ſecetur per lineam I L, illa in I hæc in L erit (per Lem. III. de Conic. p. 117.) rect. partium Parallelæ I Y ab inter-

Z in unâ rectâ. Porro tangentibus concurrentibus in *G*, erit (ex conicis) rectangulum *XIY* ſeu *IZ quad.* ad *IA quad.* ut *GP quad.* ad *GA quad.* ideoque *IZ* ad *IA* ut *GP* ad *GA*. Jacent ergo puncta *P*, *Z* & *A* in unâ rectâ, ideoque puncta *S*, *P* & *A* ſunt in unâ rectâ. Et ([a]) eodem argumento probabitur quod puncta *R*, *P* & *A* ſunt in unâ rectâ. Jacent igitur puncta contactuum *A* & *P* in rectâ *RS*. Hiſce autem inventis, trajectoria deſcribetur ut in caſu primo problematis ſuperioris ([b]). *Q. E. F.* LIBER PRIMUS.

In



interſectione I ad curvæ puncta X & Y ſumptarum ad Rectang. partium Parallelæ LP ab interſectione L ad curvæ puncta (quæ coeunt in uno P quia LP debet eſſe Tangens, ideóque illud rectangulum eſt quadratum LP) ſicut rect. CID, ad rect. CLD quia nempe hæc rectangula ſunt facta partium lineæ ſecantis IL factis partium ſingulæ Parallelæ correſpondentia, ideóque (per conſt.) $IZ^2 : LP^2 = SI^2 : SL^2$ atque adeo $IZ : LP = SI : SL$, cum igitur ſit IZ parallela LP (per conſt.) puncta S, P, Z, jacent in unâ rectâ. Porrò Tangentibus concurrentibus in G, cum ſupponatur punctum contactus alicubi ſitum in Tangente GA erit (per Cor. 2. ejuſdem Lem. III. de Con. p. 118.) XIY (ſive IZ^2) $: IA^2 = GP^2 : GA^2$ ideoque &c.

(a) *Et eodem argumento probabitur quod puncta R, P & A, ſunt in unâ rectâ*, ſi per punctum K, agatur recta KV, tangenti GH, parallela, quæ occurrat curvæ in T & V, & in eâ ſumatur KQ, media proportionalis inter KT & KV, cum recta KH ſecet Parallelas KV & AH erit (per Lem. III. de Con. p. 117.) rectan. VKT (ſive KQ^2) ad AH^2 ſicut rect. BKD ad rect. BHD hoc eſt ut KR^2 ad HR^2 (per conſt.) adeóque erit $KQ : AH = KR : RH$, quare puncta Q, R, & A erunt in eadem rectâ. Porrò Tangentibus concurrentibus in G erit (per Cor. 2. Lem. III. de Conic.) VKT (KQ^2): $PK^2 = GA^2 : GP^2$ & $KQ : PK = GA : GP$, unde erunt P, Q & A in eâdem rectâ, ideoque P, R, & A in eâdem rectâ.

(b) 322. Coroll. 1. Hinc ſi duæ rectæ HG, PG (vid. fig. Newt.) concurrentes in G, ſectionem conicam tangant in A & P, jungaturque AP & producatur, & ex punctis quibuſvis I & H, in unâ tangentium GH, ſumptis agantur ad idem ſectionis conicæ punctum D, duæ rectæ ID, HD, quarum altera ID ſecet ſectionem conicam in C, rectam AP in S, & tangentem GP in L, altera verò HD ſecet ſectionem in B, rectam AP, in R, & tangentem GP, in K; erit ſemper $HR^2 : KR^2 = BHD : BKD$. & $IS^2 : LS^2 = CID : CLD$, quomodocumque inflectantur rectæ ID, HD, & tangentes GA, GP.

323. Coroll. 2. Si puncta D & C, coeant, (vid. fig. Newt.) ut ILS, tangens evadat in D, ſeu C, erit $CI = DI$, & $CL = DL$, adeóque $IS^2 : LS^2 = DI^2 : DL^2$, & $IS : LS = DI : DL$. h. e. ſi Tangens IL, terminata per duas alias Tangentes, ſecet in S lineam AB jungentem puncta contactus earum Tangentium, ejus partes à ſectione S ad utramque Tangentem ſumptæ, erunt inter ſe ſicut ejus partes à puncto contactus ad eaſdem Tangentes terminatæ.

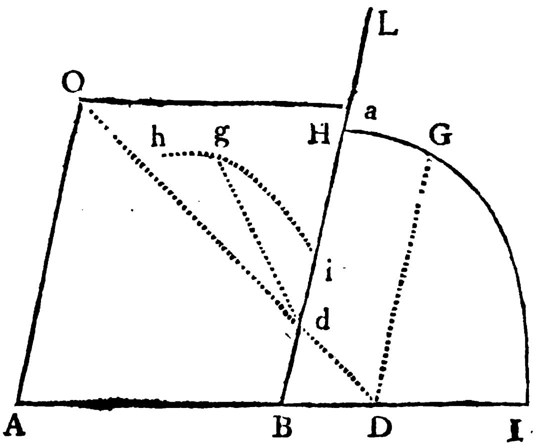
De Motu Corporum.

In hâc propoſitione, & caſu ſecundo propoſitionis ſuperioris conſtructiones eædem ſunt, ſive recta XY trajectoriam ſecet in X & Y, ſive non ſecet; eæque non pendent ab hâc ſectione. Sed demonſtratis conſtructionibus ubi rectá illa trajectoriam ſecat, innoteſcunt conſtructiones, ubi non ſecat; iiſque ultra demonſtrandis brevitatis gratiâ non immoror.

LEMMA XXII.

Figuras in alias ejuſdem generis figuras mutare.

Tranſmutanda ſit figura quævis HGI. Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ AO, BL tertiam quamvis poſitione datam AB ſecantes in A & B, & a figuræ puncto quovis G, ad rectam AB ducatur quævis GD, ipſi OA parallela. Deinde à puncto aliquo O, in linea OA dato, ad punctum D ducatur recta OD, ipſi BL occurrens in d, & à puncto occurſus erigatur recta dg datum quemvis angulum cum rectâ BL continens, atque eam habens rationem ad Od quam habet DG ad OD; & erit g punctum in figurâ novâ hgi puncto G reſpondens. Eâdem ratione puncta ſingula figuræ primæ dabunt puncta totidem figuræ novæ.



Concipe igitur punctum G motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, & punctum g motu itidem continuo percurret puncta omnia figuræ novæ & eandem deſcribet. Diſtinctionis gratiâ nominemus DG ordinatam primam, dg ordinatam novam; AD abſciſſam primam,

mam, ad abſciſſam novam; O polum, OD radium abſcindentem, OA radium ordinatum primum, & Oa (quo parallelogrammum $OABa$ completur) radium ordinatum novum.

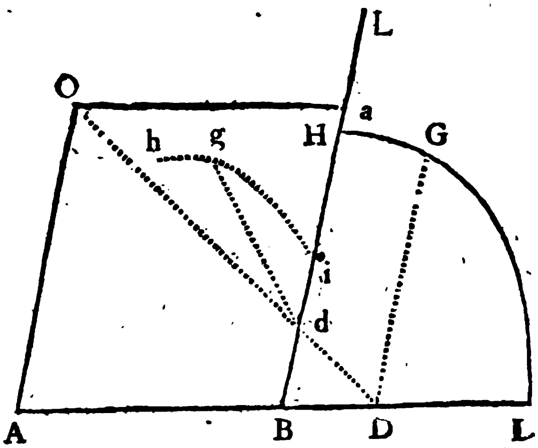
Dico jam quod, ſi punctum G tangit rectam lineam poſitione datam, punctum g tanget etiam lineam rectam poſitione datam. Si punctum G tangit conicam ſectionem, punctum g tanget etiam conicam ſectionem. Conicis ſectionibus hic circulum annumero. Porro ſi punctum G tangit lineam (c) tertii ordinis analytici, punctum g tanget lineam tertii itidem ordinis; & ſic de curvis lineis ſuperiorum ordinum. Lineæ duæ erunt ejuſdem ſemper ordinis analytici quas puncta G, g tangunt. (d) Etenim ut eſt ad ad OA ita ſunt Od ad OD, dg ad DG, & AB ad AD; ideoque AD æqualis eſt $\frac{OA \times AB}{ad}$, & DG æqualis eſt $\frac{OA \times dg}{ad}$. Jam ſi punctum G tangit rectam lineam, atque ideo in æquatione quâvis, quâ relatio inter abſciſſam AD & ordinatam DG habetur, indeterminatæ illæ AD & DG ad unicam tantum dimenſionem aſcendunt, ſcribendo in hâc æquatione OA

(c) 324. Newtonus lineas geometricas in ordines analyticos diſtinguit ſecundùm numerum dimenſionum æquationis quâ relatio inter ordinatas & abſciſſas definitur, vel (quod preindè eſt) ſecundùm numerum punctorum in quibus à lineâ rectâ ſecari poſſunt; tot enim dimenſiones habet æquatio ad curvam quot poſſunt eſſe illius curvæ & rectæ interſectiones; nam ſi interſectiones illæ ſeorſim quærantur, quoniam eadem eſt omnium lex & conditio, idem erit calculus in caſu unoquoque & propterea eadem ſemper concluſio, quæ igitur debet omnes interſectiones ſimul complecti & indifferenter exhibere, adeóque tot eſſe debent æquationis radices ac proinde dimenſiones quot ſunt interſectiones. Hinc linea primi ordinis erit recta ſola, lineæ ſecundi ſive quadratici ordinis erunt ſectiones conicæ & circulus, & lineæ tertii ſive cubici ordinis parabola cubica, parabola Neiliana, Ciſſois veterum & aliæ. Cum autem recta inter curvas non ſit numeranda, curva primi generis eadem eſt cum lineâ ſecundi ordinis, & curva ſecundi generis eadem cum lineâ tertii ordinis, & linea ordinis infiniteſimi ea eſt quam recta in punctis infinitis ſecare poteſt, qualis eſt ſpiralis, cycloïs, quadratrix & linea omnis quæ per radii vel rotæ revolutiones infinitas generatur.

(d) 325. Etenim ob ſimilia triangula, adO, AOD, $ad : OA = Od : OD$, (& per conſtr.) $Od : OD = dg : DG$, & ob rectas AO, Bd parallelas $Od : OD = AB : AD$; undè $ad : OA = dg : DG = AB : AD$, atque adeò $AD = \frac{OA \times AB}{ad}$, & $DG = \frac{OA \times dg}{ad}$. Sit $OA = a$, $AB = b$, $AD = x$, $DG = y$, $ad = z$, $dg = u$, & erit $x = \frac{ba}{z}$, $y = \frac{au}{z}$.

De Motu Corporum.

$\frac{OA \times AB}{ad}$ pro AD, & $\frac{OA \times dg}{ad}$ pro DG, (e) producetur æquatio nova, in qua abſciſſa nova ad & ordinata nova dg ad unicam tantum dimenſionem aſcendent, atque ideo quæ deſignat lineam rectam. (f) Sin AD & DG, vel earum alterutra, aſcendebant ad duas dimenſiones in æquatione primâ, aſcendent itidem ad & dg ad duas in æquatione ſecundâ. Et (g) ſic de tribus vel pluribus dimenſionibus. Indeterminatæ ad, dg in æquatione ſecundâ, & AD, DG in primâ aſcendent ſemper ad eundem dimenſionum numerum, & propterea lineæ, quas puncta G, g tangunt, ſunt ejuſdem ordinis analytici.



Dico

(e) * Sit GI, recta poſitione data & ad illam æquatio quævis $cx + dy + ef = o$, in qua $+$, ſignificat vel $+$, vel $-$ loco x & y, ſubſtituantur eorum valores (325) $\frac{ba}{z}$, $\frac{au}{z}$ & producetur $\frac{cba}{z} + \frac{dau}{z} + ef = o$, hoc eſt, reductione ad communem denominatorem factâ $cba, + dau + efz = o$ æquatio nova unius dimenſionis ad rectam lineam g i.

(f) * Sit GI, ſectio conica & ad illam æquatio generalis, $cxx + dyy + exy + g^2x + m^2y + n^3 = v$, loco x, y, ſubſtituantur $\frac{ba}{z}$, $\frac{au}{z}$, & prodibit æquatio nova ad conicam ſectionem $\frac{cb^2a^2}{z^2} + \frac{da^2u^2}{z^2} + \frac{eba^2u}{z^2} + \frac{bag^2}{z} + \frac{m^2au}{z} + n^3 = o$, hoc eſt, reductione factâ, $cb^2a^2 + da^2u^2 + eba^2u + bag^2z + m^2auz + n^3z^2 = o$.

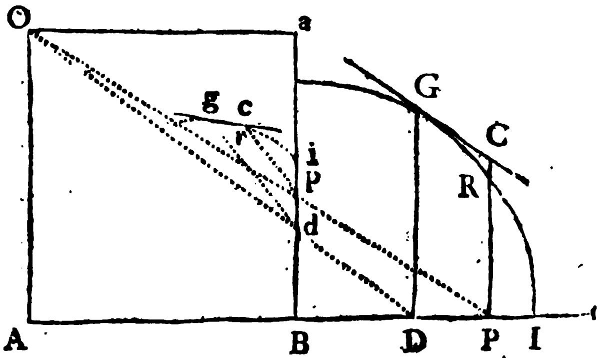
(g) * *Et ſic de tribus vel pluribus dimenſionibus*, nam ſi in ſerie 1, x, x^2, x^3, x^4 *&c.* loco x, & dignitatum ejus ſubſtituantur $\frac{1}{z}$, & ipſius dignitates prodibit ſeries nova $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z^2}$, $\frac{1}{z^3}$, $\frac{1}{z^4}$ &c. & reductione ad communem denominatorem factâ habebitur $\frac{z^4;\ z^3,\ z^2,\ z^1}{z^4}$. Similiter ſi in ſerie y, y^2; y^3, y^4 &c. loco y, ſubſtituatur $\frac{u}{z}$, prodibit ſeries nova $\frac{u}{z}$, $\frac{u^2}{z^2}$, $\frac{u^3}{z^3}$, $\frac{u^4}{z^4}$ &c. & per reductionem ad denominatorem communem $\frac{uz^3,\ u^2z^2,\ u^3z,\ u^4}{z^4}$, iiſdem x & y valoribus ſubſtitutis in ſeriebus

(h) Dico præterea, quod ſi recta aliqua tangat lineam curvam in figurâ primâ; hæc recta eodem modo cum curvâ in figuram novam tranſlata tanget lineam illam curvam in figurâ novâ; & contra. Nam ſi curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem & coeunt in figurâ primâ, puncta eadem tranſlata accedent ad invicem & coibunt in figurâ novâ; atque ideo rectæ, quibus hæc puncta junguntur, ſimul evadent curvarum tangentes in figurâ utrâque.

Componi poſſent harum aſſertionum demonſtrationes more magis geometrico. Sed brevitati conſulo.

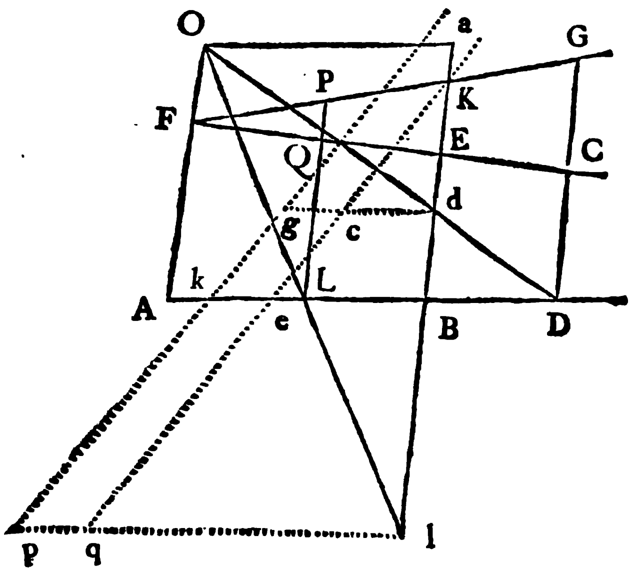
Igitur

riebus factorum x, y, xy^2, xy^3 &c. & x^2y, x^3y &c. & reductione ad communem denominatorem z^4 factâ, habebuntur ſeries $\frac{z^2u, zu^2, zu^3}{z^4}$, & $\frac{zu, u}{z^4}$. Porrò æquatio omnis ex hujuſmodi dignitatibus & factis compoſita eſt, & abjici poteſt communis omnium terminorum denominator qui hîc eſt z^4, ergò hujuſmodi ſubſtitutionibus non mutatur gradus æquationis. Eadem quoque demonſtrari poſſunt ex eo quod ſi linea recta curvam HGI, ſecet in quotlibet punctis, eadem recta tranſlata curvam hgi in totidem punctis interſecare debeat, quoniam ſingulæ nec plures interſectiones in novam figuram transferuntur.



(h) 326. Recta GC curvam GI tangat in G, transferatur punctum G, in g, & ductâ PC parallelâ DG, quæ curvæ occurrat in R & tangenti in C; transferatur punctum C, in c, faciendo ut OP: PC = Op : pc parallelam dg, & recta gc, quæ puncta g, & c, jungit, novam curvam gi, tanget in g; nam accedat PC, ad DG, & accedat correſpondens pc, ad dg, & punctis C, R, G, coeuntibus, coibunt in figurâ novâ puncta c, r, g, adeóque linea gc, poſitione coincidit cum chordâ evaneſcente gr, hoc eſt cum tangente in g. Idem aliâ ratione poteſt demonſtrari; quoniam enim PC : pc = PO : po = PR : pr, & proindè PC : PR = pc : pr, ergo punctum c, non eſt in curvâ gi, niſi cum C reperitur in curvâ GI, hoc eſt, niſi C & G coeant.

Igitur ſi figura rectilinea in aliam tranſmutanda eſt, ſufficit rectarum, à quibus conflatur, interſectiones transferre, & per eaſdem in figurâ novâ lineas rectas ducere. Sin curvilineam tranſmutare oportet, transferenda ſunt puncta, tangentes, & lineæ rectæ, quarum ope curva linea definitur. Inſervit autem hoc lemma ſolutioni difficiliorum problematum, tranſmutando figuras propoſitas in ſimpliciores. Nam (i) rectæ quævis convergentes



(i) 327. Radius ordinatus primus O A, per concurſum F rectarum FG, FC tranſeat, ductâ GD radio OA parallelâ, transferantur puncta G, C, in g, c, & puncta K, E, in k, e, rectæ kg, ec, erunt parallelæ; nam ducta intelligatur OL radio OA infinitè proxima, & rectas AD, aB ſecans in L & l, & actâ LQP radio OA, parallelâ, puncta P, Q in p, q, tranſlata concipiantur, & erit OL : Ol = PL : pl = QL : ql. coeuntibus verò punctis P, Q, F erit Ol infinita & QL = FA = PL, adeóque pl = ql. Punctum igitur concurſus F ad diſtantiam infinitam transfertur, & lineæ gp, cq, ad illud convergentes ſunt parallelæ.

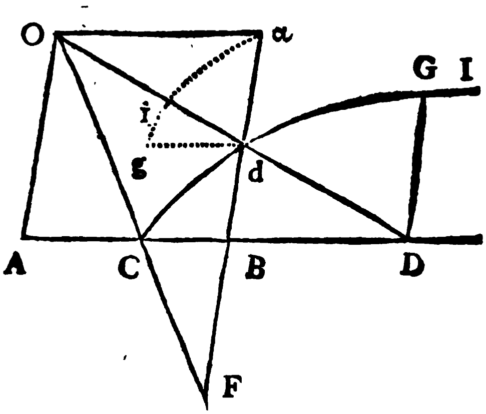
328. Coroll. 1. Puncta K & E, ſeu interſectiones linearum FG, FC cum aB, transferuntur capiendo in novâ ordinatâ Bk = BK, Be = BE; eſt enim (per conſtr.) BK : BO = Bk : BO. & BE : BO = Be : BO.

329. Coroll. 2. Si punctum F, cum puncto A, coincidat, erunt gk, ce, rectis OA, aB parallelæ; nam ob parallelas BK, DG, AO & (per conſtr.) AB : AD = Od : OD = dg : DG, & coeuntibus punctis F, A, AB : AD = BK (Bk) : DG, adeóque dg : DG = Bk : DG, ac proindè Bk = dg, undè gk lineæ Bd eſt parallela.

330.

gentes tranſmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo lineam quamvis rectam, quæ per concurſum convergentium tranſit; idque quia concurſus ille hoc pacto abit in infinitum; lineæ autem parallelæ ſunt, quæ nuſquam concurrunt. Poſtquam autem problema ſolvitur in figurâ novâ; ſi per inverſas operationes tranſmutetur hæc figura in figuram primam, (k) habebitur ſolutio quæſita.

(l) Utile eſt etiam hoc lemma in ſolutione ſolidorum problematum. Nam quoties duæ ſectiones conicæ obvenerint, quarum interſectione problema ſolvi poteſt, tranſmutare licet earum alterutram, ſi hyperbola ſit vel parabola, in ellipſin: deinde ellipſis facile mutatur in circulum. Recta item & ſectio conica, in conſtructione planorum problematum, vertuntur in rectam & circulum.



330. Coroll. 3. Si recta linea F G, coincidat cum A D, transformabitur in rectam coincidentem cum a B, nam punctum D, transfertur in d, punctum L, in l.

(k) 331. (Vide fig. Newt. pag. 218.) Figura h g i data in figuram primam H G I, transformatur, faciendo ut O d, ad d g, ita O D, ad D G, parallelam radio O A.

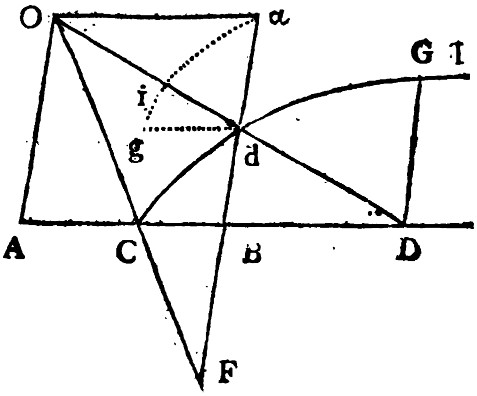
(l) 332. Sit curva C G I, parabola cujus diameter C D, diametri vertex C, ordinata G D radio ordinato primo A O parallela, latus rectum l, ſitque O A $= a$, A B $= b$, A C $= c$, A D $= x$, C D $= x - c$ G D $= y$, nova abſciſſa, a d $= z$, nova ordinata g d $= u$, erit ex naturâ parabolæ $lx - lc = yy$, & ſubſtitutis pro x, & y, eorum valoribus $\frac{ba}{z}$, $\frac{bu}{z}$ (325) producetur æquatio nova ad novam curvam g i, $\frac{lba}{z} - lc = \frac{b^2u^2}{z^2}$, hoc eſt, reductione factâ $b^2u^2 - lbaz + lcz^2 = 0$, æquatio ad Ellipſim cujus diameter a F $= \frac{ba}{c}$, latus rectum $= \frac{la}{b}$, nam $\frac{baz}{c} - z^2 : u^2 = \frac{ba}{c} : \frac{la}{b}$.

Si nova ordinata g d, ponatur ad abſciſſam a d, perpendicularis, & prætereà fiat $lc = b^2$, ſive $l \times$ A C $=$ A B^2 ſuperior ad Ellipſim æquatio in hanc mutabitur $u^2 - \frac{baz}{c} + zz = 0$, quæ eſt ad circulum cujus diameter $\frac{ba}{c}$, ex tribus autem rectis a, b, c, binæ a & b, vel a & c, poſſunt ad arbitrium aſſumi, & tertia determi-

De Motu Corporum.

terminatur per æquationem $lc = bb$, in circulo.

Si vertex C cum puncto A coeat, hoc eſt, ſi $AC = c = o$ æquatio ad novam curvam erit $b^2u^2 - lbaz = o$, hoc eſt, curva g i, erit parabola; & eodem modo invenitur Ellipſim & Hyperbolam atque adeò Sectiones omnes conicas in parabolam transformari, dum diametri A D radio O a parallelæ vertex C coincidit cum puncto A radii ordinati primi O A ordinatis ad diametrum paralleli.

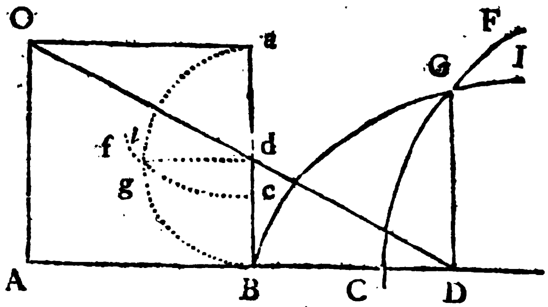


Si parabolæ vertex C cum puncto B coeat, erit $b = c$, adeóque Ellipſis vel circuli g i diameter $\frac{b.a}{c}$, erit $a = OA = aB$.

Si curva C G I, fuerit hyperbola cujus ſit diameter d, latus rectum l, manentibus cæteris denominationibus ut ſuprà, erit ex naturâ hyperbolæ $dy^2 = lx^2 - 2clx + dlx - ldc + lcc$, & ſubſtitutis loco x & y, eorum valoribus & reductione ad communem denominatorem factâ producetur.

$$db^2u^2 + 2clbaz + ldcz^2 - lb^2a^2 = o$$
$$- dlbaz - lc^2z^2$$

nova æquatio ad parabolam vel hyperbolam aut Ellipſim prout aſſumitur linea c, æqualis vel major vel minor diametro d, Ellipſis autem in circulum abit ponendo $ldc - lc^2 = db^2$, & angulum g d a, rectum, ut ex locorum geometricorum doctrinâ liquet. Eâdem ratione transformatur Ellipſis.

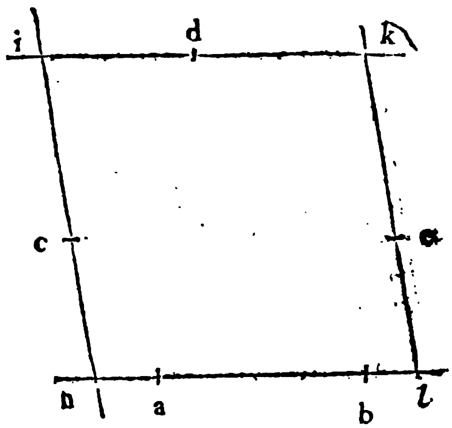


333. His præmiſſis facilè intelligitur hujus lemmatis uſus in ſolidorum aut etiam planorum problematum ſolutione. Nam ſit quærenda interſectio G conicæ ſectionis B G I cum alterâ ſectione conicâ aut rectâ lineâ C G F poſitione datâ. transformetur (332.) ſectio conica B G I in circulum B G a, & linea C G F, in lineam c g f, tum ex puncto interſectionis g, circuli B g a, & lineæ c g f, demittatur ad a B nova ordinata ſive perpendicularis g d, & per punctum d, agatur radius abſcindens O d D. ſecans rectam A B in D, denique per D agatur G D radio ordinato primo O A parallela quæ ſit ad O D ut g d, ad O d, & erit G punctum interſectionis quæſitum. Cum enim in puncto interſectionis duarum linearum B G I, C G F, communis ſit ordinata G D manifeſtum eſt interſectionem illam transformari in interſectionem linearum B g a, c g f, & vice verſâ (331).

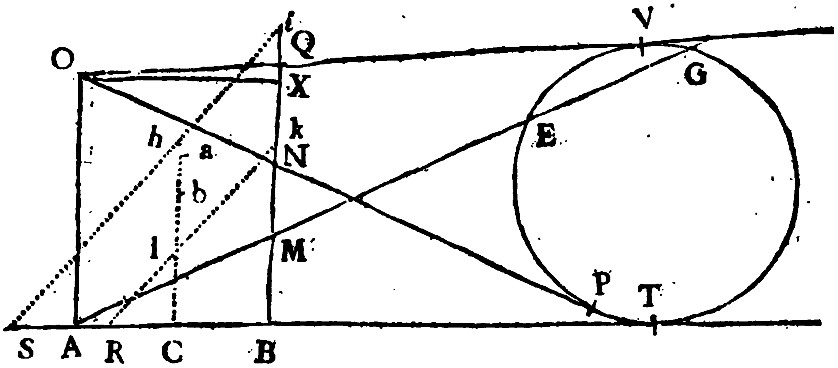
PRO-

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA XVII.

Trajectoriam deſcribere, quæ per data duo puncta tranſibit, & rectas tres continget poſitione datas.



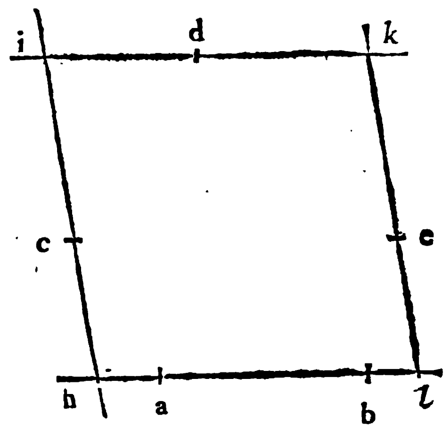
Per concurſum tangentium quarumvis duarum cum ſe invicem, & concurſum tangentis tertiæ cum recta illa, quæ per puncta duo data tranſit, age rectam infinitam; eaque adhibita pro radio ordinato primo, tranſmutetur figura, per lemma ſuperius, in figuram novam. (m) In hâc figurâ tangentes illæ duæ evadent ſibi invicem parallelæ, & tan-



(m) 334. Sit O, concurſus tangentium duarum OV, OP, A concurſus tangentis tertiæ AT, cum rectâ AG, quæ per puncta duo E, G, data tranſit, age rectam infinitam OA, eâque adhibitâ pro radio ordinato primo, & OX parallelâ AT, pro radio ordinato novo uſurpatâ, tranſmutetur figura in figuram novam, quod facillimum eſt, ſi ordinatæ novæ parallelæ ſumantur radio ordinato novo OX, nam recta AT transformatur in rectam BXi (330), recta AG in rectam Ch ipſi BX parallelam (329) & punctum illius C, reperitur, capiendo BC=BM (328). rectæ OV, OP tranſmutantur in rectas parallelas Rk, Si, (327); earumque puncta R, S, habentur capiendo BR=BN, BS=BQ, & alia puncta duo (per Lem. XXII.) facilè reperiuntur. Puncta E, & G, transferantur in b, & a, & productis lineis parallelis Bi & Ch, Rk, & Si, donec ſibi mutuò occurrant, compleatur parallelogrammum lhik, & nova ſectio conica tranſibit per puncta b, & a, & tangetur à rectis tribus hi, lk, ki (326).

DE MOTU CORPORUM.

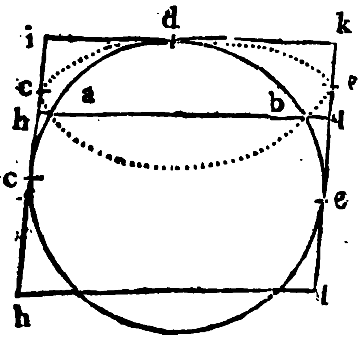
gens tertia fiet parallela rectæ per puncta duo data tranſeunti. Sunto *hi*, *kl* tangentes illæ duæ parallelæ, *ik* tangens tertia, & *hl* recta huic parallela tranſiens per puncta illa *a*, *b*, per quæ conica ſectio in hâc figurâ novâ tranſire debet, & parallelogrammum *hikl* complens. (n) Secentur rectæ *hi*, *ik*, *kl* in *c*, *d*, *e*, ita ut ſit *hc* ad latus quadratum rectanguli *ahb*, *ic* ad *id*, & *ke* ad *kd* ut eſt ſumma rectarum *hi* & *kl* ad ſummam trium linearum, quarum prima eſt recta *ik*, alteræ duæ ſunt latera quadrata rectangulorum *ahb* & *alb*: & erunt *c*, *d*, *e* puncta contactuum. Etenim, ex conicis, ſunt *hc* quadratum ad rectangulum *ahb*, & *ic* quadratum ad *id* quadratum, & *ke* quadratum ad *kd* quadratum, & *el* quadratum ad rectangulum *alb* in eâdem ratione; & propterea *hc* ad latus quadratum ipſius *ahb*, *ic* ad *id*, *ke* ad *kd* & *el* ad latus quadratum ipſius *alb* ſunt in ſubduplicatâ illâ ratione, & compoſitè, in datâ ratione omnium antecedentium *hi* & *kl* ad omnes conſequentes, quæ ſunt latus quadratum rectanguli *ahb*, & recta *ik*, & latus quadratum rectanguli *alb*. Habentur igitur

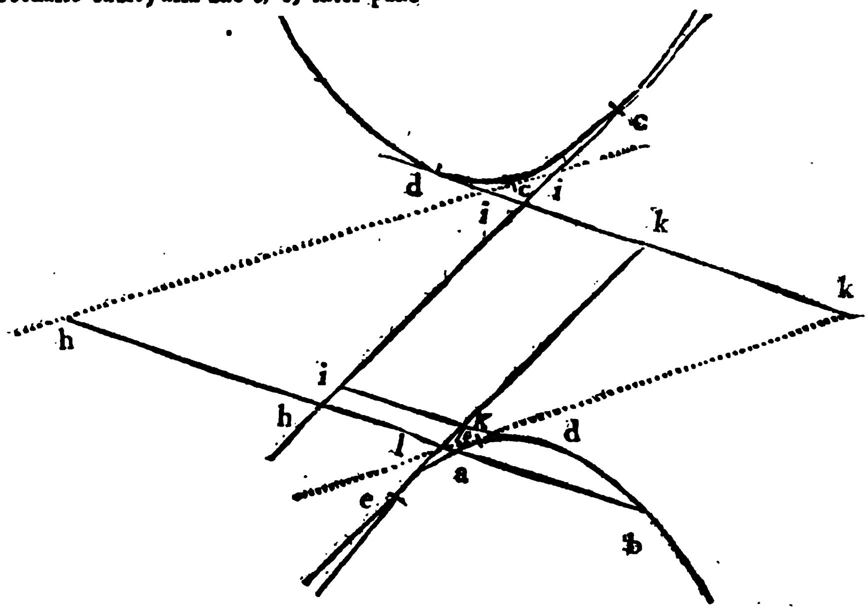


* (n) Inter a h, h b, quæratur media proportionalis quæ dicatur *M*, & inter a l, l b, media proportionalis *N*; & deinde ita ſecentur rectæ h i, i k, k l, in c, d, e, ut ſit h c, ad *M*, i c, ad i d, & k e ad k d, ut eſt $hi+kl$, ad $ik+M+N$, & erunt c, d, e, puncta contactuum; Etenim ſi fuerint c, d, e, puncta contactuum, ob h l parallelam tangenti i k, quæ cum alterâ tangente h i, concurrit in i, erit (per prop. 16. & 18. lib. 3. conic. Apoll. ſive per Corol. 2. Lem. III. de Conic. p. 118.) $hc^2 : ah \times hb = ic^2 : id^2$, & ob, h i, occurrentem ſectioni in ſolo puncto c, & parallelam tangenti l k, quæ alteri tangenti i k occurrit in k, erit (per eaſdem prop. Apoll.) $ic \times ic\ (ic^2) : id^2 = ke^2 : kd^2$, & ob, h l, parallelam tangenti i k, quæ cum alterâ tangente l k, convenit in k, erit (per eaſdem prop. Apoll.) $ke^2 : kd^2 = el^2 : al \times lb$, adeoque $hc^2 : ah \times hb = ic^2 : id^2 = ke^2 : kd^2 = el^2 : al \times lb$, & propterea $hc : \sqrt{ah \times hb}\,(M) = ic : id = ke : kd = el : \sqrt{al \times lb}\,(N)$, & compoſitè ſumma omnium antecedentium eſt ad ſummam omnium conſequentium ut quilibet antecedens ad ſuum conſequentem, hoc eſt $hc : M = ic : id = ke : kd = el : N = hc + ic + ke + el\ (hi + kl) : M + id + kd + N\ (ik + M + N)$. Habentur igitur (per conſtr.) ex datâ illâ ratione puncta contactuum c, d, e, in figurâ novâ per inverſas operationes (331).

ex datâ illâ ratione puncta contactuum *c*, *d*, *e*, in figura nova. Per inverſas operationes lemmatis noviſſimi transferantur hæc puncta in figuram primam, & ibi (per prob. XIV.) deſcribetur trajectoria. *Q. E. F.* (o) Cæterum perinde ut puncta *a*, *b* jacent vel inter puncta *h*, *l*, vel extra, debent puncta *c*, *d*, *e* vel inter puncta *h*, *i*, *k*, *l* capi, vel extra. Si punctorum *a*, *b* alterutrum cadit inter puncta *h*, *l*, & alterum extra, problema impoſſibile eſt.

PRO-





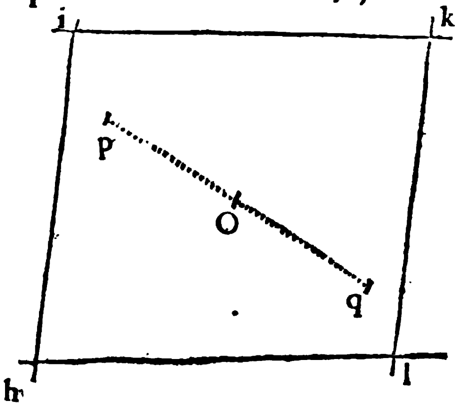
(o) 335. Quoniam duæ parallelæ hi, lk, neque parabolam, neque hyperbolam ſimplicem contingere poſſunt, tangent hyperbolas oppoſitas vel ellipſim, circulo inter ellipſes annumerato. Porrò Ellipſis tota inter tangentes parallelas, & hyperbolæ oppoſitæ totæ extra eaſdem ſunt; quare in Ellipſi puncta a, b, inter puncta h, l, ſita ſunt; in hyperbolis extra; atque adeò ſi punctorum a, b, alterum cadit inter puncta h, l & alterum extrà, problema impoſſibile eſt. In Ellipſi punctum contactûs d, inter puncta i, k, neceſſariò cadit; alia duo c, e, inter puncta h & i, l & k, vel aliquandò extrà eſſe poſſunt; in hyperbolis oppoſitis contactuum puncta duo ut c, d, extrà puncta h, i, k, l, neceſſariò poſita ſunt, tertium ut e, vel extrà vel intra eſſe poteſt, undè præſcribit Newtonus ut puncta c, d, e, vel inter puncta h, i, k, l, vel extrà capiantur, perindè ut puncta a, b, jacent vel inter puncta h, l, vel extrà.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA XVIII.

Trajectoriam deſcribere, quæ tranſibit per punctum datum, & rectas quatuor poſitione datas continget.

Ab interſectione communi duarum quarumlibet tangentium ad interſectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita, & eâdem pro radio ordinato primo adhibitâ, tranſmutetur figura (per lem. XXII.) in figuram novam, & tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum primum concurrebant, jam evadent parallelæ. Sunto illæ *hi* & *kl*, *ik* & *hl* continentes parallelogrammum *hikl*. Sitque *p* punctum in hâc novâ figurâ puncto in figurâ primâ dato reſpondens. (p) Per figuræ centrum *O* agatur *pq*, & exiſtente *Oq* aquali *Op*, erit *q* punctum alterum per quod ſectio conica in hâc figurâ novâ tranſire debet. Per lemmatis XXII. operationem inverſam transferatur hoc punctum in figuram primam, & ibi habebuntur puncta duo per quæ trajectoria deſcribenda eſt. Per eadem vero deſcribi poteſt trajectoria illa per problema XVII. *Q. E. F.*



LEM.

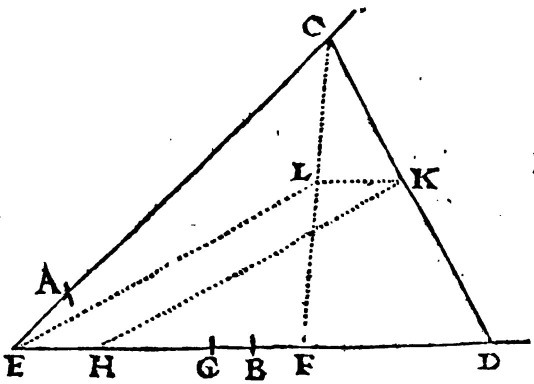
(p) 336. Parallelogrammi h, i, k, l, ſectioni conicæ circumſcripti diagonales in ſectionis centro O, ſe mutuò interſecant. Nam rectæ quæ oppoſita contactuum puncta jungunt, ſunt ſectionis diametri centro O biſectæ (per prop. 27. & 31. Lib. 2. conic. Apoll. utque ſequitur ex Lem. IV. de Conic. p. 119).

* Vid.

LEMMA XXIII.

Si rectæ duæ poſitione datæ AC, BD *ad data puncta* A, B, *terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, & recta* CD, *quâ puncta indeterminata* C, D *junguntur, ſecetur in ratione datâ in* K: *dico quod punctum* K *locabitur in rectâ poſitione datâ.*

(q) Concurrant enim rectæ *AC*, *BD* in *E*, & in *BE* capiatur *BG* ad *AE* ut eſt *BD* ad *AC*, ſitque *FD* ſemper æqualis datæ *EG*; & erit ex conſtructione *EC* ad *GD*, hoc eſt, ad *EF* ut *AC* ad *BD*, ideoque in ratione datâ, & propterea dabitur ſpecie triangulum *EFC*. Secetur *CF* in *L* ut ſit *CL* ad *CF* in ratione *CK* ad *CD*; & ob datam illam rationem, dabitur etiam ſpecie triangulum *EFL*; proindeque punctum *L* locabitur in rectâ *EL* poſitione datâ. Junge *LK*, & ſimilia erunt triangula *CLK*, *CFD*; & ob datam *FD* & datam rationem *LK* ad *FD* dabitur *LK*. Huic æqualis capiatur *EH*, & erit ſemper *ELKH* parallelogrammum. Locatur igitur punctum *K* in parallelogrammi illius latere poſitione dato *HK*. *Q. E. D.*



Corol. Ob datam ſpecie figuram *EFLC*, rectæ tres *EF*, *EL* & *EC*, id eſt *GD*, *HK* & *EC*, datas habent rationes ad invicem.

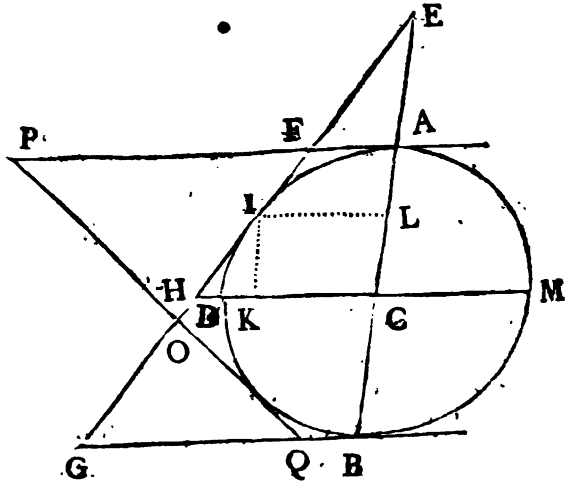
LEM-

(q) * Vid. not. 67. pag. 39.

LEMMA XXIV.

Si rectæ tres tangant quamcunque coni ſectionem, quarum duæ parallelæ ſint ac dentur poſitione; dico quod ſectionis ſemidiameter hiſce duabus parallela, ſit media proportionalis inter harum ſegmenta, punctis contactuum & tangenti tertiæ interjecta.

Sunto *AF*, *GB* parallelæ duæ coni ſectionem *ADB* tangentes in *A* & *B*; *EF* recta tertia coni ſectionem tangens in *I*, & occurrens prioribus tangentibus in *F* & *G*; ſitque *CD* ſemidiameter figuræ tangentibus parallela: dico quod *AF*, *CD*, *BG* ſunt continuè proportionales.



Nam ſi diametri conjugatæ *AB*, *DM* tangenti *FG* occurrant in *E* & *H* ſeque mutuo ſecent in *C*, & compleatur parallelogrammum *IKCL*; (r) erit ex naturâ ſectionum conicarum ut *EC* ad *CA* ita *CA* ad *CL*, & ita diviſim *EC*−*CA* ad *CA*−*CL*, ſeu *EA* ad *AL*, & compoſitè *EA* ad *EA*+*AL* ſeu *EL* ut *EC* ad *EC*+*CA* ſeu *EB*; ideoque, ob ſimilitudinem triangulorum *EAF*, *ELI*, *ECH*, *EBG*, *AF* ad *LI* ut *CH* ad *BG*. Eſt itidem, ex naturâ ſectionum conicarum, *LI* ſeu *CK* ad *CD* ut *CD* ad *CH*; (ſ) atque ideo ex æquo perturbatè *AF* ad *CD* ut *CD* ad *BG*. *Q. E. D.*

Co-

(r) * *Erit ex naturâ ſectionum conicarum &c.* (per prop. 37. 38. Lib. 1. conic. Apoll. vide cor. 2. Lem. V. de Conic. p. 121.)

(ſ) * Cum ſit EA : EL = EC : EB, & ob ſimilitudinem triangulorum EAF EIL ſit EA : EL = AF : LI, ſeu CK, & ob ſimilitudinem triangulorum ECH, EBG,

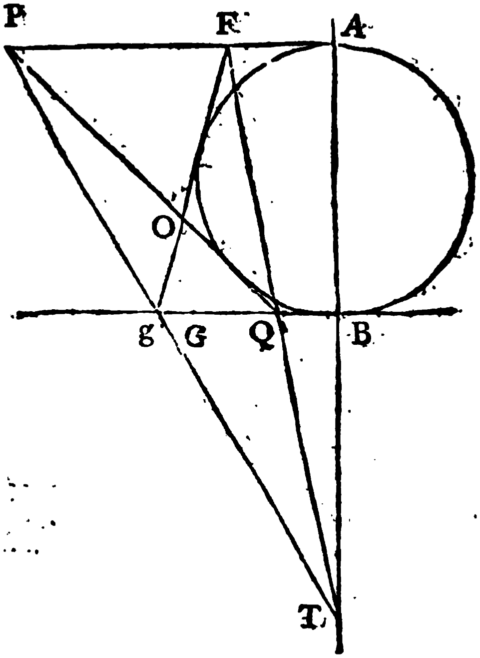
Corol. 1. Hinc ſi tangentes duæ *FG*, *PQ* tangentibus parallelis *AF*, *BG* occurrant in *F* & *G*, *P* & *Q*, ſeque mutuo ſecent in *O*; erit ex æquo perturbatè *AF* ad *BQ* ut *AP* ad *BG*, (t) & diviſim ut *FP* ad *GQ*, atque ideo ut *FO* ad *OG*.

Corol. 2. (u) Unde etiam rectæ duæ *PG*, *FQ*, per puncta *P* & *G*, *F* & *Q* ductæ, concurrent ad rectam *ACB* per centrum figuræ & puncta contactuum *A*, *B* tranſeuntem.

L E M.

EBG ſit $EC : EB = CH : BG$, erit $AF : CK = CH : BG$, & quia (ex conic. loco citato) $CK : CD = CD : CH$, erit $AF \times CK : CK \times CD = CH \times CD : BG \times CH$, hoc eſt, $AF : CD = CD : BG$.

(t) * Eſt enim $AF : CD = CD : BG$, & ſimiliter $BQ : CD = CD : AP$; ſeu $CD : BQ = AP : CD$, adeóque $AF \times CD : CD \times BQ = CD \times AP : BG \times CD$, hoc eſt $AF : BQ = AP : BG = AP - AF : BG - BQ = FP : GQ = FO : OG$, ob ſimilia triangula FOP, GOQ.

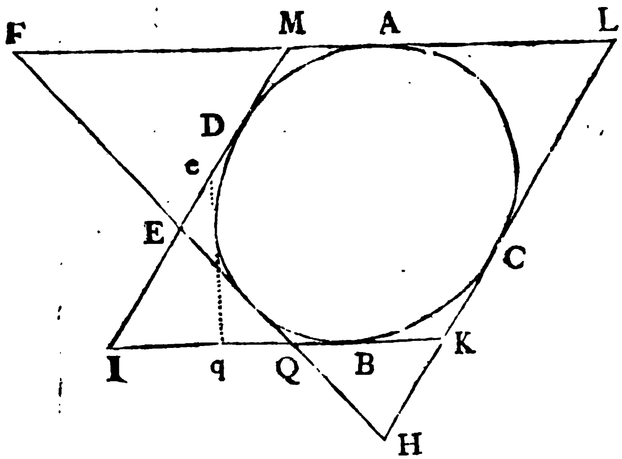


(u) * Agatur enim recta FQ, ipſi AB occurrens in T, & jungatur PT, rectam BG, ſecans in g, erit $AF : BQ = AT : BT = AP : Bg$, ſed per coroll. 1. $AF : BQ = AP : BG$, eſt igitur $BG = Bg$ ac proindè punctum g, cum G coincidit.

* Nam

LEMMA XXV.

Si parallelogrammi latera quatuor infinite producta tangant ſectionem quamcunque conicam, & abſcindantur ad tangentem quamvis quintam; ſumantur autem laterum quorumvis duorum conterminorum abſciſſæ terminatæ ad angulos oppoſitos parallelogrammi: dico quod abſciſſa alterutra ſit ad latus illud à quo eſt abſciſſa, ut pars lateris alterius contermini inter punctum contactus & latus tertium eſt ad abſciſſarum alteram.



Tangant parallelogrammi *MLIK* latera quatuor *ML*, *IK*, *KL*, *MI* ſectionem conicam in *A*, *B*, *C*, *D*, & ſecet tangens quinta *FQ* hæc latera in *F*, *Q*, *H* & *E*; ſumantur autem laterum *MI*, *KI* abſciſſæ *ME*, *KQ*, vel laterum *KL*, *ML*, abſciſſæ *KH*, *MF*: dico quod ſit *ME* ad *MI* ut *BK* ad *KQ*; & *KH* ad *KL* ut *AM* ad *MF*. Nam per corollarium primum lemmatis ſuperioris eſt *ME* ad *EI* ut *AM* ſeu *BK* ad *BQ*, & componendo *ME* ad *MI* ut *BK* ad *KQ*. *Q. E. D.* Item *KH* ad *HL* ut (x) *BK* ſeu *AM* ad *AF*, & dividendo *KH* ad *KL* ut *AM* ad *MF*. *Q. E. D.*

Corol 1. Hinc ſi datur parallelogrammum *IKLM*, circa datam ſectionem conicam deſcriptum, dabitur rectangulum $KQ \times ME$, ut & huic æquale rectangulum $KH \times MF$. Æquantur enim rectangula illa ob ſimilitudinem triangulorum *KQH*, *MFE*.

Co-

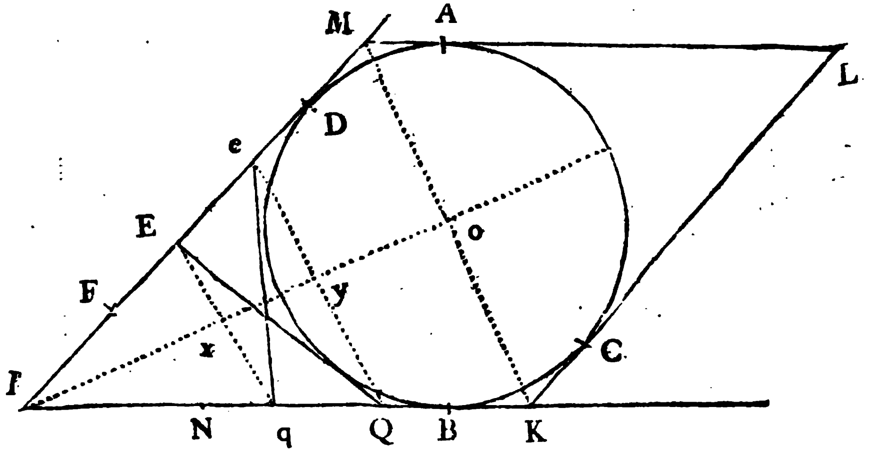
(x) * Nam ſi puncta contactuum A, & B, rectâ junguntur, hæc tranſibit per centrum commune ſectionis conicæ & parallelogrammi, (336) adeóque erit AM = BK.

* Nam

Corol. 2. Et ſi ſexta ducatur tangens eq tangentibus KI, MI occurrens in q & e; (y) rectangulum $KQ \times ME$ æquabitur rectangulo $Kq \times Me$; eritque KQ ad Me ut Kq ad ME, & diviſim ut Qq ad Ee. LIBER PRIMUS.

Corol. 3. Unde etiam ſi Eq, eQ jungantur & biſecentur, & recta per puncta biſectionum agatur, tranſibit hæc per centrum ſectionis conicæ. Nam cum ſit Qq ad Ee ut KQ ad Me, tranſibit eadem recta per medium omnium Eq, eQ, MK (z) (per lem. XXIII.) & medium rectæ MK eſt centrum ſectionis. (a) PRO-

(y) * Nam rectangula K Q × M E, K q × M e, æquantur rectangulo M I × B K.

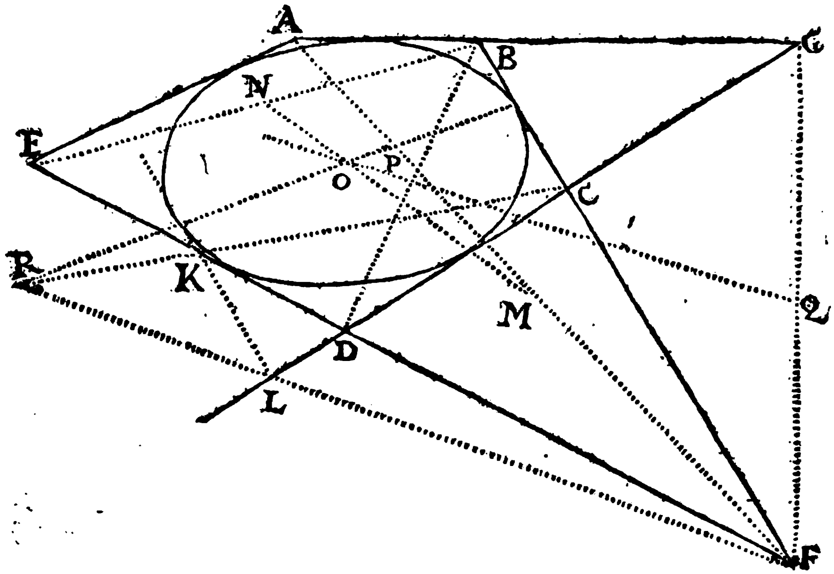


(z) * In rectis I M, I K, poſitione datis capiatur q N, ad E F, ut eſt q Q, ad E e, & puncta N, F, tanquam data ſeu fixa conſiderentur, & erit N q : F E = q Q : E e = Q K : e M, & compoſite, N q : F E = N Q : F e = N K : F M; quare ſi rectæ E q, e Q, M K, quibus puncta indeterminata E, & q, E, Q, M & K junguntur, ſecentur in ratione datâ in x, y, o, puncta omnia x, y, o, locantur in unâ eâdemque rectâ x y, (per Lem. XXIII). Si itaque recta x y, lineas E q, e Q, biſecat, rectam M K biſecabit, adeóque (336) per centrum ſectionis conicæ tranſibit.

(a) Hinc ſi lineæ quatuor ut E D, e q, E Q, Q B ſectionem Conicam tangant & ſibi mutuò occurrant in punctis e, E, q, Q junganturque puncta oppoſita e, Q & E, q, bifariamque dividantur lineæ e Q, E q, linea eas biſecans erit locus centri figuræ: Idque ſemper verum erit quamcumque figuram faciant lineæ E D, e q, E Q, Q B ſive ſeſe decuſſent ſive Trapezium conſtituant, Concipiatur illas Diametros duci quarum vertex eſt in puncto contactûs harum linearum donec occurrant curvæ altero ſuo vertice, Tangentes in eo vertice ductæ erunt parallelæ prioribus: Dabuntur ergo Parallelæ duabus lineis E D, Q B, quæ erunt Tangentes curvæ, ideoque fiet ut in Lemmatis Hypotheſi Parallelogrammum MIKL conſtans quatuor Tangentibus quarum oppoſitæ erunt inter ſe Parallelæ, & Tangentes E Q & e q conſiderari poterunt ut quinta & ſexta Tangens de quibus agitur in hoc Lemmate, ideoque per ejus corollarium 3. *ſi biſecentur lineæ E q e Q & recta per biſectionum puncta agatur tranſibit hæc per centrum Sectionis Conicæ &c.*

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA XIX.

Trajectoriam deſcribere, quæ rectas quinque poſitione datas continget.



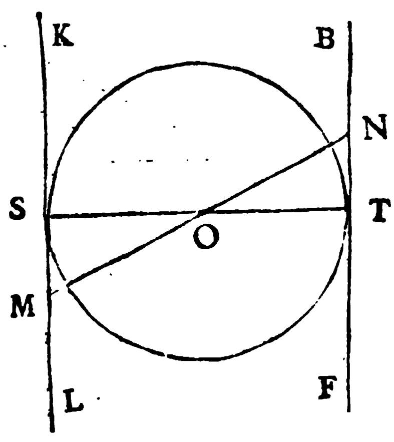
Dentur poſitione tangentes *ABG*, *BCF*, *GCD*, *FDE*, *EA*. Figuræ quadrilateræ ſub quatuor quibuſvis contentæ *ABFE* diagonales *AF*, *BE* biſeca in *M* & *N*, & (per corol. 3. lem. xxv.) recta *MN* per puncta biſectionum acta tranſibit per centrum trajectoriæ. Rurſus figuræ quadrilateræ *BGDF*, ſub aliis quibuſvis quatuor tangentibus contentæ, diagonales (ut ita dicam) *BD*, *GF* biſeca in *P* & *Q*: & recta *PQ* per puncta biſectionum acta tranſibit per centrum trajectoriæ. Dabitur ergo

go centrum in concurſu biſecantium. Sit illud O. ([b]) Tangenti cuivis BC parallelam age KL, ad eam diſtantiam ut centrum O in medio inter parallelas locetur, & acta KL tanget trajectoriam deſcribendam. Secet hæc tangentes alias quaſvis duas GCD, FDE in L & K. Per harum tangentium non parallelarum CL, FK cum parallelis CF, KL concurſus C & K, F & L age CK, FL concurrentes in R, & recta OR ducta & producta ſecabit tangentes parallelas CF, KL in punctis contactuum. Patet hoc per corol. 2. lem. XXIV. Eâdem methodo invenire licet alia contactuum puncta, & tum demum per conſtruct. prob. XIV. trajectoriam deſcribere. *Q. E. F.* LIBER PRIMUS.

Scholium.

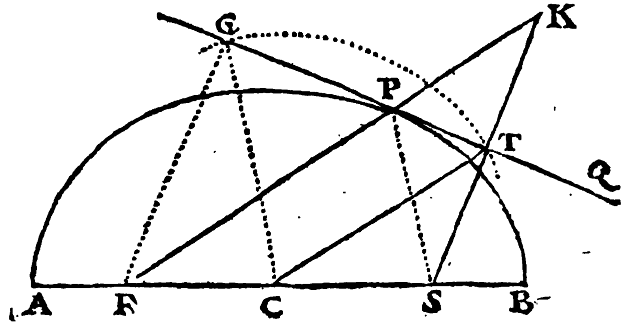
Problemata, ubi dantur trajectoriarum vel centra vel aſymptoti, includuntur in præcedentibus. ([c]) Nam datis punctis & tangentibus unà cum centro, dantur alia totidem puncta aliæque tangentes à centro ex alterâ parte æqualiter diſtantes. Aſymp-

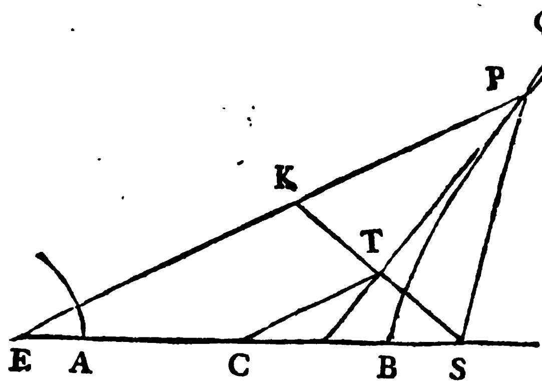
(b) 337. Datis ſectionis conicæ centro O, & tangente quâvis B F, altera tangens L K datæ parallela facile invenitur; Nam per centrum O ducatur recta quævis infinita M O N tangenti datæ occurrens in N, & ſumptâ O M = O N per M ducatur M K tangenti datæ F B parallela, erit M K tangens; ſi enim per punctum contactûs T & centrum O agatur ſectionis diameter T O S, erit S O = O T & tangens in S tangenti in T parallela lineam N O M ita ſecabit in M, ut ſit M O = O N, ob, S O : O T = M O : O N.



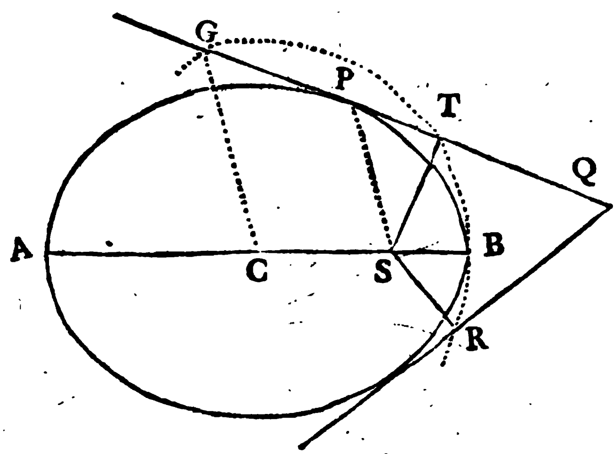
(c) 338. Hinc datis præter centrum tribus tangentibus non parallelis vel duabus tangentibus convergentibus & puncto, vel tangente & punctis duobus, vel punctis tribus, dantur ſex tangentes, vel tangentes quatuor & puncta duo, vel tangens & puncta quatuor, vel puncta ſex, quibus datis trajectoria deſcribi poteſt per prop. (27. 26. 25. 24. 23. 22.). Ex datis centro, alterutro axe, & duabus tangentibus non parallelis, vel tangente & puncto trajectoriæ Ellipticæ & Hyperbolicæ ex lemmatis ſequentibus facilè deſcribuntur.

Aſymptotos autem pro tangente habenda eſt, & ejus terminus infinitè diſtans (ſi ita loqui fas ſit) pro puncto contactus. Concipe tangentis cujuſvis punctum contactus abire in infinitum, & tangens vertetur in Aſymptoton, atque conſtructiones problematum præcedentium vertentur in conſtructiones ubi Aſymptotos datur.





339. Lemma. Si ex ſectionis conicæ umbilico utrovis S demittantur ad tangentem PQ normales ST, FG, rectæ CT, CG centrum ſectionis C & puncta interſectionum T, G jungentes æquales erunt ſemiaxi principali CB, & parallelæ lineis FP, SP ex altero umbilico F & S ad punctum contactûs P ductæ. Producantur enim FP, ST, donec concurrant in K, & erit (per Lem. XV. Newt.) FK = 2CB, KT = TS, cumque ſit etiam FC = CS, erit ST : SK = SC : SF, & ideo quia latera SK SF ſecantur proportionaliter in T & C erit CT parallela FK ſive FP, ideoque erit ST : SK = CT : FK & quia ST = $\frac{1}{2}$ SK erit CT æqualis $\frac{1}{2}$ FK, ſeu æqualis CB. Eodem modo probabitur, CG eſſe æqualem CB & parallelam lineæ PS.

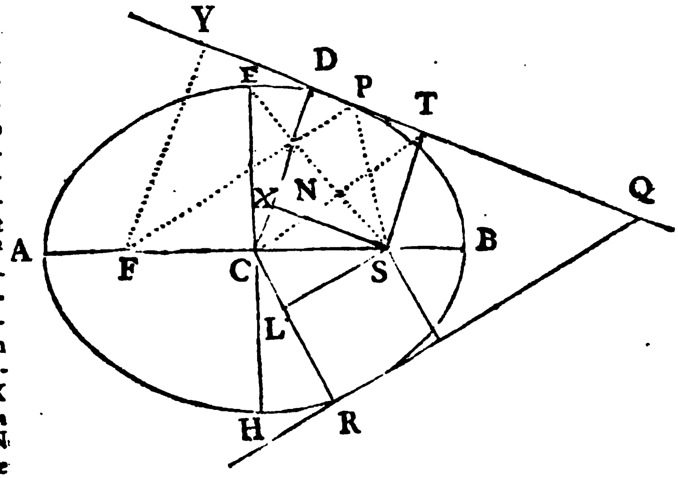


340. Datis centro C, duabus tangentibus P Q, E Q convergentibus & axe principali A B, deſcribitur ſectio conica. Nam ſi centro C & intervallo C B æqualis ſemiaxi principali deſcribatur circulus tangentes ſecans in T & R, agantur tangentibus perpendiculares T S, R S, concurrentes in S, erit punctum S, alteruter umbilicus quo dato cum centro C, dantur poſitio axis principalis C B, & ipſius longitudo ac umbilici duo.

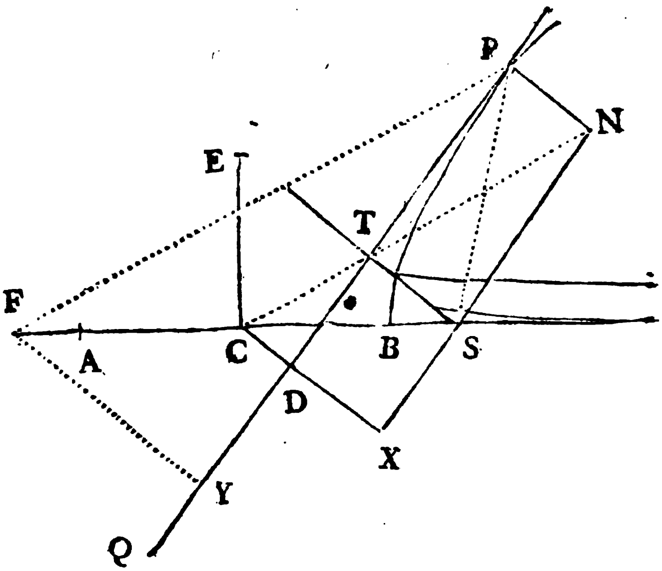
341. Datis centro C, tangente P Q; & puncto contactûs P, cum axe principali, trajectoria conica deſcribitur. Centro enim C, & intervallo æquali ſemiaxi principali deſcribatur circulus tangentem ſecans in T & G; in T excitetur perpendiculum T S, & junctâ C G, per punctum contactûs ducatur P S ipſi C G parallela perpendiculo T S occurrens in S, erit S umbilicus (339).

342. Si

De Motu Corporum.



342. Si ex centro C ſectionis conicæ ad tangentem PQ, demittatur perpendicularis CD, & ex altero umbilico S ad CD agatur normalis SX, ſitque CE ſemiaxis minùs principalis, erit in ellipſi $CX^2 = CD^2 - CE^2$, & in hyperbolâ $CX^2 = CD^2 + CE^2$, & demiſſâ ex umbilico in tangentem perpendiculari ST, junctâque CT, rectam SX ſecante in N, erit in utrâque ſectione XN æqualis DP diſtantiæ puncti contactûs P à perpendiculari CD; Nam in Ellipſi $CS^2 = CT^2\ (CB^2) - CE^2$, in Hyperbolâ $CS^2 = CT^2 + CE^2$, & in utrâque ſectione $CS^2 = CX^2 + SX^2 = CX^2 + DT^2$; Ergò in Ellipſi $CX^2 + DT^2 = CT^2 - CE^2 = CD^2 + DT^2 - CE^2$, & hinc $CX^2 = CD^2 - CE^2$, & in hyperbolâ $CX^2 + DT^2 = CT^2 + CE^2 = CD^2 + DT^2 + CE^2$, adeòque $CX^2 = CD^2 + CE^2$. Q. e. 1.



Ex altero umbilico F, in tangentem demittatur perpendicularis FY, & junctis FP, SP, ſimilia erunt triangula FPY, SPT, ob angulos æquales (Per natur. Tangentium & focorum) FPY, SPT, & STP, FYP rectos; & quoniam FP & CT, FY & CD ſunt parallelæ, ſimilia quoque erunt triangula CTD, FPY, ideóque duo triangula CTD, SPT ſunt ſimilia; quarè $CD : DT = ST\ (DX) : PT$, & diviſim $CD : DT = CD - DX : DT - PT$, & compoſitè $CD : DT = CD + DX : DT + PT$. Undè quoniam in Ellipſi $CD - DX = CX$, & $DT - PT = DP$; in hyperbolâ verò $CD + DX = CX$, & $DT + PT = DP$, erit in utrâque ſectione $CD : DT = CX : DP$. Verùm ob SX tangenti DT parallelam, $CD : DT = CX : XN$, ergò $XN = DP$. Q. e. 2.

343. Hinc datis centro C, ſemiaxe minùs principali CE, tangentibus duabus non

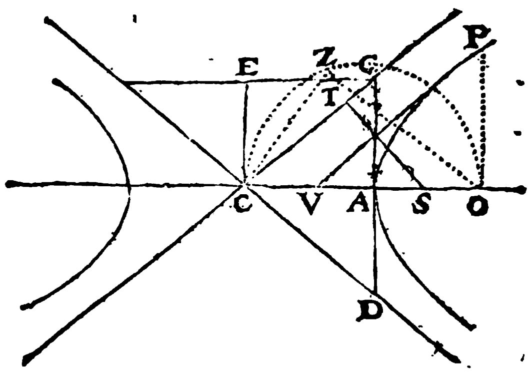
non parallelis, DQ, RQ, trajectoria Elliptica & Hyperbolica deſcribitur. Nam ex centro C, ad tangentes demittantur perpendicula CD, CR, & capiantur CX, CL, ità ut $CX^2 = CD^2 - CE^2$, $CL^2 = CR^2 - CE^2$, ſi deſcribenda ſit ellipſis; vel ità ut $CX^2 = CD^2 + CE^2$, & $CL^2 = CR^2 + CE^2$, ſi deſcribenda ſit hyperbola; & per X & L puncta, erigantur ad CD, CR perpendicula XS, LS concurrentia in S, erit S focus ex quo ſi ad tangentem alterutram DQ, demittatur normalis ST, juncta CT, erit ſemiaxis principalis.

344. Datis centro C, ſemiaxe minùs principali CE, tangente PQ, & puncto contactûs P, ſectio conica deſcribitur. Nam ductâ XS, infinitâ ut ſuprà (343) capiatur XN = DP & jungatur CN, producaturque donec tangenti occurrat in T, recta TS, tangenti normalis ſecabit rectam XS in umbilico S, eritque CT ſemiaxis principalis.

345. Dato centro cum tangente & alterutro axe datur poſitio rectæ per umbilicum tranſeuntis; undè ſi prætereà detur punctum extrà tangentem, facile erit umbilicum invenire. Eâdem ferè methodo quâ ſuperiora Lemmata demonſtravimus, Hermannus in Tom. IV. Academiæ Petropoolitanæ ſolvit problema de Ellipſi Conicâ, cujus axis alteruter datus eſt, angulo poſitione & magnitudine dato ità inſcribendâ ut centrum ejus intrà datum angulum ſit etiam poſitione datum.

346. Datis aſymptotis, dantur hyperbolæ centrum ſeu aſymptotorum concurſus; 2°. datur poſitio axium qui aſymptotorum angulos deinceps poſitos bifariam dividunt, 3°. datur eorum axium ratio, ſunt enim ſicut Sinus dimidiorum illorum angulorum CGA, ACG ideóque datis aſymptotis cum puncto vel tangente, hyperbola deſcribi poteſt (per prop. 4. & 9am. lib. 2. conic. apoll.). Scilicet per punctum P ducatur PO perpendicularis in axem & PV Aſymptoto Parallela & deſcripto circulo ſuper Diametrum CO in eo ſecetur chorda OZ = OV, & ſumatur CA = CZ & erit A Vertex Hyperbolæ. Nam ſit *a* verus Hyperbolæ Vertex, ſit C*a* ſemi axis major & *ag* ſemi axis minor, erit $Ca^2 : ag^2 = CO^2 - Ca^2 : PO^2$ (per nat. Hyp. vid. Theor. 2. de Hyp. p. 122. & Cor. I. Lem. 3. de Conicis p. 118.) ſed (per conſt.) eſt $Ca : ag = OV : PO$, ſive $Ca^2 : ag^2 = OV^2 : PO^2$ eſt ergo $OV^2 = CO^2 - Ca^2$, Rurſus (per Conſtr.) eſt OV^2 ſive $OZ^2 = CO^2 - CZ^2$ ergo $CO^2 - Ca^2 = CO^2 - CZ^2$ & $Ca = CZ = CA$, ergo erit A vertex Hyperbolæ.

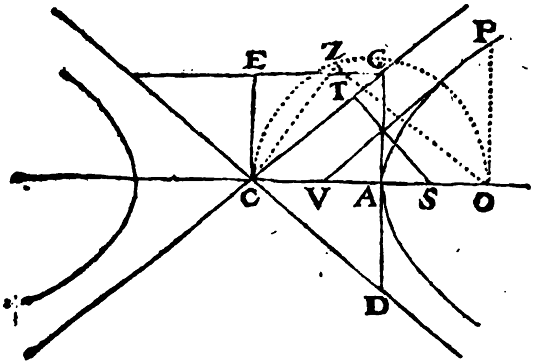
Si detur Tangens, producatur illa uſque ad utramque Aſymptoton ubi utrinque terminetur, ejus medium erit punctum contactûs, ſive punctum ad Hyperbolam pertinens, cujus ope axis major invenietur ut ſupra.



347. Datis aſymptotis & umbilico vel alterutro axe, facile eſt hyperbolam deſcribere. Sunto aſymptoti CG, CD concurrentes in C, S umbilicus, CA, CE ſemiaxes; ſi ex umbilico S, in aſymptotum quæ eſt tangens, demittatur perpendiculum ST, erit CT, æqualis ſemiaxi principali CA, (339), & ST æqualis ſemiaxi minùs principali CE ſeu GA, ob triangula CAG, CTS, ſimilia & æqualia propter latus CA æquale lateri CT, Quare dato præter aſymptotos ſemiaxe principali CT ſeu CA, datur umbilicus S, & contrà. Dato præter aſymptotos ſemiaxe minùs principali CE, ſeu GA, invenitur alter ſemiaxis CA, ſeu EG, rectæ CE normalis in E, & aſymptoto occurrens in G, & hinc reperitur umbilicus.

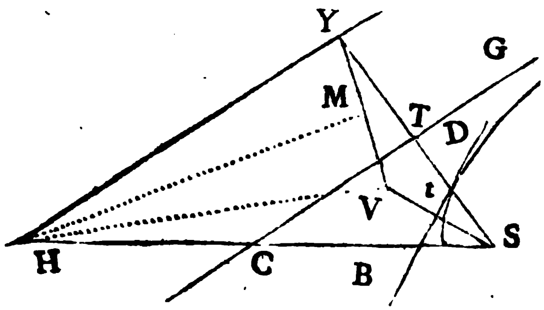
348. Aſymptotus data, ut notum eſt, in problematum ſolutione æquivalet tangenti datæ cum puncto contactûs ad diſtantiam infinitam poſito, atquè adeò recta quævis ex puncto dato ad punctum contactûs aſymptoti ducta ipſi aſypmtoto parallela.

lela eſt & poſitione data. Hinc facile erit problematum ſectionis I V. conſtructiones ad hyperbolam transferre ubi aſymptotus alterutra cum umbilico data eſt.

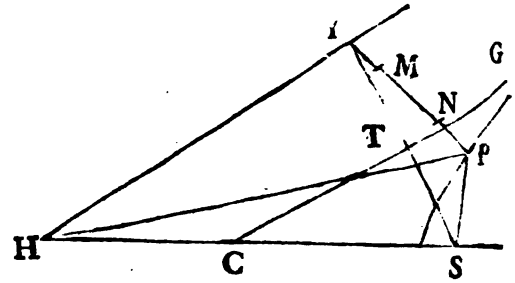


Datis umbilico S, axe principali, & aſymptoto C G, invenitur axis poſitio, demittendo ex umbilico S ad aſymptotum perpendicularem S T, & capiendo T C æqualem ſemiaxi dato, eſt enim C hyperbolæ centrum, C S axis principalis poſitio, T S ſemiaxis minùs principalis (348).

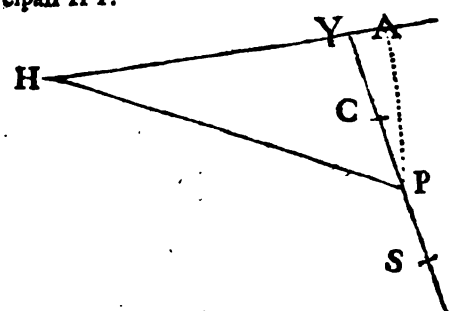
Datis umbilico & aſymptoto deſcribitur hyperbola ſpecie data, per conſtr. Caſ. 3. Prop. XIX. vel brevius, obſervando datam eſſe T S ſemiaxem minus principalem, undè ob datam axium rationem, dabitur centrum & axium poſitio cum alterâ aſymptoto, & hyperbola deſcribitur (348).



Datis aſymptoto, umbilico & tangente, invenitur umbilicus alter ac proindè axis tranſverſi poſitio & centrum. Sit enim aſymptotus data C G, umbilicus S, tangens B D, ex umbilico S, ad aſymptotum & tangentem, demittantur perpendicula S T, S t, & producantur ad Y & V ut ſint T Y = S T, t V = S t; per punctum Y, agatur Y H, aſymptoto parallela, & juncta Y V, biſecetur in M, perpendiculo M H; perpendiculi hujus & rectæ Y H communis interſectio H, eſt umbilicus alter, recta enim H Y, aſymptoto parallela tranſit per punctum contactûs aſymptoti, adeóque ob T Y = T S, tranſit etiam per umbilicum H; Porrò rectæ Y H, V H, per umbilicum H, ductæ ſunt æquales axi principali hyperbolæ per Lem. X V., & ideò æquales inter ſe; quare perpendiculum H M, ex umbilico H in rectam Y V demiſſum eam in M biſecat.



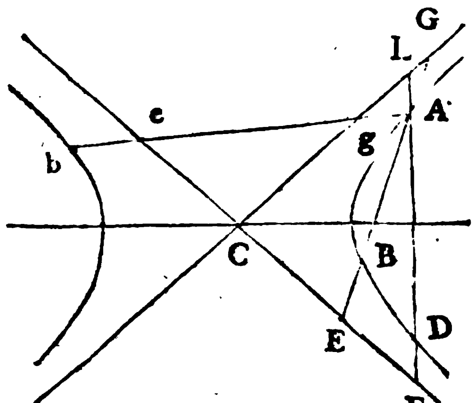
Datis aſymptoto C G, puncto P, & umbilico S, invenitur umbilicus alter H, demiſſo ad aſymptotum perpendiculo S T, & ſumptâ T Y = S T, actâque Y H aſymptoto parallelâ jungatur Y P, & in eâ capiatur M N = S P, & ità locetur ut ſit Y M = P N, hyperbola umbilicis Y, P, & axe principali M N, deſcripta, rectam Y H ſecabit in altero umbilico H quæſito. Nam P S ſeu M N eſt rectarum H Y, H P differentia, quæ ſemper æqualis eſt axi principali H Y.



Aliter, Huc redit problema, datis in triangulo H Y P latere P Y, angulo Y, & laterum H Y, H P differentia P S, invenire

venire latera. Ex puncto P, in HY, demittatur perpendicularis P A, capiatur laterum H P, H Y, differentia P C = P S, & ſumatur Y H ad C Y, ut eſt Y S ad S C $\mp$ 2 Y A, ſcribendo − 2 Y A, ſi angulus H Y P eſt obtuſus, & + 2 Y A, ſi acutus, & delendo $\mp$ Y A, ſi fuerit rectus, erit H punctum quæſitum, facilis eſt demonſtratio ob angulum rectum A.

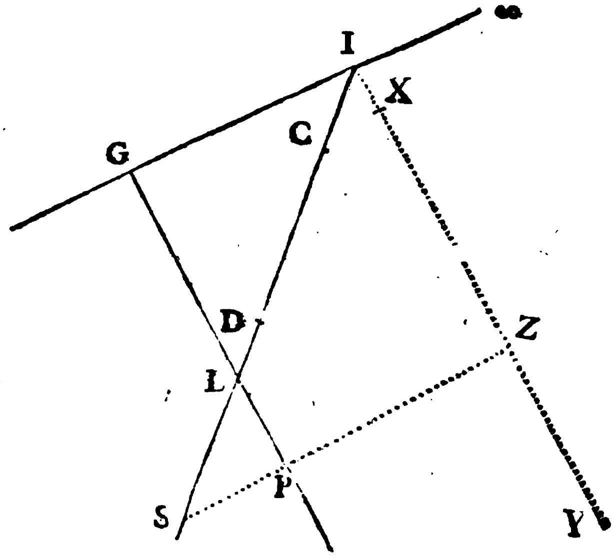
Sectionis V^{a}. problemata, ubi aſymptotus alterutra data eſt ad ſequentia revocantur.



349. Datâ aſymptoto C G, cum tribus punctis A, D, B, vel b, hyperbolam deſcribere. Per punctum quodvis A, datum & alia duo D, B, vel b, agantur lineæ infinitæ A D, A B vel A b, aſymptoto datæ occurrentes in L & G, vel g; tum capiantur F D = A L, B E = G A, vel b e = g A, juncta F E, aut F e, erit aſymptotus altera (per prop. 8^{am}. lib. 2. Conic. Apoll. per Lem. I. de Conic. p. 115.) quare (346) hyperbola deſcribitur, cum facilè inveniri poſſint quinque ſectionis puncta, per angulos mobiles organicè poteſt deſcribi.

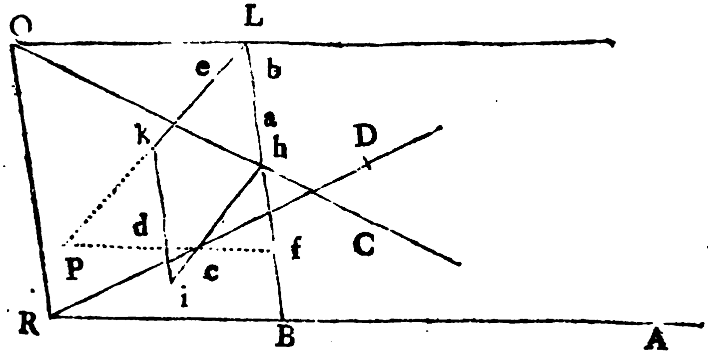
350. Datis aſymptoto G I, tangente G L, punctiſque duobus C, D, Hyperbolam deſcribere, conſtructio & demonſtratio eædem ferè ſunt ac problematis (XVI.).

Per puncta duo data C, D, age rectam infinitam C D, aſymptoto & tangenti occurrentem in punctis I, L, actam ita ſeca in S, ut ſit I S ad L S, ut eſt media proportionalis inter C I & I D ad mediam proportionalem inter C L & L D; deinde age S P aſymptoto G I parallelam, hæc ſecabit tangentem G L, in puncto contactûs P; nam ſi P ſupponatur eſſe punctum contactûs, & per punctum I agatur I Y tangenti G L parallela quæ occurrat hy-



perbolæ in X & Y, & in eâ ſumatur I Z, media proportionalis inter I X & I Y erit (per prop. 3. & 10. lib. 2. conic. Apoll.) $IX \times IY$ ſive $IZ^2 = PG^2$, ſit enim ∞ punctum contactus Hyperbolæ & Aſymptoti erit $\infty I^2 : \infty G^2 = IX \times IY : PG^2$ (par Cor. 2. Lem. III. de Conic. p. 118.) ſed cum ∞ I & ∞ G ſint lineæ infinitæ quantitate finitâ G I differentes, pro æqualibus habentur, ergo etiam $IX \times IY$ ſive $IZ^2 = PG^2$, atque adeò $IZ = PG$, & conſequenter juncta P Z, parallela eſt aſymptoto G I; recta Z P producta ſecet rectam I L, in puncto aliquo S, & ob ſimilia triangula S I Z, S L P, erit $IZ^2 : LP^2 = IS^2 : LS^2$; verùm (vid. Not. ad probl. X V I. aut Lem. III. de Conic. p. 117.) $XI \times IY$ (IZ^2) : $LP^2 = CI \times ID : CL \times LD$; ergò $IS^2 : LS^2 = CI \times ID : CL \times LD$, quare ſi recta I L ita ſecetur in S, ut ſit $IS^2 : LS^2 = CI \times ID : CL \times LD$, & agatur S P, aſymptoto G I parallela, erit P punctum contactûs. Datis autem tribus punctis C, P, D, Hyperbola deſcribitur (349).

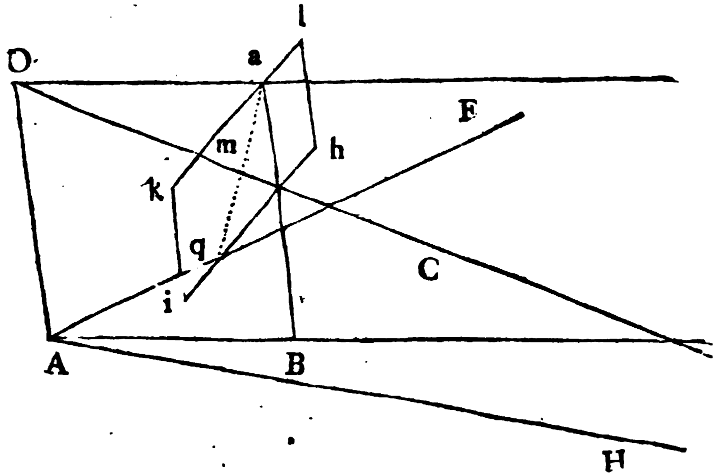
351.



351. Datis aſymptoto OL, duabus tangentibus OC, RD, & puncto A, Hyperbolam deſcribere; (ſolutio facilè deducitur ex problemate XVII).

Per concurſum O aſymptoti OL cum tangente OC, & concurſum R tangentis alterius RD cum rectâ RA quæ per punctum datum A & punctum contactûs aſymptoti tranſit, ſeu quæ eſt aſymptoto parallela; age rectam infinitam OR, eâque adhibitâ pro radio ordinato primo, OL verò pro radio ordinato novo uſurpatâ, ſumptiſque ordinatis novis aſymptoto parallelis (ad majorem conſtructionis facilitatem), tranſmutetur figura per Lem. XXII. in figuram novam, nimirum linea BA in lineam Ba, (330), punctum A in a, linea RD in ik ipſi BL parallelam (329) OC in ih, OL in kL ipſi ih parallelam (327) & punctum contactûs aſymptoti infinitè diſtans transferetur in L; Nam punctum contactûs aſymptoti eſt communis interſectio Linearum RA, OL infinitarum, & ideò transfertur in L communem interſectionem rectarum kL, BL parallelogrammi hikL; Tria ergo latera hi, ik, kL tangunt novam ſectionem conicam quæ tranſire debet per punctum a, dicantur c & d puncta contactuum linearum hi, ik, ſic invenietur punctum c, ſumatur Radix quadrata facti $hL \times ha$ & addatur lineæ ik, illa ſumma erit ad duplum lineæ hi ut ea ipſa Radix quadrata ad portionem hc. Hoc eſt $ik + \sqrt{hL \times ha} : 2hi = \sqrt{hL \times ha} : hc$. Nam (per Cor. 2. & 3. Lem. III. de Conic. p. 118.) eſt $dk^2 : kL^2 = di^2 : ic^2 = hL \times ha : hc^2$ inde eſt $dk : kL = di : ic = \sqrt{hL \times ha} : hc$, & ſumendo ſummam Antec. & Conſeq. eſt $dK + di + \sqrt{hL \times ha} : KL + ic + hc$ ſive $ik + \sqrt{hL \times ha} : kL + hi$ ($2hi$) $= \sqrt{hL \times ha} : hc$: Invento autem puncto c invenitur punctum d, ſi quidem eſt $di : ic = \sqrt{hL \times ha} : hc$: Conſtruitur autem hæc ſolutio capiendo hf, æqualem mediæ proportionali inter Lh & ah, & productâ Lk ad P, ut ſit $kP = kL$, agendo per f & P rectam fP, illa fP latera hi, ik ſecabit in punctis quæſitis c, d; nam ob parallelas ch, PL & ik, fL eſt Lf ($ik + \sqrt{ah \times hL}$) : LP ($2kL$ ſive $2ih$) $=$ hf ($\sqrt{ah \times hL}$) : hc, & $hc : hf = ic : id$; per inverſas operationes Lem. XXII. (331), transferantur puncta c, d, in figuram primam, nimirum in C, D, & data erunt tria hyperbolæ puncta D, C, A, cum aſymptoto OL, quarè deſcribetur hyperbola (349).

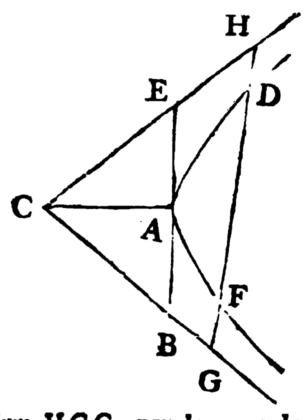
352. Dati



352. Datâ aſymptoto O a, & tribus tangentibus O C, A F, A H hyperbolam deſcribere, ſolvitur ut problema XVIII. Ab interſectione communi O aſymptoti O a, & tangentis O C, ad interſectionem communem A aliarum tangentium A F, A H agatur recta infinita O A, & eâdem pro radio ordinato primo adhibitâ, O a verò aſymptoti parte pro radio ordinato novo ſumptâ, tranſmutetur figura in figuram novam, nimirùm tangens O C & aſymptotus in parallelas i h, k l punctum contactûs aſymptoti in a, & duæ tangentes A F, A H in parallelas i k, h l, & parallelogrammi h l k i, latera ſingula novam ſectionem conicam tangunt, & quidem latus k l, in a, per a, & parallelogrammi centrum m, agatur a q, tangenti, i h, occurrens in q, & erit q, punctum alterum quo i h, novam ſectionem tangit. Per Lemmatis XXII. operationem inverſam transferatur hoc punctum in figuram primam, nempè in C, & erit C, punctum contactûs tangentis O C, quarè datis aſymptoto O a, duabus tangentibus A F, A H, & puncto C, deſcribetur hyperbola. (351).

353. Datis aſymptoto, axium ratione, duobus punctis vel puncto & tangente aut binis tangentibus, hyperbolam deſcribere. Sunto hyperbolæ aſymptoti C E, C G, centrum C, vertex principalis A, ſemiaxis tranſverſus C A, ſemiaxis conjugatus A E ad C A, normalis; in triangulo rectangulo C A E datâ ratione crurum C A, A E, datur angulus E C A, eſt enim C A, ad E A, ut ſinus totus ad tangentem anguli E C A, quarè da-â ſpecie hyperbolæ ſeu axium ratione datur aſymptotorum angulus E C B, & viceverſâ dato aſymptotorum angulo datur ſpecie hyperbola; his poſitis problema facile ſolvitur.

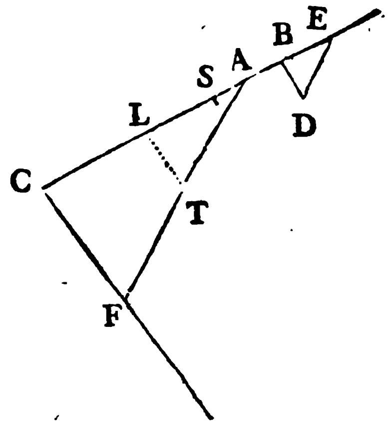
Caſ. 1. Data ſit aſymptotus C H, cum axium ratione ſeu aſymptotorum angulo & punctis duobus D, F, per puncta illa age rectam infinitam D F, aſymptoto datæ occurrentem in H, fac F G = H D, & per punctum G, age rectam infinitam G C, quæ cum aſymptoto C H, efficiat



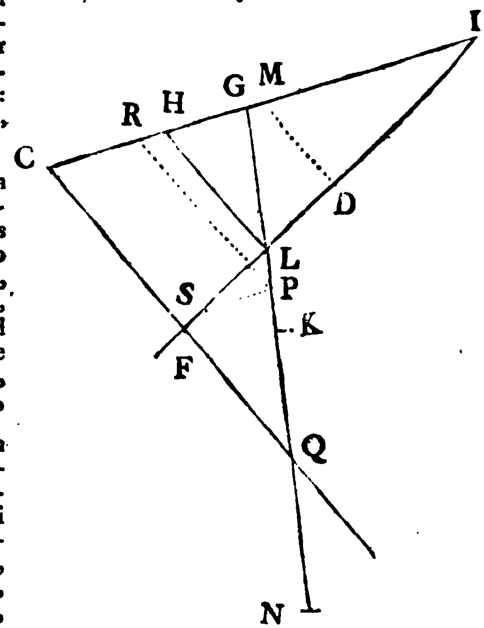
angulum H C G, æqualem angulo aſymptotorum dato, erit C G, aſymptotus altera (per prop. 8am. Lib. 2. conic. Apoll. ſive Lemma I. de Conic.) quarè deſcribetur hyperbola (346).

DE MOTU CORPORUM.

Caſ. 2. Data ſit aſymptotus C E, cum aſymptotorum angulo, puncto D, & tangente F A; per punctum D datum agantur recta B D, ad angulum D B E datum, ſeu æqualem aſymptotorum angulo, & D E tangenti F A parallela, capiantur B S æqualis mediæ proportionali inter B E & A E, & A C æqualis 2 S E, erit C hyperbolæ centrum, C F verò rectæ B D parallela aſymptotus altera. Nam ſit T punctum contactûs, C F aſymptotus altera, ductâ T L aſymptoto F C parallelâ, erit F T = T A (per prop. 31m. Lib. 2. conic. apoll. ſup. Theor. I. de Hyp. p. 122.) ac proindè L A = C L: Eſt autem ex naturâ hyperbolæ inter aſymptotos C L × L T, hoc eſt A L × L T = C B × B D, adeóque B D : L T = A L : C B. (2 A L + A B) & ob triangula ſimilia A L T, E B D, B D : L T = B E : A L; ergò B E : A L = A L : 2 A L + A B, ſed (per conſtr.) B E : B S = B S : B E + A B, & compoſitè B E : B S = S E : S E + A B, & B E : S E = S E : 2 S E + A B, eſt igitur A L = S E, & 2 A L ſeu A C = 2 S E.

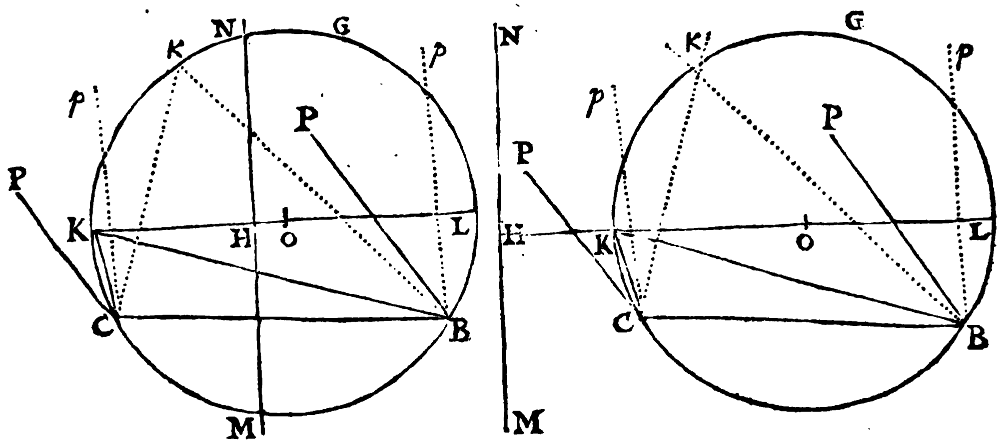


Caſ. 3. Data ſit aſymptotus G I, cum aſymptotorum angulo & duabus tangentibus F I, G Q ſe mutuò interſecantibus in L & aſymptotum in G & I; ex puncto L agatur ad aſymptotum G I recta L H, in angulo aſymptotorum dato L H G, producatur G L ad N, ut ſit L N ad H I, ut eſt G L ad G H, capianturque G K æqualis mediæ proportionali inter G L, & L N, & L P æqualis $\frac{1}{2}$ L K, erit P punctum contactûs tangentis G Q. Nam ſi ſupponamus P, D eſſe puncta contactuum, & C Q aſymptotum alteram tangenti G Q occurrentem in Q & alteri aſymptoto in C, & ex punctis D, P ductæ intelligantur rectæ D M, P R & P S, aſymptotis C I & C Q parallelæ ac D M, P R aſymptoto C I occurrant in M, R, P S verò tangenti F I in S, erit C R = R G, & C M = M I; & ob ſimilia triangula G L I, P L S, G L : L P = L I : L S, adeóque componendo G P : L P = I S : L S, ſed (323.) I S : L S = D I : L D; quarè G P : L P = D I : L D, ac proindè G P + L P : G P = L I : D I. Porrò in triangulis ſimilibus I L H, I D M, $LI^2 : HI \times LH = DI^2 : DM \times MI$, & in triangulis ſimilibus G L H, G R P, $GH \times LH : GL^2 = GR \times RP : GP^2 = DM \times MI : GP^2$, ob $MI \times DM = CM \times DM = CR \times RP = GR \times RP$ ex naturâ hyperbolæ inter aſymptotos, quarè per compoſitionem rationum $LI^2 \times GH \times LH : GL^2 \times HI \times LH = DI^2 : GP^2 = LI^2 \times GH : GL^2 \times HI$. Verùm (per conſtruct.) $GH : HI = GL^2 : GL \times LN$, & $GK^2 = GL \times LN$, ac proindè $GH : HI = GL^2 : GK^2$; undè $DI^2 : GP^2 = LI^2 \times GL^2 : GL^2 \times GK^2 = LI^2 : GK^2$, & D I : G P = L I : G K, atque adeò L I : D I = G K : G P; ſed ſuprà invenimus G P + L P : G P = L I : D I, ergò G K : G P = G P + L P : G P, atque



ità

Poſtquam trajectoria deſcripta eſt, invenire licet axes & umbilicos ejus hàc methodo. In conſtructione & figurâ lemmatis xxi. fac ut angulorum mobilium PBN, PCN crura BP, CP, quorum concurſu trajectoria deſcribebatur, ſint ſibi invicem parallela, eumque ſervantia ſitum revolvantur circa polos ſuos B, C in figurâ illâ. Interea vero deſcribant altera angulorum illorum crura CN, BN, concurſu ſuo K vel k, circulum $BGKC$.



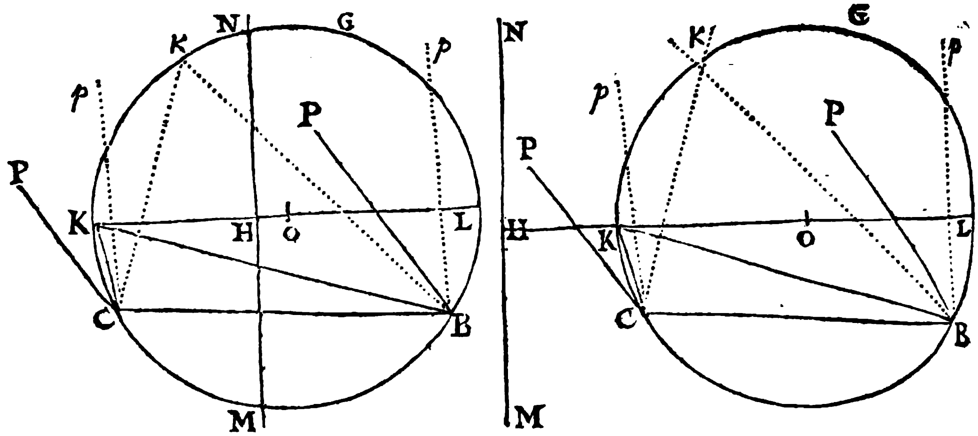
Sit circuli hujus centrum O. Ab hoc centro ad regulam MN, ad quam altera illa crura CN, BN interea concurrebant, dum trajectoria deſcribebatur, demitte normalem OH circulo occurrentem in K & L. Et ubi crura illa altera CK, BK concurrunt ad punctum illud K quod regulæ propius eſt, crura prima CP, BP parallela erunt axi majori, & perpendicularia minori; & contrarium eveniet, ſi crura eadem concurrunt ad punctum remotius L. Unde ſi detur trajectoriæ centrum, dabuntur axes. (d) Hiſce autem datis, umbilici ſunt in promptu.

Axium

ità $GK = GP + LP$, ſeu $GL + LK = GL + 2LP$, ac proindè $LK = 2LP$, & $LP = \frac{1}{2}LK$; invento autem puncto contactûs P, ſi capiatur $PQ = PG$, & per punctum Q, agatur QC, ipſi LH parallela, erit QC altera aſymptotus, & hyperbola deſcribetur (346).

(d) * Vid. Not. 314.

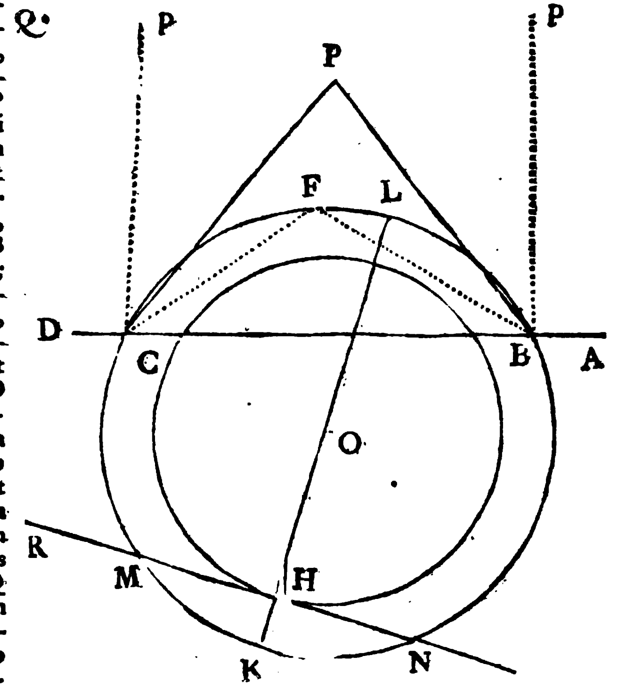
 * Vid.



(e) Axium vero quadrata ſunt ad invicem ut *KH* ad *LH*, & inde facile eſt trajectoriam (f) ſpecie datam per data quatuor puncta deſcribere. Nam ſi duo ex punctis datis conſtituantur poli *C*,

(e) * Vid. Not. 315.

(f) Sit deſcribenda trajectoria ſpecie data per puncta quatuor C, B, P, Q, duo puncta C, B conſtituantur poli & junctis CP, BP erunt PCB, PBC anguli mobiles, fac ut angulorum illorum crura BP, CP ſint ſibi invicem parallela, nempè in poſitione quâvis Bp, Cp, & crura alia BC, CB ſe mutuò interſecent in F; & centro O deſcribe circulum per tria puncta C, F, B tranſeuntem cujuſque proindè ſegmentum CFB capit angulum CFB, centro O radio OH deſcribatur circulus, (punctum verò H, ita determinetur in Diametro KL ut ſit KH ad LH ut ſunt ad invicem quadrata axium trajectoriæ). Tum crurum BP, CP concurſus adducatur ad punctum Q & intereà notetur punctum R ubi concurrunt alia crura CA, BD, & ex puncto R agatur recta RMN tangens circulum radio OH deſcriptum, erit *NM regula cujus ope trajectoria deſcribetur* (314).



B, tertium dabit angulos mobiles, *PCK*, *PBK*; his autem datis deſcribi poteſt circulus *BGKC*. Tum ob datam ſpecie trajectoriam, dabitur ratio *OH* ad *OK*, ideoque ipſa *OH*. Centro *O* & intervallo *OH* deſcribe alium circulum, & recta, quæ tangit hunc circulum, & tranſit per concurſum crurum *CK*, *BK*, ubi crura prima *CP*, *BP* concurrunt ad quartum datum punctum, erit regula illa *MN* cujus ope trajectoria deſcribetur. (g) Unde etiam viciſſim trapezium ſpecie datum (ſi caſus quidam impoſſibiles excipiantur) in datâ quâvis ſectione conicâ inſcribi poteſt.

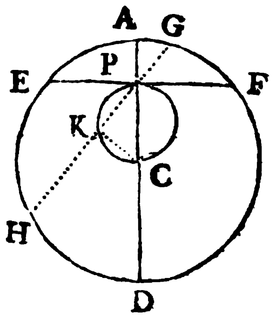
Sunt & alia lemmata quorum ope trajectoriæ ſpecie datæ, datis punctis & tangentibus, deſcribi poſſunt. (h) Ejus generis eſt quod, ſi recta linea per punctum quodvis poſitione datum ducatur, quæ datam coni ſectionem in punctis duobus interſecet, & interſectionum intervallum biſecetur, punctum biſectionis tanget aliam coni ſectionem ejuſdem ſpeciei cum priore, atque

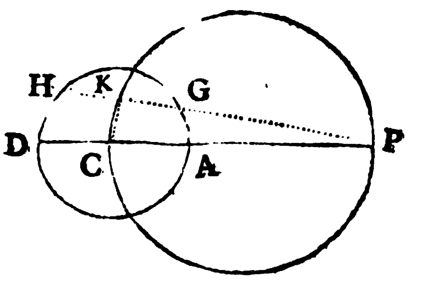
Si deſcribenda foret parabola, ducenda eſſet ex puncto R recta RN, circulum CKB tangens; nam in parabolâ punctum H, coincidit cum puncto K (313).

Quoniam autem ex puncto R, duæ tangentes ut RN duci poſſunt, patet duas trajectorias ſpecie datas per data quatuor puncta poſſe deſcribi.

(g) * Nam ſi deſcribatur trapezium quodvis ſpecie datum, & huic circumſcribatur ſectio conica datæ ſimilis Methodo in notâ præcedente expoſitâ, deindè in ſectione conicâ datâ quatuor agantur lineæ in eâ ſimiliter poſitæ ac quatuor trapezii latera in ſectione trapezio circumſcriptâ, habebitur trapezium ſpecie datum in datâ ſectione conicâ inſcriptum.

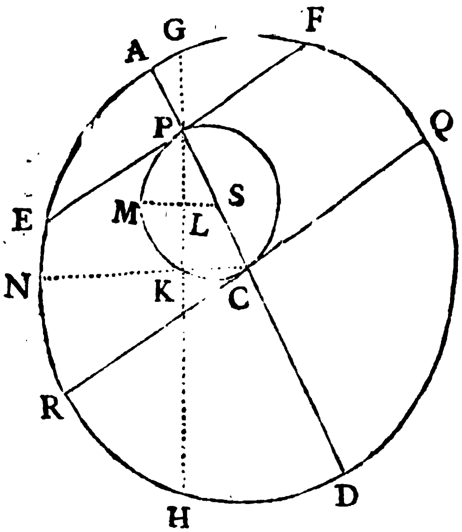
(h) * Hoc Lemma facilè demonſtratur in circulo. Intra vel extra circulum AFDE datum ſit punctum P per quod & per centrum circuli C agatur PD; tum diametro PC deſcribatur circulus PKCP, chorda quælibet GH per punctum P ducta, bifariam diviſa eſt in puncto K ubi circulo PKC occurrit; Nam junctâ KC, erit angulus CKP rectus ac proindè chorda HG biſecta in K.



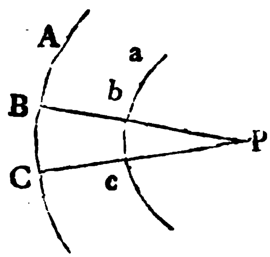


DE MOTU CORPORUM. atque axes habentem prioris axibus parallelos. Sed propero ad magis utilia.

LEM-



parallelæ, ſed quia in triangulis ſimilibus PSL, PCK eſt PS = SC erit quoque PL = LK, ac proindè PLK erit ordinata ad diametrum SM, adeóque GKH erit ordinata ad diametrum NC; quarè GK = KH *ergo punctum biſectionis K tanget curvam priori ſimilem & axes habentem prioris axibus parallelos.* Eadem eſt demonſtratio, ſi punctum P extrà ſectionem ſumatur.

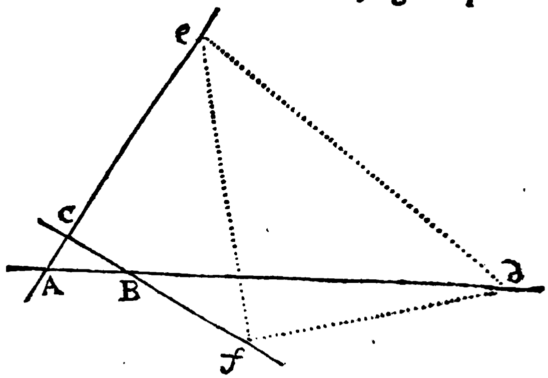


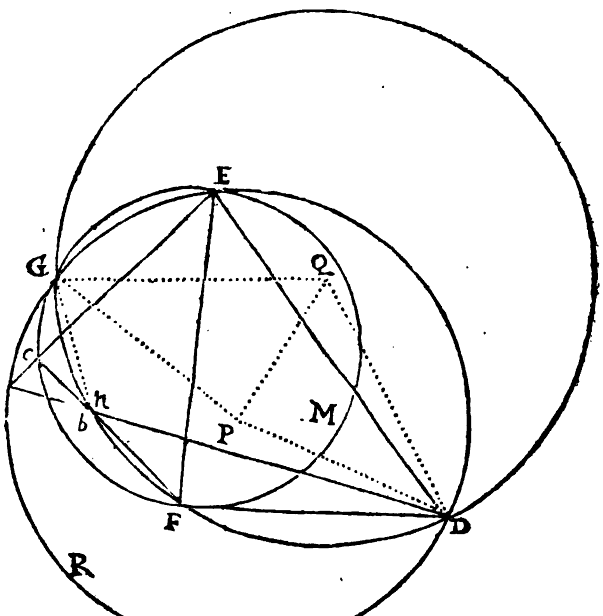
(h) * Idem Lemma pari facilitate in cæteris ſectionibus conicis demonſtratur. Datum ſit punctum P, per hoc & per centrum C ſectionis conicæ AFDE agatur diameter AD, tùm diametro PC, quæ ſimilis ſit diametro AD, deſcribatur alia ſectio conica PMKC, ejuſdem ſpeciei cum datâ, & diameter conjugata ipſius PC, ſimilis erit & parallela diametro RQ, conjugatæ ipſius AD, & quia in duabus figuris ſimilibus, ſi duo latera homologa parallela ſint, cætera omnia latera ſimilia ſunt etiam parallela, ambarum ſectionum conicarum ſimiles diametri omnes, adeóque & axes paralleli erunt; agatur nunc per punctum datum P, chorda quævis GPH, ſectioni PMC occurrens in K, dico eſſe KH = KG. Nam jungatur CK, & producatur donec trajectoriæ AHD occurrat in N, & per centrum S trajectoriæ PKC, agatur SM parallela CK, chordæ PK occurrens in L & ſectioni in M, erunt SM, NC diametri ſimiles, & earum ordinatæ

354. Adjungemus aliud Lemma maximè univerſale. Si ex puncto quovis P dato ducatur recta PB, curvæ cuilibet ABC occurrens in B, & recta illa PB ità dividatur in b, ut ſit ſemper Pb ad PB in ratione datâ, punctum b, tanget curvam abc ejuſdem ſpeciei & ordinis cum curvâ ABC, atque lineas habentem ſimilibus curvæ ABC lineis parallelas. Nam ſi fuerit ABC polygonum rectilineum cujus latus unum BC, cum ſit (per hyp.) Pb : PB = Pc : PC, ſimilia erunt triangula PBC, Pbc, & latera BC, bc, parallela & in datâ ratione PB, ad Pb, ac proindè totum polygonum ABC ſimile polygono abc, & eorum latera homologa parallela erunt. Laterum polygoni ABC numerus augeatur in infinitum & ipſorum longitudo in infinitum minuatur & duo polygona ABC, abc mutabuntur in curvas ſimiles in quibus latera homologa ſunt parallela.

LEMMA XXVI.

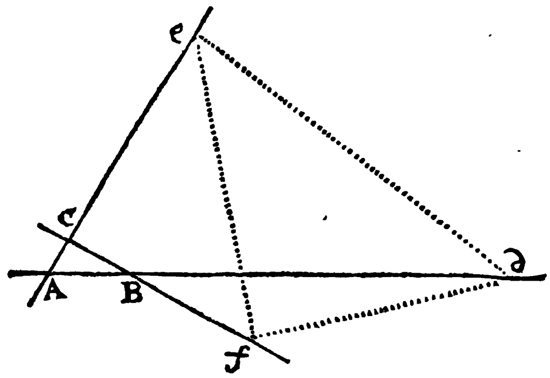
Trianguli ſpecie & magnitudine dati tres angulos ad rectas totidem poſitione datas, quæ non ſunt omnes parallelæ, ſingulos ad ſingulas ponere.

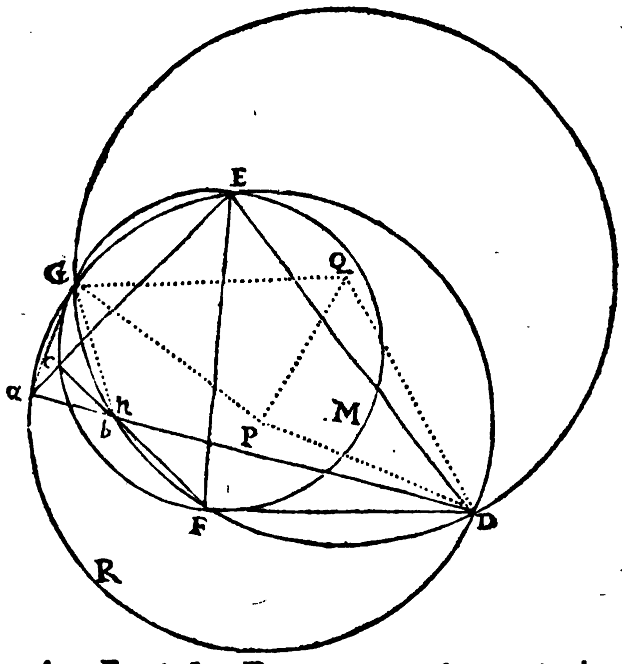




Dantur poſitione tres rectæ infinitæ *AB*, *AC*, *BC*, & oportet triangulum *DEF* ita locare, ut angulus ejus *D* lineam *AB*, angulus *E* lineam *AC*, & angulus *F* lineam *BC* tangat. Super *DE*, *DF* & *EF*, deſcribe tria circulorum ſegmenta *DRE*, *DGF*, *EMF*, quæ capiant angulos angulis *BAC*, *ABC*, *ACB* æquales reſpectivè. Deſcribantur autem hæc ſegmenta ad eas partes linearum *DE*, *DF*, *EF*, ut literæ *DRED* eodem ordine cum literis *BACB*, literæ *DGFD* eodem cum literis *ABCA*, & literæ *EMFE* eodem cum literis *ACBA* in orbem redeant; deinde compleantur hæc ſegmenta in circulos integros. Secent circuli duo priores ſe mutuo in *G*, ſintque centra eorum *P* & *Q*. Junctis *GP*, *PQ*, cape *Ga* ad *AB* ut eſt *GP* ad *PQ*, & centro *G*, intervallo *Ga* deſcribe circulum, qui ſecet circulum primum *DGE* in *a*. Jungatur tum *aD* ſecans circulum ſecundum *DFG* in *b*, tum *aE*

ſecans circulum tertium *EMF* in *c*. Et jam licet figuram *ABCdef* conſtituere ſimilem & æqualem figuræ *abcDEF*. Quo facto perficitur problema.





Agatur enim *Fc* ipſi *aD* occurrens in *n*, & jungantur *aG* *bG*, *QG*, *QD*, *PD*. Ex conſtructione eſt angulus *EaD* æqualis angulo *CAB*, & (i) angulus *acF* æqualis angulo *ACB*,

(i) * *Angulus acF æqualis angulo ACB*, nam angulus FcB eſt anguli acF atque etiam anguli in ſegmento EMF complementum ad duos rectos, quarè angulus acF, eſt æqualis angulo quem capit ſegmentum EMF, hic autem angulus æqualis eſt angulo ACB (per conſtr.).

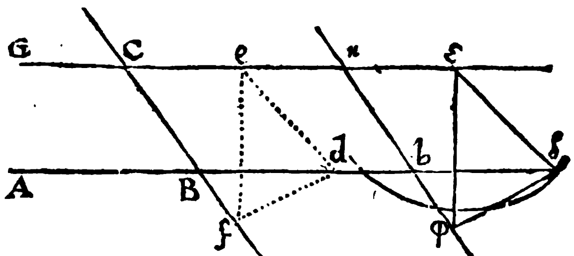
* An-

ideoque triangulum *anc* triangulo *ABC* æquiangulum. Ergo angulus *anc* ſeu *FnD* angulo *ABC*, ideoque angulo *FbD* æqualis eſt; & propterea punctum *n* incidit in punctum *b*. Porro angulus *GPQ*, (k) qui dimidius eſt anguli ad centrum *GPD*, æqualis eſt angulo ad circumferentiam *GaD*; & angulus *GQP*, qui dimidius eſt anguli ad centrum *GQD*, æqualis eſt complemento ad duos rectos anguli ad circumferentiam *GbD*, ideoque æqualis angulo *Gba*; ſuntque ideo triangula *GPQ*, *Gab* ſimilia; & *Ga* eſt ad *ab* ut *GP* ad *PQ*; id eſt (ex conſtructione) ut *Ga* ad *AB*. Æquantur itaque *ab* & *AB*; & propterea triangula *abc*, *ABC*, quæ modo ſimilia eſſe probavimus, ſunt etiam æqualia. Unde cum tangant inſuper trianguli *DEF* anguli *D*, *E*, *F* trianguli *abc* latera *ab*, *ac*, *bc* reſpectivè, compleri poteſt figura *ABCdef* figuræ *abcDEF* ſimilis & æqualis, atque eam complendo ſolvetur problema. *Q.E.F.*

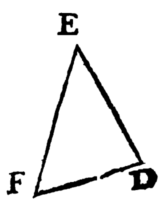
Corol. Hinc recta duci poteſt cujus partes longitudine datæ rectis tribus poſitione datis interjacebunt. Concipe triangulum *DEF*, puncto *D* ad latus *EF* accedente, & lateribus *DE*, *DF* in directum poſitis, mutari in lineam rectam, cujus pars data *DE* rectis poſitione datis *AB*, *AC*, & pars data *DF* rectis poſitione datis *AB*, *AC*, interponi debet;

(k) * Angulus GPQ dimidius eſt anguli ad centrum GPD, recta enim PQ, quæ circulorum DRGD, DGFD centra jungit, perpendicularis eſt ad rectam GD, quæ puncta interſectionum circulorum jungeret adeóque angulum GPD biſecat.

355. Si trium rectarum GC, AB, CB poſitione datarum duæ GC, AB ſint parallelæ & oporteat triangulum datum DEF ità locare ut angulus ejus D lineam AB, angulus E lineam GC, & angulus F lineam BC tangat, centro quovis ϵ in lineâ GC, ad arbitrium ſumpto & radio $\epsilon\delta$, æquali ED, deſcribatur circulus rectæ AB, occurrens in δ; ſuper baſi $\epsilon\delta$ conſtruatur triangulum $\epsilon\delta\varphi$ ſimile & æquale triangulo dato EDF, & ex angulo illius φ agatur $\varphi\kappa$ rectæ BC parallela ſecans GC in κ; & AB in b;



& compleatur figura CBfde ſimilis & æqualis figuræ $\kappa b \varphi \delta \epsilon$, patet factum. Si recta ED minor ſit parallelarum GC, AB diſtantiâ, problema impoſſibile eſt; ſi major fuerit circulus radio $\epsilon\delta$, deſcriptus, rectam AB in duobus punctis ſecabit, & duæ erunt rectæ $\epsilon\delta$ poſitiones.

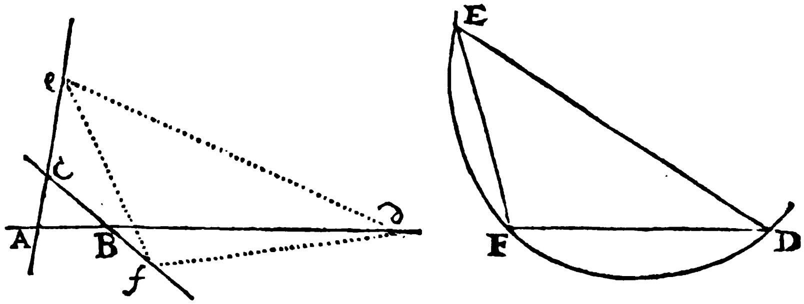


& applicando conſtructionem præcedentem ad hunc caſum ſolvetur problema.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA XX.

Trajectoriam ſpecie & magnitudine datam deſcribere, cujus partes datæ rectis tribus poſitione datis interjacebunt.

Deſcribenda ſit trajectoria, quæ ſit ſimilis & æqualis lineæ curvæ *DEF*, quæque à rectis tribus *AB*, *AC*, *BC* poſitione



datis, in partes datis hujus partibus *DE* & *EF* ſimiles & æquales ſecabitur.

Age rectas *DE*, *EF*, *DF*, & trianguli hujus *DEF* pone angulos *D*, *E*, *F* ad rectas illas poſitione datas (per lem. XXVI) (1) dein circa triangulum deſcribe trajectoriam curvæ *DEF* ſimilem & æqualem. *Q. E. F.*

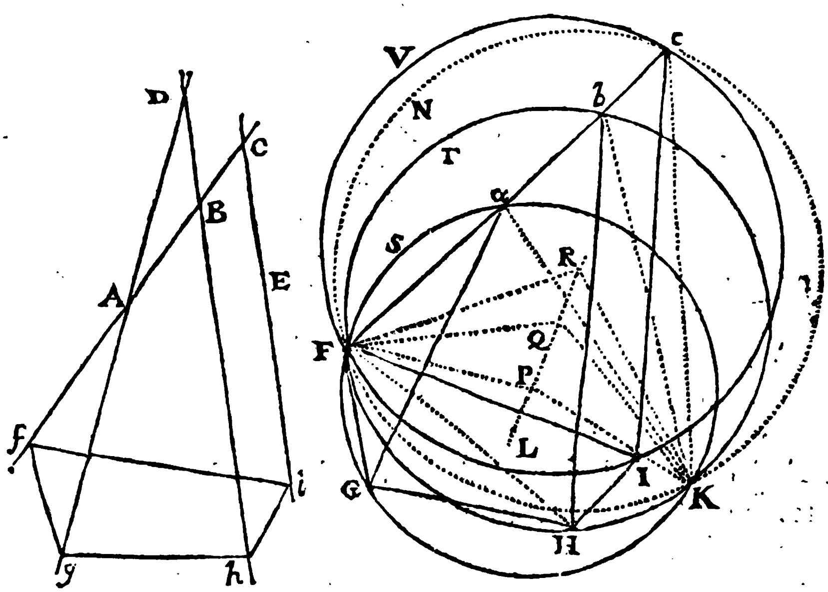
LEM-

(1) * Si enim data ſit curva DEF, triangulo dato EFD circumſcripta, dabitur diametrorum & axium ejuſdem curvæ poſitio ad trianguli EFD latera, & hinc habebitur poſitio diametrorum & axium curvæ ſimilis & æqualis circà triangulum efd deſcribendæ.

LEMMA XXVII.

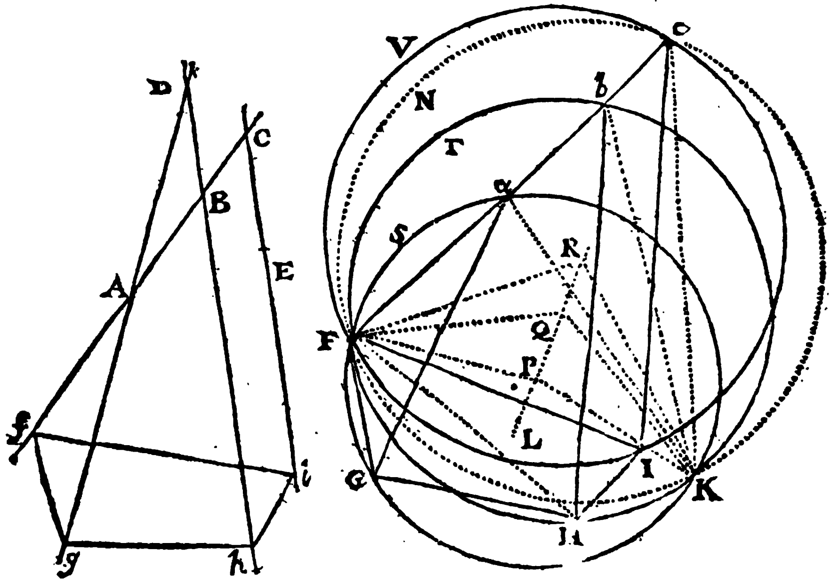
Trapezium ſpecie datum deſcribere, cujus anguli ad rectas quatuor poſitione datas, quæ neque omnes parallelæ ſunt, neque ad commune punctum convergunt, ſinguli ad ſingulas conſiſtent.

Dentur poſitione rectæ quatuor *ABC*, *AD*, *BD*, *CE*; quarum prima ſecet ſecundam in *A*, tertiam in *B*, & quartam in *C*: & deſcribendum ſit trapezium *fghi*, quod ſit trapezio *FGHI* ſimile; & cujus angulus *f*, angulo dato *F* æqualis, tan-



gat rectam *ABC*; cæterique anguli *g*, *h*, *i*, cæteris angulis datis *G*, *H*, *I* æquales, tangant cæteras lineas *AD*, *BD*, *CE* reſpectivè. Jungatur *FH* & ſuper *FG*, *FH*, *FI* deſcribantur totidem circulorum ſegmenta *FSG*, *FTH*, *FVI*; quorum primum *FSG* capiat angulum æqualem angulo *BAD*, ſecundum *FTH* capiat angulum æqualem angulo *CBD*, ac ter-

tium *FVI* capiat angulum æqualem angulo *ACE*. Deſcribi autem debent ſegmenta ad eas partes linearum *FG*, *FH*, *FI*, ut literarum *FSGF* idem ſit ordo circularis qui literarum *BADB*, utque literæ *FTHF* eodem ordine cum literis *CBDC*; & literæ *FVIF* eodem cum literis *ACEA* in orbem redeant. Compleantur ſegmenta in circulos integros; ſitque *P* centrum circuli primi *FSG*, & *Q* centrum ſecundi *FTH*. Jungatur & utrinque producatur *PQ*, & in eâ capiatur *QR* in eâ ratione



ad *PQ* quam habet *BC* ad *AB*. Capiatur autem *QR* ad eas partes puncti *Q* ut literarum *P*, *Q*, *R* idem ſit ordo atque literarum *A*, *B*, *C*: centroque *R* & intervalo *RF* deſcribatur circulus quartus *FNc* ſecans circulum tertium *FVI* in *c*. Jungatur *Fc* ſecans circulum primum in *a*, & ſecundum in *b*. Agantur *aG*, *bH*, *cI*, & figuræ *abcFGHI* ſimilis conſtitui poteſt figura *ABCfghi*. Quo facto erit trapezium *fghi* illud ipſum, quod conſtituere oportebat.

Secent enim circuli duo primi *FSG*, *FTH* ſe mutuo in *K*. Jungantur *PK*, *QK*, *RK*, *aK*, *bK*, *cK*, & producatur *QP* ad *L*. Anguli ad circumferentias *FaK*, *FbK*, *FcK* ſunt ſemiſſes

miſſes angulorum FPK, FQK, FRK ad centra, ideoque angulorum illorum dimidiis LPK, LQK, LRK æquales. (m) Eſt ergo figura $PQRK$ figuræ $abcK$ æquiangula & ſimilis, & propterea ab eſt ad bc ut PQ ad QR, id eſt, ut AB ad BC. Angulis inſuper FaG, FbH, FcI æquantur fAg, fBh, fCi per conſtructionem. Ergo figuræ $abcFGHI$ figura ſimilis $ABCfghi$ compleri poteſt. Quo facto trapezium $fghi$ conſtituetur ſimile trapezio $FGHI$, & angulis ſuis f, g, h, i tanget rectas ABC, AD, BD, CE. Q. E. F. Co-

(m) * Eſt enim angulus $Kab = KPR$, angulus $Kba = KQP$, ac proinde triangulum aKb, ſimile triangulo PQK, & ſimiliter patet triangulum bKc, eſſe ſimile triangulo QKR, adeóque totam figuram $abcK$, ſimilem eſſe figuræ $PQRK$.

* Si ex quatuor rectis poſitione datis duæ vel tres fuerint parallelæ manet eadem conſtructio. Poteſt tamen hæc alia adhiberi quæ etiam valet, ubi quatuor ſunt parallelæ. Datæ ſint tres parallelæ AD, BK, CL quas quarta AC in A, B, C ſecat & oporteat deſcribere trapezium ſimile trapezio $FIHG$ & cujus anguli angulis F, I, H, G æquales, rectas AD, BK, CL, AC, tangant. per punctum quodvis i, rectæ BK, agatur SiR, parallelis AD, BK CL normalis, iiſque occurrens in S, & R, producatur HI, ad O, ut ſit HI ad IO ut eſt Ri ad iS junganturqe FO; tum ex puncto i, agatur if, parallelam AD ſecans in f, ità ut ſit angulus fiB ſeu ifD, æqualis angulo IFO, & ſuper latere fi, ſimili FI conſtruatur trapezium $fihg$ ſimile trapezio $FIHG$, ac per angulum g agatur recta PQ ipſi AC parallela, & tandem ſuper rectâ AC, conſtruatur figura ſimilis figuræ $PQhifg$. Dico factum.

Demonſtrandum eſt angulum h eſſe in parallelâ CL; ſi punctum h, non eſt in lineâ CL producatur ih donec rectæ CL occurrant in t, & producatur ti, donec occurrat rectæ AD in o & erit $HI:IO = hi:io = Ri:iS$, ob figuras $oifh$, $OIFH$, (per conſtr.) ſimiles; ſed ob ſimilia triangula tiR, oiS, $ti:io = Ri:iS$, ergò $hi:io = ti:io$, atque adeò $hi = ti$; quarè punctum t, cum h, coincidit.

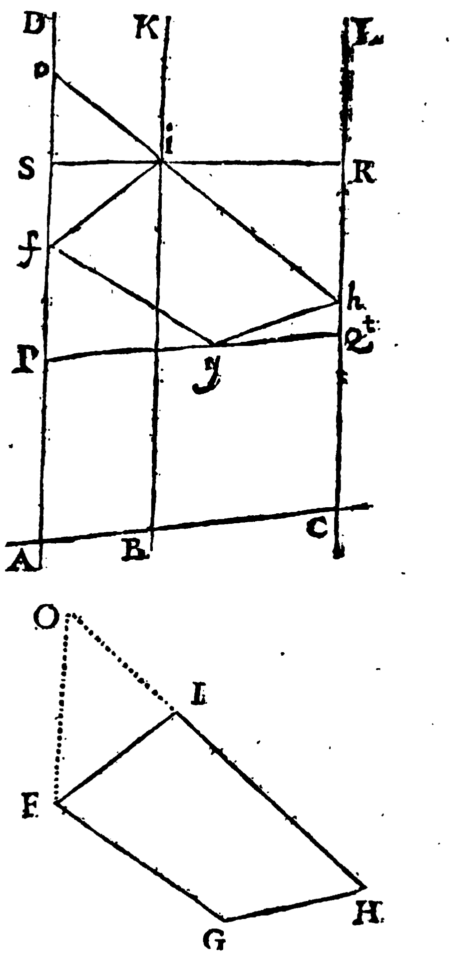


Fig. [illegible] [illegible] Nam.

DE MOTU CORPORUM.

Corol. Hinc recta duci poteſt cujus partes, rectis quatuor poſitione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli *FGH*, *GHI* uſque eo, ut rectæ, *FG*, *GH*, *HI* in directum jaceant, & in hoc caſu conſtruendo problema ducetur recta *fghi*, cujus partes *fg*, *gh*, *hi*, rectis quatuor poſitione datis *AB* & *AD*, *AD* & *BD*, *BD* & *CE* interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ *FG*, *GH*, *HI*, eundemque ſervabunt ordinem inter ſe. Idem verò ſic fit expeditius.

Producantur *AB* ad *K*, & *BD* ad *L*, ut ſit *BK* ad *AB* ut *HI* ad *GH*; & *DL* ad *BD* ut *GI* ad *FG*; & jungatur *KL* occurrens rectæ *CE* in *i*. Producatur *iL* ad *M*, ut ſit *LM* ad *iL* ut *GH* ad *HI*, & agatur tum *MQ* ipſi *LB* parallela, rectæque *AD* occurrens in *g*, tum *gi* ſecans *AB*, *BD* in *f*, *h*. Dico factum.

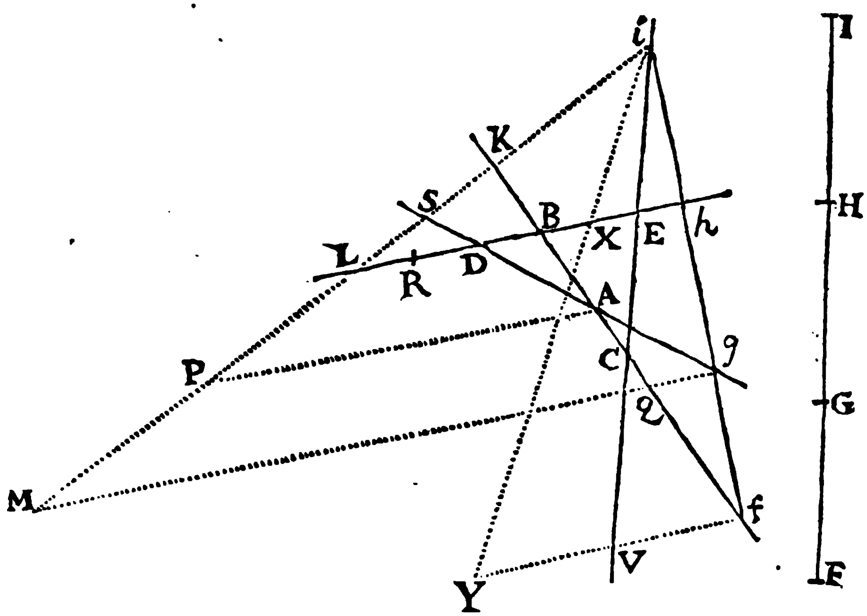
Secet enim *Mg* rectam *AB* in *Q*, & *AD* rectam *KL* in *S*, & agatur *AP* quæ ſit ipſi *BD* parallela & occurrat *iL* in *P*, & erunt *gM* ad *Lh* (*gi* ad *hi*, (n) *Mi* ad *Li*, *GI* ad *HI*, *AK* ad *BK*) & *AP* ad *BL* in eâdem ratione. Secetur *DL* in *R* ut ſit *DL* ad *RL* in eâdem illâ ratione, & ob proportionales *gS* ad *gM*, *AS* ad *AP*, & *DS* ad *DL*; erit, (o) ex æquo, ut *gS* ad *Lh* ita *AS* ad *BL* & *DS* ad *RL*; & mixtim, *BL−RL* ad *Lh−BL* ut *AS−DS* ad *gS−AS*. Id eſt *BR* ad *Bh* ut *AD* ad *Ag*, ideoque ut *BD* ad *gQ*. Et viciſſim *BR* ad *BD* ut *Bh* ad *gQ*, ſeu *fh* ad *fg*. Sed ex conſtructione linea *BL* eâdem ratione ſecta fuit in *D* & *R* atque linea *FI* in *G* & *H*: ideoque eſt *BR* ad *BD* ut *FH* ad *FG*. Ergo *fh* eſt ad *fg* ut *FH* ad *FG*. Cum igitur ſit etiam *gi* ad *hi* ut *Mi* ad *Li*, id eſt, ut *GI* ad *HI*, patet lineas *FI*, *fi* in *g* & *h*, *G* & *H* ſimiliter ſectas eſſe. *Q. E. F.*

In

(n) * Nam (per conſtr.) $LM:iL = GH:HI = AB:BK$, ac proindè componendo conſequentes cum antecedentibus $Mi:Li = GI:HI = AK:BK = AP:BL$ ob parallelas.

(o) * Quoniam enim
$gM:Lh = AP:BL = DL:RL$
& $gS:gM = AS:AP = DS:DL$
patet eſſe $gS:Lh = AS:BL = DS:RL$, & conſequenter $gS-AS:Lh-BL = AS-DS:BL-RL = gS:Lh$; undè invertendo permutando & alternando $BL-RL:Lh-BL = AS-DS:gS-AS$ id eſt $BR:Bh = AD:Ag = BD:gQ$, ob ſimilia triangula ADB, AgQ.

* Si



In conſtructione corollarii hujus poſtquam ducitur *LK* ſecans *CE* in *i*, producere licet *iE* ad *V*, ut ſit *EV* ad *Ei* ut *FH* ad *HI*, & (p) agere *Vf* parallelam ipſi *BD*. (q) Eodem recidit ſi centro *i*, intervallo *IH*, deſcribatur circulus ſecans *BD* in *X*, & producatur *iX* ad *Y*, ut ſit *iY* æqualis *IF*, & agatur *Yf* ipſi *BD* parallela.

Problematis hujus ſolutiones alias *Wrennus* & *Walliſius* olim excogitarunt.

PRO-

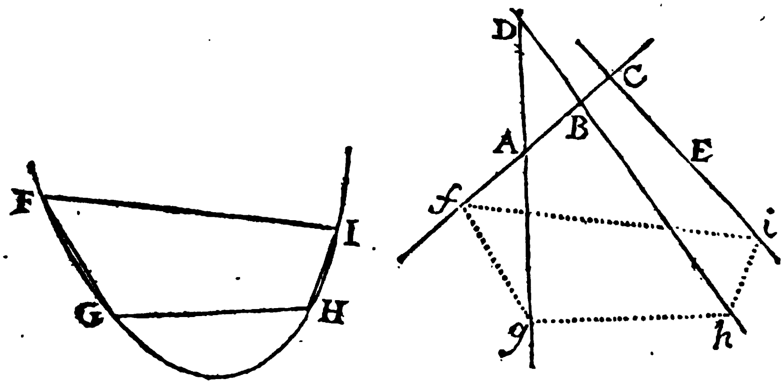
(p) * Si enim ex puncto f, per ſuperiorem conſtructionem invento agatur fV parallela BD & lineæ iE productæ occurrens in V, erit ob ſimilia triangula iEh, iVf, EV : Ei = fh : hi, ſed ex ſuprà demonſtratis fh : hi = FH : HI, ergò EV : Ei = FH : HI.

(q) * Nam ſi ex puncto f, ut ſuprà invento agatur fY, ipſi BD, parallela & rectæ iX, productæ occurrens in Y, erit ob ſimilia triangula iXh, iYf, ih : hf = iX : XY = IH : HF. Undè cum ſit iX = IH (ex hyp.) erit XY = HF.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA XXI.

Trajectoriam ſpecie datam deſcribere, quæ à rectis quatuor poſitione datis in partes ſecabitur, ordine, ſpecie & proportione datas.

Deſcribenda ſit trajectoria, quæ ſimilis ſit lineæ curvæ *FGHI*, & cujus partes, illius partibus *FG*, *GH*, *HI* ſimiles & proportionales, rectis *AB* & *AD*, *AD* & *BD*, *BD* & *CE* poſitione datis, prima primis, ſecunda ſecundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis *FG*, *GH*, *HI*, *FI* deſcribatur (per



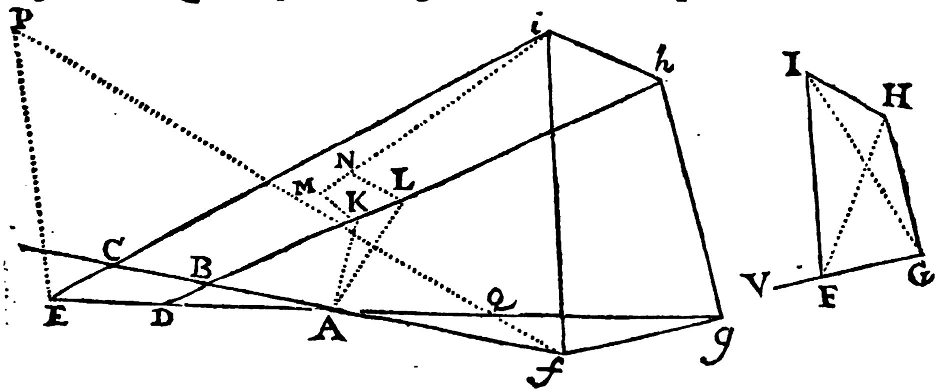
lem. XXVII.) Trapezium *fghi*, quod ſit trapezio *FGHI* ſimile, & cujus anguli *f*, *g*, *h*, *i* tangant rectas illas poſitione datas *AB*, *AD*, *BD*, *CE*, ſinguli ſingulas dicto ordine. Dein circa hoc trapezium deſcribatur trajectoria curvæ lineæ *FGHI* conſimilis.

Scholium.

Conſtrui etiam poteſt hoc problema ut ſequitur. Junctis *FG*, *GH*, *HI*, *FI* produc *GF* ad *V*, jungeque *FH*, *IG*, & angulis *FGH*, *VFH* fac angulos *CAK*, *DAL* æquales. Concurrant *AK*, *AL* cum recta *BD* in *K* & *L*, & inde agantur *KM*, *LN*, quarum *KM* conſtituat angulum *AKM* æqualem angulo *GHI*, ſitque ad *AK* ut eſt *HI* ad *GH*; & *LN* conſtituat angulum *ALN* æqualem angulo *FHI*, ſitque ad

AL

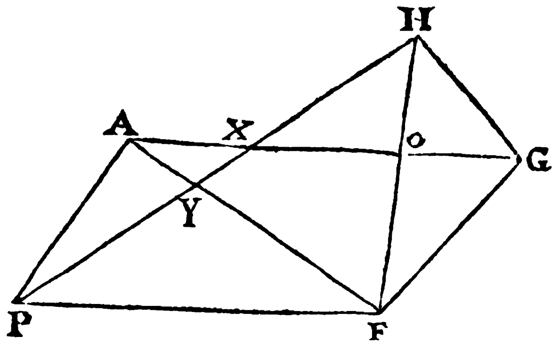
AL ut *HI* ad *FH*. Ducantur autem *AK*, *KM*, *AL*, *LN* ad eas partes linearum *AD*, *AK*, *AL*, ut literæ *CAKMC*, *ALKA*, *DALND*, eodem ordine cum literis *FGHIF* in orbem redeant; & acta *MN* occurrat rectæ *CE* in *i*. Fac angulum *iEP* æqualem angulo *IGF*, ſitque *PE* ad *Ei* ut *FG* ad *GI*; & per *P* agatur *PQf*, quæ cum rectâ *ADE* contineat angulum *PQE* æqualem angulo *FIG*, rectæque *AB* occurrat



in *f*, & jungatur *fi*. Agantur autem *PE* & *PQ* ad eas partes linearum *CE*, *PE*, ut literarum *PEiP* & *PEQP* idem ſit ordo circularis qui literarum *FGHIF*, & ſi ſuper lineâ *fi* eodem quoque literarum ordine conſtituatur trapezium *fghi* trapezio *FGHI* ſimile, & circumſcribatur trajectoria ſpecie data, ſolvetur problema. (r)

(r) Hæc nova conſtructio hoc præmiſſo Lemmate Demonſtratur.

Lemma. Si ex puncto A extrà triangulum F G H dato, agatur ad angulum F recta AF, & ad angulum G recta A G, ſecans latus oppoſitum H F in O, & ſuper rectam A F, conſtruatur triangulum F A P, ſimile triangulo F G H, jungaturque P H ſecans A G in X, & A F in Y, ſimilia erunt triangula P H F, A G F, & anguli H X G, H F G æquales; quoniam enim anguli A F P, HFG ſunt æquales (per hyp.) æquales quoque erunt anguli P F H, A F G; & quoniam duo triangula P F A, H F G, ſimilia ſunt (per hyp.) erit P F : A F = H F : F G, adeóque triangula A F G, P F H, quorum latera proportionalia æqualem angulum continent ſunt ſimilia, & hinc anguli HPF, G A F æquantur; cumque anguli oppoſiti

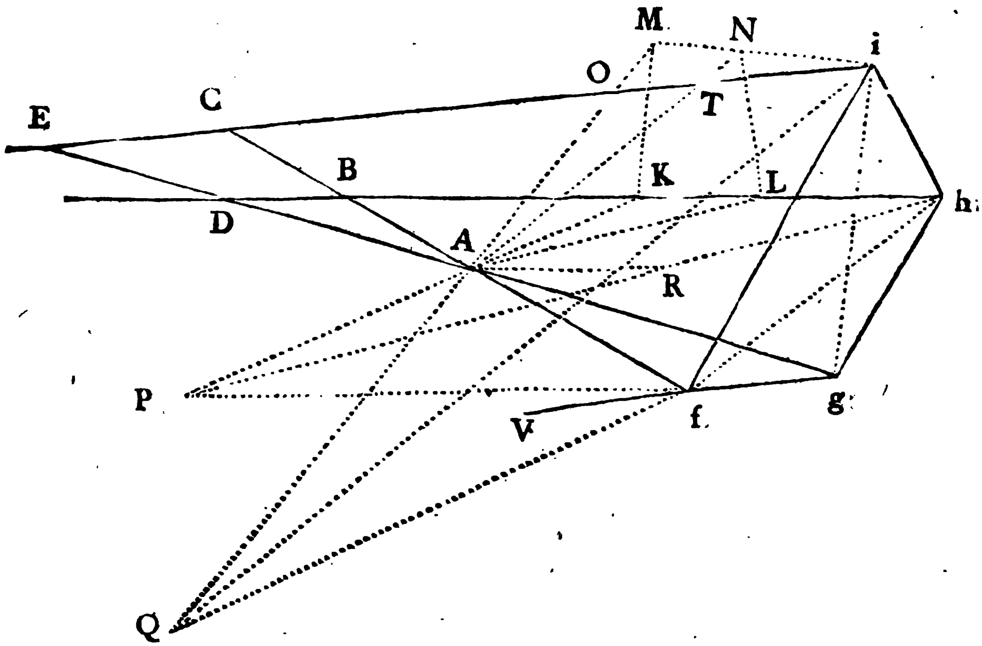


P Y F, A Y X, ſint etiam æquales, liquet angulum A X Y ſive H X G, æqualem eſſe angulo A F P = H F G. Q. e. D.

De Motu Corporum.

Hactenus de orbibus inveniendis. Supereſt ut motus corporum in orbibus inventis determinemus.

SEC-



357. Hoc itaque, poſito, demonſtratur Newtoniana conſtructio. Trapezii f g h i, anguli quatuor tangant rectas C i, B h, A g, A f. Super rectâ A f, conſtruantur triangula f A P, f A Q, triangulis f g h, f g i, ſimilia; jungantur P h, Q i, & latera P A, Q A, producantur, ut rectis B h, C i, occurrant in K, & O; erunt anguli B A K, B A O, æquales angulis datis f g h, f g i; agantur A L, A T, rectis P h, Q i parallelæ, & producto latere g f, ad V, erit angulus D A L, æqualis angulo V f h; angulus enim D A L = D A B + B A K + K A L = f A g + P A f + h P A; ſed (per conſtr.) P A f = f g h, & f P A = f h g; cumque ſit triangulum f P h, ſimile triangulo f A g, (356), angulus f P h = f A g, adeóque h P A + f A g = h P A + f P h = f P A = f h g; quarè D A L = f g h + f h g = V f h (per 32. 1. Elem.). Et ſimiliter oſtenditur angulum D A T, eſſe æqualem angulo V f i, ob triangula f A Q f Q i, triangulis f g i, f A g, ſimilia. Agantur rectæ K M, L N, quæ cum rectis A K, A L conſtituant angulos A K M, A L N angulis g h i, f h i æquales, rectiſque A O, A T productis occurrant in M & N, & triangula A K M, A L N ſimilia erunt triangulis g h i, f h i, (undè juxtà conſtructionem Newtoni erit K M : A K = h i : h g, & L N : A L = h i : h f). Etenim angulus M A K = P A Q = P A f − Q A f = f g h − f g i = i g h, (per conſtr.) quare cum ſit quoque (per conſtr.) angulus A K M = g h i, triangula A K M, g h i ſunt ſimilia, angulus verò N A L = D A L − D A T = V f h − V f i (per Dem.) ſed V f h − V f i = i f h, ergò triangula i f h, N A L ſimilia ſunt. jungatur M N, demonſtrandum eſt hanc lineam productam tranſire per angulum i, quo trapezium tangit lineam E C i, ex puncto A, ad rectam P h, agatur A R

rectæ

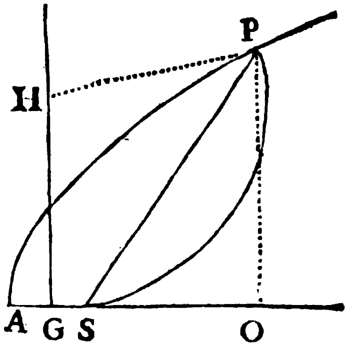
SECTIO VI.

De inventione motuum in orbibus datis.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XXII.

Corporis in datâ trajectoriâ parabolicâ moti invenire locum ad tempus aſſignatum. (ſ)

(t) Sit *S* umbilicus & *A* vertex principalis parabolæ, ſitque 4 *A S* × *M* æquale areæ parabolicæ abcindendæ *A P S*, quæ radio *S P*, vel poſt exceſſum corporis de vertice deſcripta fuit, vel ante appulſum ejus ad verticem deſ-



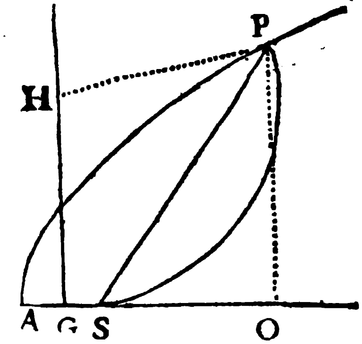
rectæ B h, parallela, ob ſimilia triangula f g h, f A P erit..... f g : h g = A f : P A
ob ſim. tri. f g i, f A Q.... g i : f g = Q A : A f
ob ſim. tri. g h i, A K M.... h g : g i = A K : A M
ob ſim. tri. A K L, P A R.... A K : A L = P A : P R
ob ſim. tri. f Q i, f P h,.... f h : f i = P h : Q i;
ſed ob ſim. tri. f h i, A L N,
f h : f i = A L : A N.
ergo A L : A N = P h : Q i
& A L : A N = P h − A L : Q i − A N
& quia A L = R h eſt A L : A N = P R : Q i − A N
unde per compoſitionem rationum & ex æquo, A K : A N = Q A × A K : A M × (Q i − A N)
quare A K × A M : A N × A M = Q A × A K : A M × Q i − A N, ac proinde A M : A N = Q A : Q i − A N, adeóque A M : A N = Q M ſeu Q A + A M : Q i ſeu Q i − A N + A N. Quoniam igitur rectæ A N, Q i, ſunt parallelæ (per conſtr.) patet puncta M, N, i, eſſe in unâ rectâ, atque hæc eſt prima pars conſtructionis Newtonianæ quæ erat demonſtranda.

2ª. illius pars facilè oſtenditur. Nam (vid. fig. Newt.) junctâ P i, erit (per conſtr.) triangulum P i E, ſuper rectâ E i conſtructum ſimile triangulo f i g, ad cujus angulos i & g, ductæ ſunt ex puncto E, rectæ E i, E g; quare (356), ſi per punctum P agatur recta P Q, quæ cum rectâ E g, contineat angulum P Q E æqualem angulo f i g, recta illa P Q, producta tanget angulum f, trianguli f i g, ſeu trapezii f g h i. Q. e. D.

(ſ) 338. Newtonus in hâc totâ ſectione ſupponit corpus in trajectoriâ conicâ datâ ità moveri, ut radiis ad trajectoriæ umbilicum ductis areas ſeu ſectores deſcribat temporibus proportionales; eâ enim lege planetas omnes in orbitis conicis revolvi ex phenomenis lib. 3º. oſtendit. Prætereà ſupponit notum eſſe tempus quo corpus ex puncto trajectoriæ dato v. g. ex vertice illius principali ad aliud ejuſdem trajectoriæ punctum datum pervenit, datamque eſſe aream ſeu trajectoriæ ſectorem huic tempori correſpondentem, atque ex his datis quærit locum mobilis in trajectoriâ ad aliud quodvis tempus datum, aut contrà quærit tempus quo mobile datum quodvis trajectoriæ punctum attingit; nam cum ſint areæ temporibus proportionales, dato tempore quovis, datur area hoc tempore deſcripta, & viciſſim datâ areâ deſcriptâ datur tempus quo deſcribitur.

(t) * Sit S umbilicus, & A, vertex principalis parabolæ, datumque ſit tempus quo

DE MOTU CORPORUM.



cribenda eſt. Innoteſcit quantitas areæ illius abſcindendæ ex tempore ipſi proportionali. Biſeca AS in G, erigeque perpendiculum GH æquale $3M$, & circulus centro H, intervallo HS deſcriptus ſecabit parabolam in loco quæſito P. Nam, demiſſâ ad axem perpendiculari PO & ductâ PH, (u) eſt $AGq + GHq$ ($=$ (x) $HPq = \overline{AO - AG}: quad. + \overline{PO - GH}: quad.$) $= AOq + POq - 2GAO - 2GH \times PO + AGq + GHq$. (y) Unde $2GH \times PO (= AOq + POq - 2GAO) = AOq + \frac{3}{4} POq$. Pro AOq ſcribe $AO \times \frac{POq}{4AS}$; & applicatis terminis omnibus ad $3PO$ ductiſque in $2AS$, fiet $\frac{4}{3} GH \times AS$ ($= \frac{1}{6} AO \times PO + \frac{1}{2} AS \times PO = \frac{AO + 3AS}{6} \times PO = \frac{4AO - 3SO}{6} \times PO =$ areæ $\overline{APO - SPO}$) $=$ areæ APS. Sed GH erat $3M$, & inde $\frac{4}{3} GH \times AS$ eſt $4AS \times M$. Ergo area abciſſa APS æqualis eſt abſcindendæ $4AS \times M$. *Q. E. D.*

Co-

corpus in parabolâ motum, ut modò expoſuimus (358.) ex vertice A ad punctum P, aut ex puncto P ad verticem A pervenit, ſeu datum ſit tempus quo ſector quilibet A P S deſcribitur.

(u) * Eſt $AG^2 + GH^2 = HP^2$; nam $AG = GS$, $HP = HS = HA$, & angulus G rectus (per conſtr.) quare $HA^2 = HP^2 = AG^2 + GH^2$.

(x) * $HP^2 = \overline{AO - AG}^2 + \overline{PO - GH}^2$. Nam ex puncto H, ad rectam PO demiſſa intelligatur perpendicularis, hæc erit æqualis ipſi $GO = AO - AG$, & pars rectæ PO inter perpendicularem & punctum P intercepta æqualis erit $PO - GH$.

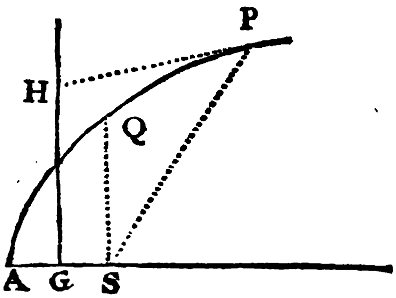
(y) * Undè ſublatis utrinque quadratis $AG^2 + GH^2$, & addito utrinque rectangulo $2GH \times PO$, eſt $2GH \times PO = AO^2 + PO^2 - 2GAO$; quoniam autem in parabolâ latus rectum $= 4AS = 8AG$, eſt $8AG \times AO$ ſive $8GAO = PO^2$, & $2GAO = \frac{1}{4} PO^2$, & $PO^2 - 2GAO = \frac{3}{4} PO^2$. Cum verò ſit $4AS \times AO = PO^2$, adeóque $4AS \times AO^2 = AO \times PO^2$, & $AO^2 = \frac{AO \times PO^2}{4AS}$, erit igitur $2GH \times PO = \frac{AO \times PO^2}{4AS} + \frac{3}{4} PO^2$, & dividendo utrinque per $3PO$, fiet $\frac{2}{3} GH = \frac{AO \times PO}{12AS} + \frac{1}{4} PO$, ductiſque omnibus terminis in $2AS$, fiet $\frac{4}{3} GH \times AS = \frac{1}{6} AO \times PO + \frac{1}{2} AS \times PO = \frac{AO + 3AS}{6} \times PO = \frac{\overline{4AO - 3SO}}{6} \times PO$

ad

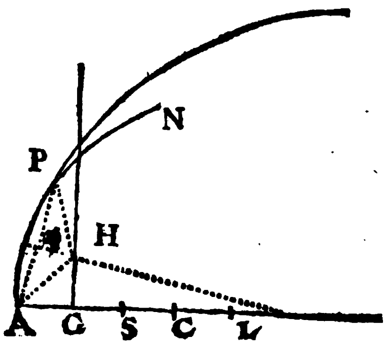
Corol. 1. Hinc *GH* eſt ad *AS*, ut tempus quo corpus deſcripſit arcum *AP* ad tempus quo corpus deſcripſit arcum inter verticem *A* & ([a]) perpendiculum ad axem ab umbilico *S* erectum. LIBER PRIMUS.

Corol. 2. ([b]) Et circulo *ASP* per corpus motum *P* perpetuo tranſeunte, velocitas puncti *H* eſt ad velocitatem quam corpus

ob AS = AO − SO unde eſt 3AS = 3AO − 3SO. Verùm $\frac{4AO \times PO}{6}$ ſeu $\frac{2}{3}$ AO × PO, eſt area parabolica APOA, (Archimed. prop. 17. quadr. Parab. ſup. Theor. IV. de Parab. pag. 133.) & $\frac{3SO \times PO}{6}$ ſeu $\frac{1}{2}$ SO × PO, eſt area trianguli PSO, ergò area ſectoris Parabolici APS, æqualis eſt $\frac{4AO - 3SO}{6} \times PO$, quarè $\frac{4}{3}$ GH × AS = areæ APS; *ſed GH = 3M, (per conſtr.)* &c.



(a) * Sit perpendiculum illud SQ, erit area ASP, ad aream ASQ, ut $\frac{4}{3}$ GH × AS, ad $\frac{2}{3}$ AS × SQ (Theor. IV. de Par. p. 133.); ſed ex naturâ Parabolæ (Vid. Cor. 2. Theor. I. de Par. p. 131.) SQ æqualis dimidio lateri recto = 2AS, ergò area ASP eſt ad aream ASQ, ſeu tempus per AP ad tempus per AQ, ut $\frac{4}{3}$ GH × AS ad $\frac{4}{3}$ AS^2, hoc eſt, ut GH ad AS. Dato igitur tempore quo deſcribitur arcus AQ, & tempore quo deſcribitur AP, per ſimplicem proportionem invenitur HG, & indè punctum P habetur.



(b) * Jungatur AP, & ad medium ejus punctum q, erigatur perpendiculum qL, axem ſecans in L, & quoniam (ex Dem.) eſt ſemper HP = HA, ideoque eſt AP chorda circuli cujus centrum eſt H. Itaque (per 1. 3[i]. Elem.) perpendiculum illud qL, rectæ GH, occurrit in H; & ob ſimilitudinem triangulorum LGH, LqA, eſt GH : qA ſeu $\frac{1}{2}$ AP = LG : Lq. Sumatur AC = 2AS dimidio nempè lateris recti parabolæ & centro C, & intervallo CA, deſcribatur circulus AN, hic parabolam oſculatur in A (241); coeuntibus verò punctis P & A, H & G, coeunt etiam L & C, fitque Lq = LA = CA = 2AS = 4GS, & LG = CG = 3GS, atque arcus AP æqualis chordæ AP, (Lem. VII.); undè cum in proportione ſuperiori ſit GH : $\frac{1}{2}$ AP = LG : Lq erit in hoc caſu GH : $\frac{1}{2}$AP = 3GS : 4GS

De Motu Corporum.

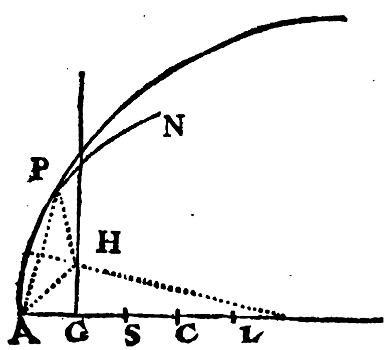
pus habuit in vertice *A* ut 3 ad 8; ideoque in eâ etiam ratione eſt linea *GH* ad lineam rectam quam corpus tempore motus ſui ab *A* ad *P*, eâ cum velocitate quam habuit in vertice *A*, deſcribere poſſet.

Corol. 3. Hinc etiam vice verſâ inveniri poteſt tempus quo corpus deſcripſit arcum quemvis aſſignatum *AP*. Junge *AP* & ad medium ejus punctum erige perpendiculum rectæ *GH* occurrens in *H*.

LEMMA XXVIII.

Nulla extat figura ovalis cujus area, rectis pro lubitu abſciſſa, poſſit per æquationes numero terminorum ac dimenſionum finitas generaliter inveniri.

(c) Intra ovalem detur punctum quodvis, circa quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta, uniformi cum motu, & interea in recta illa exeat punctum mobile de polo, pergat-

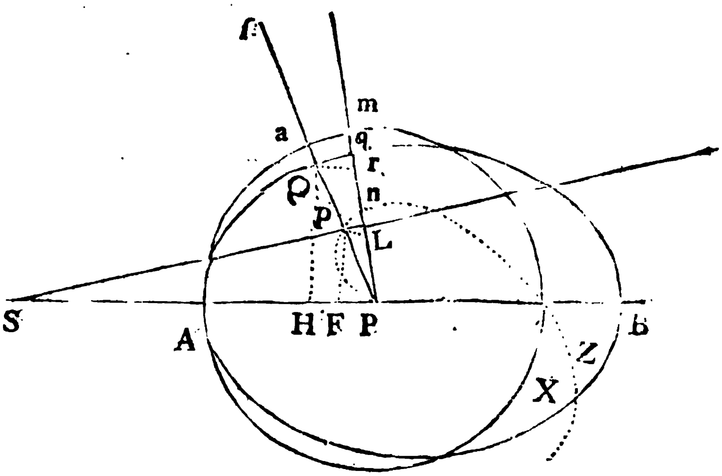


hoc eſt, GH : AP = 3 : 8. Verùm ob motum æquabilem & æquidiuturnum per naſcentes AP, GH, velocitas puncti H in G, eſt ad velocitatem corporis P in A ut GH ad AP, & quoniam (ex Dem.) eſt ſemper $\frac{4}{3}$ AS × GH æqualis areæ APS, & $\frac{4}{3}$ AS, eſt quantitas conſtans, erit ſemper GH, ut area APS, hoc eſt, ut tempus quo punctum H, percurrit GH, eſtque proindè motus illius æquabilis & velocitas ubique eadem. Quarè velocitas puncti H, eſt ubique ad velocitatem quam habet corpus P in A, ut naſcens GH, ad naſcentem AP, hoc eſt, ut 3. ad 8. Q. e. D.

(c) 359. Intrà ovalem ACBA detur punctum quodvis P, circà quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta infinita PS, uniformi cum motu, ità ut punctum datum A illius lineæ circuli AmX arcus æquales æqualibus temporibus deſcribat, & intereà in rectâ illâ PS, exeat punctum mobile p de polo P, pergatque ſemper in eâdem rectâ Pſ cum velocitate quæ ſit ut rectæ illius intrà ovalem quadratum, hoc eſt, cum linea PS pervenit ad ſitum Pſ, & punctum mobile p ad p, velocitas puncti p ſit ut quadratum rectæ PQ inter polum P & ovalem AQCB contentæ, hoc motu punctum illud p, deſcribet ſpiralem Ppn Z, gyris infinitis.

360.

gatque ſemper eâ cum velocitate, quæ ſit ut rectæ illius intra ovalem quadratum. Hoc motu punctum illud deſcribet ſpiralem gyris infinitis. Jam ſi areæ ovalis à rectâ illâ abſciſſæ portio per finitam æquationem inveniri poteſt, invenietur etiam per eandem æquationem diſtantia puncti à polo, (d) quæ huic areæ proportionalis eſt, ideoque omnia ſpiralis puncta per æquationem fini-



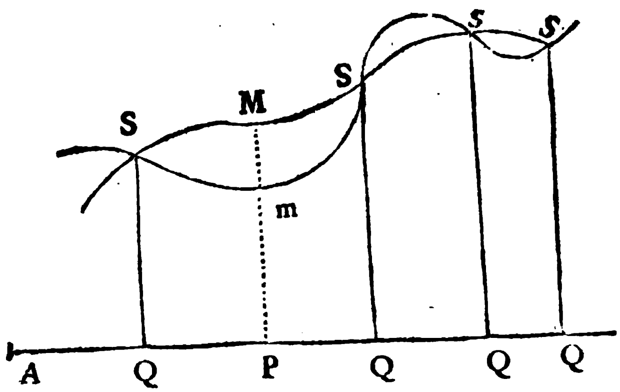
(d) 360. His ſuppoſitis erit ſemper recta P p ut area P A Q P; nam circulus A a m X diviſus intelligatur in arcus innumeros æquales ut a m, & ductis radiis P Q, P q ſpirali, circulo & ovali occurrentibus in p & n, a & m, Q & q, demiſſa capiantur ex punctis Q & p, ad P q, perpendicula Q r, p L, & eodem tempore quo punctum a, percurret arcum a m, punctum p percurret rectam L n; quâpropter naſcente arcu a m, erit L n ut velocitas puncti p in rectâ P ſ, hoc eſt, (per Hyp.) ut quadratum rectæ P Q; porro ob triangula ſimilia P a m, P Q r eſt $Pa : PQ = am : Qr = \frac{PQ \times am}{Pa}$, ac proindè ſectoris naſcentis P Q q area $\frac{1}{2} Qr \times PQ = \frac{PQ^2 \times am}{2Pa}$. Cum igitur a m & 2 P a, ſint quantitates conſtantes (ex hyp.) erit ſector P Q q, naſcens ſeu fluxio areæ P A Q ut PQ^2, atque ideò ut naſcens L n, ſeu ut fluxio rectæ P p, & hinc tota area fluens P A Q, erit ut tota recta fluens P p, (coroll. Lem. IV.) Q. e. D.

361. Puncta p & Q referantur ad rectam A B, poſitione datam demiſſis ad A B perpendicularibus Q H, p F ſitque area P A Q, æqualis quantitati finitæ *E* ex lineis variabilibus P H, Q H & aliis conſtantibus quomodolibet compoſitæ, & quoniam linea P p areæ P A Q ſeu quantitati finitæ *E* proportionalis eſt (360) linea illa exprimi poterit per factum ex quantitate *E* in quantitatem conſtantem *B*, eritque $Pp = E \times B$ æquatio finita. Verùm ob ſimilia triangula P F p, P H Q & angulum ad H rectum, $Pp : pF = PQ$, ſeu $\sqrt{PH^2 + QH^2} : QH$, & $Pp : PF = PQ$ ſeu $\sqrt{PH^2 + QH^2} : PH$, & prætereà

De Motu Corporum.

finitam inveniri poſſunt: & propterea rectæ cujuſvis poſitione datæ interſectio cum ſpirali inveniri etiam poteſt per æquationem finitam. Atqui recta omnis infinite producta ſpiralem ſecat in punctis, numero infinitis, & (e) æquatio, quâ interſectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum interſectiones omnes radicibus totidem, ideoque aſcendit ad tot dimenſiones

reà ex naturâ ovalis A Q C B, datur alia æquatio inter P H & Q H, inveniuntur ergò quatuor æquationes finitæ quæ ſimul quinque tantum variabiles, nimirum P p, P F, p F, P H, Q H continent, quæque proindè ad unicam æquationem finitam poterunt reduci in quâ duæ tantum variabiles P F, p F reperientur, adeóque per hanc æquationem finitam omnia ſpiralis puncta inveniri poterunt, & propterea rectæ cujuſvis S p poſitione datæ interſectio p cum ſpirali inveniri etiam poterit per æquationem finitam; cum enim duæ rectæ S p, S B poſitione datæ ſint, linea S P magnitudine & triangulum S P F ſpecie dantur, & hinc datur ratio lineæ S F ſeu S P ∓ P F ad F p, & nova invenitur æquatio inter P F & F p; per hanc igitur æquationem & per alteram quæ ad ſpiralem eſt, determinabuntur P F, & F p, punctumque interſectionis p invenietur per æquationem finitam.



(e) 362. Lineæ duæ SMS, S m s ſe mutuò interſecantes in punctis S, s ad eandem rectam A Q poſitione datam referantur, ſintque A Q, A P abſciſſæ communes, & Q S, P M, P m ad eas ordinatæ; quoniam in communibus linearum S M s, S m s, interſectionibus S, S, ordinatæ P M, P m ſunt æquales, ſi in duabus ad lineas S M s, S m s æquationibus, manente abſciſſâ communi, loco ordinatarum P M, P m, eadem ſcribatur littera, v. gr. y, & deindè ex illis æquationibus eliminetur littera quæ abciſſam communem exprimit, obtinebitur æquatio ex ſolâ y, & conſtantibus compoſita. Porrò hæc ultima æquatio non magis primam ordinatam communem S Q, ſeu primam interſectionem S, quam ſecundam aut tertiam &c. determinabit, cum ſit eadem omnium lex & conditio idemque calculus; hæc igitur æquatio debet omnes communes ordinatas Q S, omneſque interſectiones S, ſimul complecti & indifferenter exhibere, & ità tot radices ſeu ipſius y valores reddere quot ſunt communes ordinatæ ſeu interſectiones, æquatio autem tot dimenſiones habet quot radices; Si itaque linearum S M s, S m s, interſectiones S, s, ſunt numero finitæ, æquatio quoque quæ illas determinat finita eſt; at ſi fuerint interſectiones numero infinitæ, erit æquatio numero dimenſionum & radicum infinita. * Exem-

-ſiones quot ſunt interſectiones. Quoniam circuli duo ſe mutuo ſecant in punctis duobus, interſectio una non invenietur niſi per æquationem duarum dimenſionum, quâ interſectio altera etiam inveniatur. (f) Quoniam duarum ſectionum conicarum quatuor eſſe poſſunt interſectiones, non poteſt aliqua earum generaliter inveniri niſi per æquationem quatuor dimenſionum, quâ omnes ſimul inveniantur. Nam ſi interſectiones illæ ſeorſim quærantur, quoniam eadem eſt omnium lex & conditio, idem erit calculus in caſu unoquoque, & propterea eadem ſemper concluſio, quæ igitur debet omnes interſectiones ſimul complecti & indifferenter exhibere. Unde etiam interſectiones ſectionum conicarum & curvarum tertiæ poteſtatis, eo quod ſex eſſe poſſunt, ſimul prodeunt per æquationes ſex dimenſionum, & interſectiones duarum curvarum tertiæ poteſtatis; quia novem eſſe poſſunt, ſimul prodeunt per æquationes dimenſionum novem. (g) Id niſi neceſſario fieret, reducere liceret, problemata omnia ſolida ad plana, & pluſquam ſolida, ad ſolida. (h) Loquor hic de

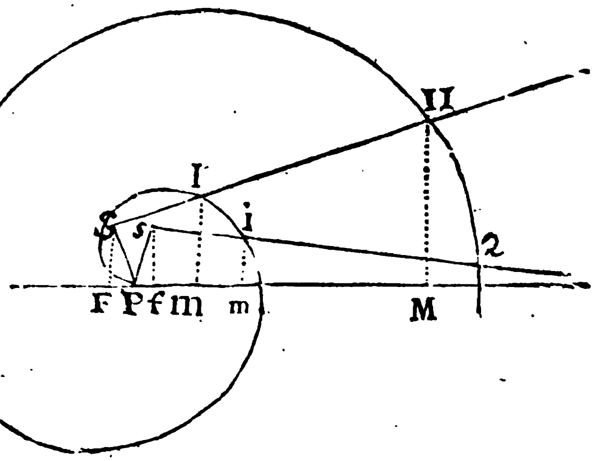
(f) * Exempli cauſâ. Sint $ap + px = yy$, & $bx - xx = yy$, æquationes ad parabolam & circulum, & invenietur $x = \frac{yy - ap}{p}$, & $\frac{byy - bap}{p} - \frac{y^4 + 2apyy - aapp}{p^2} = yy$, æquatio quatuor dimenſionum, quoniam quatuor eſſe poſſunt parabolæ & circuli interſectiones. Sint $ap^2 + p^2x = y^3$, & $bx - xx = y^2$ æquationes ad parabolam $3^æ$. poteſtatis & ad circulum, erit $x = \frac{y^3 - ap^2}{p^2}$ & $\frac{by^3 - bap^2}{p^2} - \frac{y^6 + 2ap^2y^3 - a^2p^4}{p^2} = yy$ æquatio ſex dimenſionum quod eſſe poſſint interſectiones ſex, & ità de cæteris. Generatim verò tot eſſe poſſunt curvarum duarum interſectiones quot ſunt unitates in facto ex poteſtatis curvæ unius indice ſeu exponente in alterius exponentem; index autem poteſtatis curvæ idem eſt cum numero dimenſionum æquationis ad illam curvam.

(g) * Nam in ſolidorum problematum conſtructione duæ adhibentur ſectiones conicæ quarum interſectiones, ſeu ordinatæ duabus coni ſectionibus communes, problematis ſolutionem ſeu ultimæ æquationis radices ſuppeditant. Quarè ſi hujuſmodi interſectiones vel ordinatæ communes generaliter poſſent per æquationem quadraticam inveniri, problemata ſolida per æquationes duarum dimenſionum ſolvi ac conſtrui poſſent, atque ità ad plana reducerentur, eâdemque ratione plus quam ſolida ad ſolida, indeque ad plana revocarentur.

(h) Nonnunquam propoſita ad curvam æquatio ad inferiorem poteſtatem aut in duas æquationes inferioris poteſtatis reſolvi poteſt. Sic æquatio $ax^3 - a^2x^2 - bx^2y + axy^2 + abxy - by^3 = 0$ reſolvi poteſt in duas $xx - ax + yy = 0$, & $ax = by = 0$ quarum prior eſt ad circulum, poſterior ad parabolam. Parabolæ autem & circuli cum lineâ quâvis interſectiones per calculos diverſos ſeorſim inveniri poſſunt.

DE MOTU CORPORUM.

de curvis poteſtate irreducibilibus. Nam ſi æquatio, per quam curva definitur, ad inferiorem poteſtatem reduci poſſit: curva non erit unica, ſed ex duabus vel pluribus compoſita, quarum interſectiones per calculos diverſos ſeorſim inveniri poſſunt. Ad eundem modum interſectiones binæ rectarum & ſectionum conicarum prodeunt ſemper per æquationes duarum dimenſionum, ternæ rectarum & curvarum irreducibilium tertiæ poteſtatis per æquationes trium, quaternæ rectarum & curvarum irreducibilium quartæ poteſtatis per æquationes dimenſionum quatuor, & ſic in infinitum. Ergo rectæ & ſpiralis interſectiones numero infinitæ, cum curvâ hæc ſit ſimplex & in curvas plures irreducibilis, requirunt æquationes numero dimenſionum & radicum infinitas, quibus interſectiones omnes poſſunt ſimul exhiberi. Eſt enim eadem omnium lex & idem calculus. (i) Nam ſi à polo in rectam illam ſecantem demittatur perpendiculum, & perpendi-



(i) * Sit polus P, ſecans SI, II, ad eam ex polo normalis Ps, interſectio prima in i, ſecunda in II, &c. circà polum P, revolvatur perpendiculum Ps, unà cum ſecante SI, II ad illud ſemper normali, ubi perpendiculum pervenit ad ſitum Ps, & ſecans SI, II ad ſitum si2, interſectio prima I, percurſo arcu Ii, pervenit ad i, & poſt integram revolutionem cum si2, redit ad ſitum SI, II, prima interſectio I, ſeu i, pervenit ad II, & fit ſecunda, & poſt duas revolutiones fit tertia & ſic deinceps. Ex punctis S, s, ad rectam PM infinitam & poſitione datam demittantur perpendicula SF, sf; manente ſecantis SI, II, poſitione,

diculum illud unà cum ſecante revolvatur circa polum, interſectiones ſpiralis tranſibunt in ſe mutuo, quæque prima erat ſeu proxima, poſt unam revolutionem ſecunda erit, poſt duas tertia, & ſic deinceps: nec interea mutabitur æquatio niſi pro mutatâ magnitudine quantitatum per quas poſitio ſecantis determinatur. Unde cum quantitates illæ poſt ſingulas revolutiones redeunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam primam, ideoque una eademque exhibebit interſectiones omnes, & propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi poſſunt. Nequit ergo interſectio rectæ & ſpiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, & idcirco nulla extat ovalis cujus area, rectis imperatis abciſſa, poſſit per talem æquationem generaliter exhiberi.

(k) Eodem argumento, ſi intervallum poli & puncti, quo ſpiralis deſcribitur, capiatur Ovalis perimetro abſciſſæ proportionale, probari poteſt quod longitudo perimetri nequit per finitam æqua-

tione, conſtantes ſunt rectæ SF, FP, SP, quibus illa poſitio determinatur, & demiſſâ ex I ad PM perpendiculari Im datur æquatio aliqua inter Pm vel Im & datas SP, FP, SF, quâ interſectio I exhibetur; ubi verò ſecans SIII, pervenit ad ſitum si2, manente ſecantis si2 poſitione, datur æquatio inter im vel Pm & datas sP, ſeu SP, Pf, sf, & æquatio hæc à priori diverſa non eſt, niſi ratione quantitatum FP FS, quæ mutatæ ſunt in fP, fs, per quas ſecantis si2, poſitio determinatur, cum utraque æquatio in ſitu SIII, & ſitu si2, ab æquatione ad ſpiralem quæ eadem ſemper manet & ab æquatione ſecantis poſitionem determinante diducantur. Quoniam igitur lineæ fs, fP poſt primam revolutionem ac proindè poſt ſingulas redeunt ad magnitudines primas FS, FP interſectione primâ in ſecundam tranſeunte, ſecundâ in tertiam, & ſic deinceps, æquatio inter IIM, vel PM, & datas PF, PS, SF, redibit ad formam primam quam habebat æquatio inter Im, vel Pm, & eaſdem datas quantitates PF, PS, SF, adeóque una eademque æquatio exhibebit interſectiones omnes I, II, &c., ſeu valores Im, IIM, &c., propterea radices exhibebit numero infinitas quibus omnes exhiberi poſſunt.

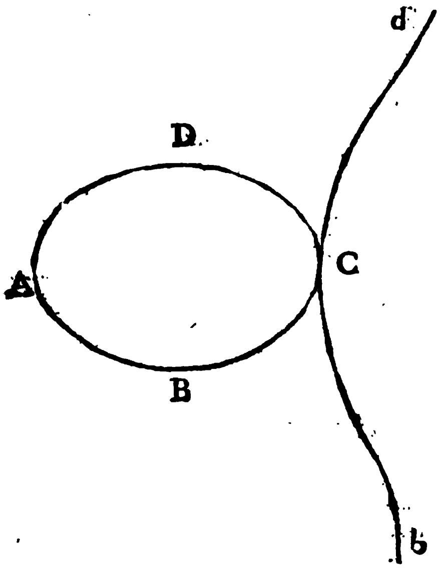
(k) * Eâ enim ratione ſpiralis deſcribetur gyris infinitis ad quam proindè æquatio erit numero dimenſionum infinita, quæ quidem finita deberet eſſe, ſi longitudo perimetri ovalis pro lubitu abſciſſa ſeu intervallum puncti ſpiralem deſcribentis & poli, per finitam æquationem generaliter exhiberi poſſet.

 * Ova-

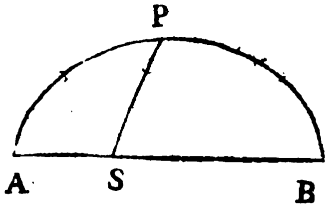
æquationem generaliter exhiberi. (l) De ovalibus autem hic loquor quæ non tanguntur à figuris conjugatis in infinitum pergentibus.

Corollarium.

(m) Hinc area ellipſeos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile ducto deſcribitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam; & propterea per deſcriptionem curvarum geometricè rationalium determinari nequit. Curvas geometricè rationales appello quarum puncta omnia per longitudines æquatio-



(l) * Ovalem ABCD tangat in C curva conjugata bCd, cujus rami Cb, Cd in infinitum pergant, pro hujuſmodi ovalibus non valet Newtoni demonſtratio. Supponit enim circà punctum datum in ovali perpetuò revolvi lineam rectam uniformi cum motu quæ ſit ad peripheriam ovalis terminata, & abſcindat areas ſibi proportionales; ſi autem ovalis tangatur à figurâ conjugatâ bCd, cujus rami in infinitum pergunt, evidens eſt lineâ rectâ intrà ovalem revolvente non percurri totam novæ hujus figuræ aream, nec gyris perpetuis ac infinitis ſimplicem ſpiralem deſcribi.



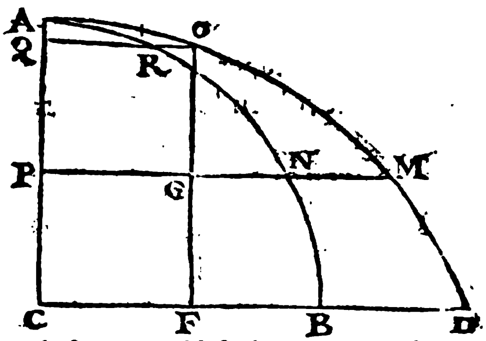
(m) 363. Sit Ellipſeos APB, axis AB, umbilicus S, radius vector SP, dataque ſint totius Ellipſis area & tempus periodicum, ſitque tempus periodicum ad tempus per arcum AP, ità area totius ellipſeos ad aream ſectoris APS, obtinebitur æquatio inter aream APS, & tempus quo illa deſcribitur. Unde ſi poſteà inveniri poſſet æquatio finita inter aream indefinitam APS & radium vectorem SP ac datas quantitates, inveniretur quoque æquatio finita inter tempus per arcum quemvis AP, & radium vectorem SP, qui ità ex dato tempore per æquationem finitam prodiret; Et viceverſâ, ſi ex tempore quo arcus AP deſcribitur, radii vectoris SP longitudo per æquationem finitam poſſet determinari, ope hujus æquationis & ſuperioris proportionis inter tempora & areas obtineretur æquatio finita inter aream quamlibet ASP & radium vectorem SP ac datas quantitates, quod impoſſibile eſſe demonſtratum eſt; & propterea longi-

tu-

tionibus definitas, id eſt, per longitudinum rationes complicatas, determinari poſſunt; cæteraſque (ut ſpirales, quadratrices, trochoides) geometricè irrationales. Nam longitudines quæ ſunt vel non ſunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo elementorum) ſunt arithmeticè rationales vel irrationales. Aream igitur ellipſeos tempori proportionalem abſcindo per curvam geometricè irrationalem ut ſequitur. PRO-

tudo (ac proindè poſitio quæ ex longitudine data eſt) radii vectoris SP, per deſcriptionem curvarum geometricè rationalium determinari nequit. Sunt autem curvæ geometricè rationales in quibus ordinatarum & abſciſſarum rectarum relatio æquatione finitâ exprimi poteſt, quarumque proindè puncta omnia per harum rectarum linearum rationes complicatas determinari poſſunt. Si in æquatione ad curvam $ax^m + by^n + \&c. = o$ numerus terminorum finitus ſit & exponentes m, n, rationales fuerint, curva erit geometricè rationalis contrà ſi numerus terminorum infinitus fuerit, & ſummari nequeant, aut ſi exponens aliquis irrationalis fuerit, curva eſt geometricè irrationalis.

364. Circuli (adeóque & Ellipſis) quadraturam ſeu rectificationem indefinitam finitâ æquatione exhiberi non poſſe demonſtravit Saurinus in Commentariis Pariſienſibus an. 1720. illius demonſtrationem ut pote facilem & brevem referemus. Sit quadrans circuli C A B, & ex puncto quovis N arcûs A B demittatur ad radium A C perpendicularis N P, demonſtrandum eſt arcus A N, & rectarum A P, P N relationem nullâ æquatione finitâ poſſe exprimi. Deſcripta intelligatur curva A O M D cujus hæc ſit natura ut recta M P ex puncto quovis M ad radium A C perpendiculariter demiſſa, ſit æqualis arcui abſciſſo A N; ope curvæ A M D arcus A N in ratione quâvis datâ rectæ P G ad P M dividi poteſt in R; nam ſi per punctum G agatur recta G o, ipſi P M normalis & curvæ A M D occurrens in o, atque ex puncto o, ducatur ad A C perpendicularis o Q arcum A N ſecans in R, erit A R = Q o, adeóque A R : A N = P G : P M. Verùm demonſtravit Clariſſ. Hoſpitalius art. 443. lib. 10. Sectionum Conicarum,



quod ſi arcus A N ſit in partes æquales dividendus quarum una ſit A R, æquatio quâ determinatur partis unius Chorda AR, tot dimenſiones obtinet quot ſunt in arcu A N, partes æquales, atque adeò ſi dividendus ſit arcus A N in ratione indefinitâ rectæ P G ad P M, æquatio illa finita eſſe nequit. Ergò curva A M D, quâ arcus quilibet A N in ratione quâvis P G ad P M per eandem ſemper constructionem dividitur geometricè, rationalis non eſt; ſed ſi arcus A N & rectarum A P, P N relatio poſſet æquatione finitâ exprimi, eadem æquatio exhiberet quoque relationem abſciſſæ A P ad ordinatam P M, ac proinde curva A M D eſſet geometricè rationalis. Ergò rectificatio arcûs AN, æquatione finitâ generaliter exhiberi non poteſt. Q. E. D.

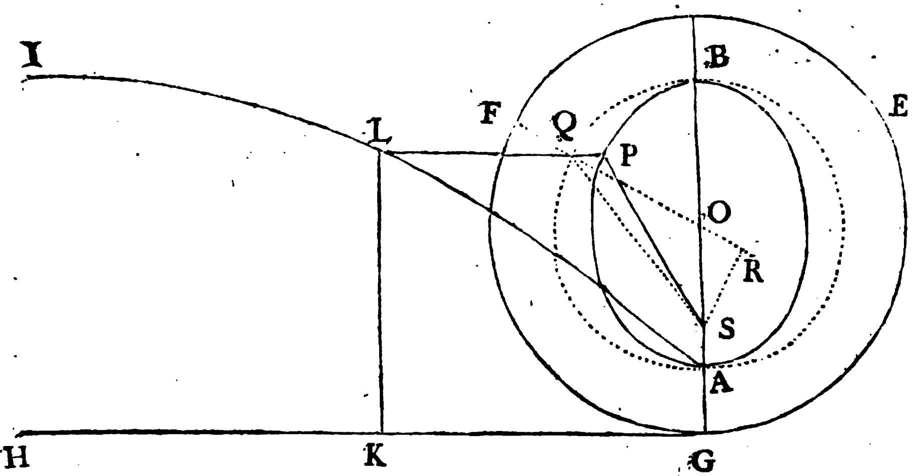
365. Hinc patet curvas omnes quarum deſcriptio pendet à quadraturâ vel rectificatione circuli & ovalium indefinitâ quales ſunt ſpirales, quadratrices, trochoides eſſe geometricè irrationales. Ex demonſtratis autem minime ſequitur circuli & ovalium quadraturam vel rectificationem determinatam ſeu quadraturam vel rectificationem totius ovalis aut portionis illius determinatæ impoſſibilem eſſe.

DE MOTU CORPORUM.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XXIII.

Corporis in datâ trajectoriâ ellipticâ moti invenire locum ad tempus aſſignatum.

Ellipſeos *APB* ſit *A* vertex principalis, *S* umbilicus, & *O* centrum, ſitque *P* corporis locus inveniendus. Produc *OA* ad *G*, ut ſit *OG* ad *OA* ut *OA* ad *OS*. Erige perpendiculum *GH*, centroque *O* & intervallo *OG* deſcribe circulum *GEF*, & ſuper regula *GH*, ceu fundo, progrediatur rota *GEF* revolvendo circa axem ſuum, & interea puncto ſuo *A*



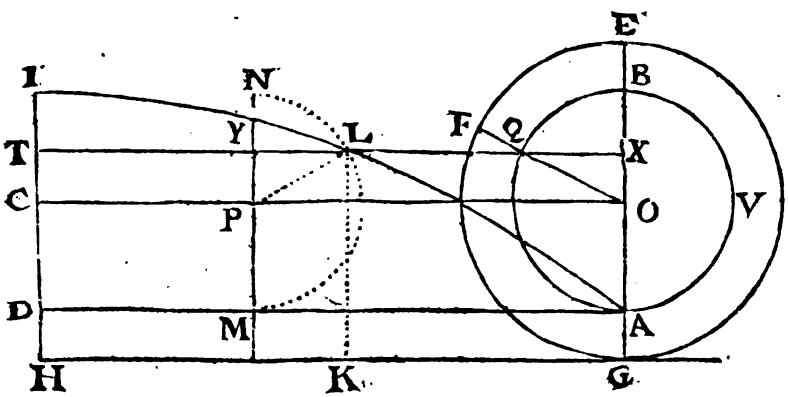
deſcribendo trochoidem *ALI*. Quo facto, cape *GK* in ratione ad rotæ perimetrum *GEFG*, ut eſt tempus, quo corpus progrediendo ab *A* deſcripſit arcum *AP*, ad tempus revolutionis unius in ellipſi. Erigatur perpendiculum *KL* occurrens trochoidi in *L*, & acta *LP* ipſi *KG* parallela occurret ellipſi in corporis loco quæſito *P*.

Nam centro *O*, intervallo *OA* deſcribatur ſemicirculus *AQB*, & arcui *AQ* occurrat *LP* ſi opus eſt producta in *Q*, junganturque *SQ*, *OQ*. Arcui *EFG* occurrat *OQ* in *F*, & in ean-

eandem OQ demittatur perpendiculum SR. ([n]) Area APS, eſt ut area AQS, id eſt, ut differentia inter ſectorem OQA & triangulum OQS, ſive ut differentia rectangulorum $\frac{1}{2}OQ \times AQ$ & $\frac{1}{2}OQ \times SR$, hoc eſt, ob datam $\frac{1}{2}OQ$, ut differentia inter arcum AQ & rectam SR, ideoque (cum ([p]) eædem ſint datæ rationes SR ad ſinum arcus AQ, OS ad OA, OA ad OG, AQ ad GF, & diviſim ([q]) $AQ-SR$ ad $GF-$ſinu arcus AQ) ut GK differentia inter arcum GF & ſinum arcus AQ. *Q. E. D.*

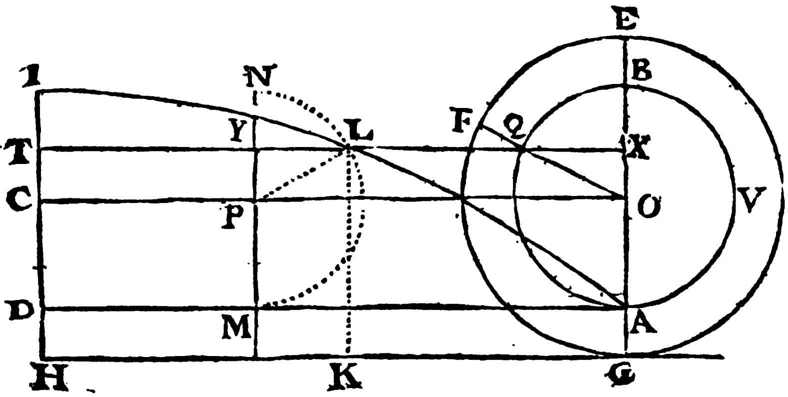
(n) 366. *Area APS eſt ut area AQS* (251) ſed area AQS æqualis eſt *differentiæ inter ſectorem OQA & triangulum OQS*, ſector verò $OQA = \frac{1}{2} OQ \times AQ$, & triangulum $OQS = \frac{1}{2} OQ \times SR$. Ergò ob datam $\frac{1}{2}$ OQ, area AQS adeóque & area APS eſt ut differentia inter arcum AQ & rectam SR ex foco S in radium QO perpendiculariter demiſſam.

(p) 367. Si ex puncto Q ad diametrum AB, demittatur perpendiculum ſeu ſinus arcûs AQ, triangulum OSR, ſimile erit triangulo contento ſub radio OQ ſinu & coſinu arcûs AQ; unde erit SR ad ſinum arcûs AQ, in datâ ratione OS ad OQ ſeu OA; ſed (per conſtr.) OS : OA = OA : OG, & OA ad OG ut arcus AQ ad arcum GF, & diviſim AQ − SR eſt ad GF − ſinu arcûs AQ ut SR ad ſinum arcûs AQ, ſive in datâ ratione OS ad OA. Eſt igitur differentia inter arcum AQ, & rectam SR, adeóque & area APS, ut differentia inter GF, & ſinum arcûs AQ.



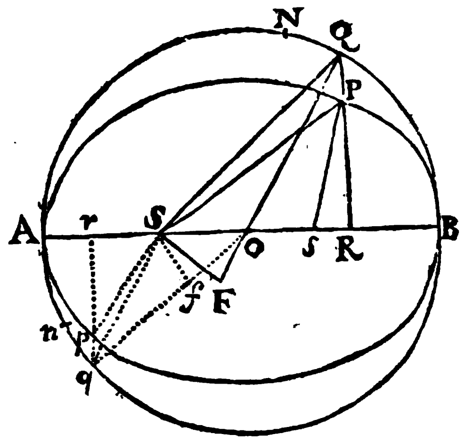
(q) Quod autem ſit GK æqualis differentiæ inter arcum GF & ſinum arcûs AQ facile eſt demonſtrare. Sit enim ALI dimidia trochois ſemirevolutione rotæ GFE deſcripta, erit GH, æqualis ſemiperipheriæ GFE, & HI æqualis & parallela rectæ GB; Per puncta A, O, L agantur rectæ AD, OC, XT parallelæ & æquales rectæ GH, & trochois deſcripta intelligatur duplici motu circuli AVBQ, al-

De Motu Corporum.



altero quidem quo centrum O cum plano circuli uniformiter feratur per rectam O C, altero quo eodem tempore punctum A in circuli periferiâ uniformiter percurrat ſemiperiferiam AVB, & centrum O, circuli mobilis A V B ſit in P quando punctum A pervenit in L & jam percurrit arcum ML; Quoniam in motu æquabili ſpatia eodem tempore percurſa ſunt in datâ ratione, erit recta O C (hoc eſt ſemicircumferentia rotæ G F E) quam centrum O percurrit, ad ſemiperiferiam A V B, quam eodem tempore percurrit punctum A, ut O P ad arcum M L, ſed ſemiperiferia G F E eſt quoque ad ſemiperiferiam A V B, ut arcus G F ad arcum A Q ſeu æqualem M L; eſt igitur $GF = OP = YX$, ac proindè $YX - QX = YX - YL = LX = GK = GF - QX$ eſt vero Q X ſinus arcus A Q, ergo eſt G K æqualis differentiæ inter G F & ſinum arcus A Q. Q. e. D.

Itaque area A P S, eſt ut G K, adeóque area A P S, eſt ad aream ſemiellipſis A P B (vid fig. Newt.) ut G K ad G H, & area A P S, eſt ad aream totius ellipſeos ut G K ad 2 G H, ſeu tempus per arcum A P, eſt ad tempus unius revolutionis in Ellipſi ut G K ad perimetrum rotæ. Si ergò capiatur G K ad rotæ perimetrum ut eſt tempus per A P, ad tempus periodicum & cætera ſiant ut in Newtonianâ conſtructione, erit P locus corporis in Ellipſi. Ex demonſtratis quædam deducuntur corollaria.



368. Cor. 1. Planeta revolvatur in Ellipſi A P B vi tendente ad umbilicum S quem ſol occupat, ſitque linea apſidum, ſeu axis major A B, centrum O, ac proindè excentricitas ſeu diſtantia centri O à ſole S, S O; B aphelion ſeu punctum in orbitâ à ſole remotiſſimum, A perihelion ſive punctum ſoli proximum, locus planetæ in P; centro O radio O B deſcribatur circulus B Q A qui dicitur circulus excentricus, & per P agatur recta Q R axi A B normalis & circulo occurrens in Q, junganturque S P (quæ dicitur intervallum) & S Q. Ex demonſtratis (251) manifeſtum eſt aream S Q B eſſe ad aream totius circuli ut eſt area S P B ad aream totius ellipſeos. Quarè ſi area circuli B Q A rectâ S Q ex foco S ductâ in datâ ratione

ne

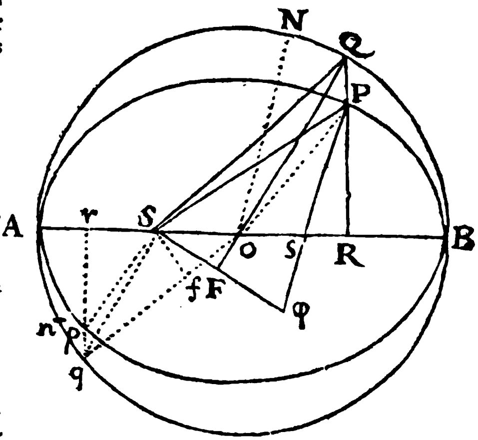
ne diviſa fuerit, demiſſo ex puncto Q, perpendiculo QR ellipſi occurrente in P, & junctâ SP, erit etiam area ellipſeos in eâdem datâ ratione diviſa. Ut itaque rectâ ex umbilico S ductâ abſcindatur ellipſeos area data, ſeu quæ ſit ad aream totius Ellipſeos in ratione datâ, ſufficit rectam SQ, in circulo ducere quæ aream circuli in illâ datâ ratione ſecet.

369. Cor. 2. In radium QO ſi opus fuerit productum, ex umbilico S demittatur perpendiculum SF, & erit, (ex Dem.) area SQB ut arcus BQ + recta SF ſi motus fiat ab aphelio B ad perihelium A per arcum BQA, ſed ſi planeta à perihelio A ad aphelion B feratur per ApB, erit area ASq, ut arcus Aq − recta Sf; hinc ſi capiatur arcus BN, vel An, proportionalis tempori quo planeta percurrit arcum BP, vel Ap, erit BQ + SF = BN, vel Aq − Sf = An, adeóque SF = QN, vel Sf = qn. Et ſi datus fuerit arcus BQ vel Aq, & priori addatur arcus NQ vel poſteriori dematur arcus nq æqualis rectæ SF vel Sf, erit arcus BN proportionalis tempori quo planeta fertur per arcum BP, arcus An proportionalis tempori per arcum Ap, & arcus BAn proportionalis tempori per arcum BPAp.

370. Arcus BQ dicitur anomalia excentri, angulus BSP ſub quo diſtantia planetæ ab aphelio BP ex ſole videtur anomalia vera vel coæquata ſeu angulus ad Solem dicitur; tempus verò quo planeta ab aphelio B ad orbitæ ſuæ punctum quodlibet P digreditur, anomalia media ſive ſimplex appellatur. Undè ſi tempus periodicum totâ circuli peripheriâ ſeu 360. gradibus exprimatur, erit arcus BN anomaliæ mediæ æqualis, ſeu anomaliam mediam exhibebit; cum ſit BN ad totam periferiam ut tempus per BP ad tempus periodicum (369). Differentia inter anomaliam mediam & veram ſeu differentia inter angulum NOB & angulum PSB æquatio centri ſeu proſtaphæreſis vocatur.

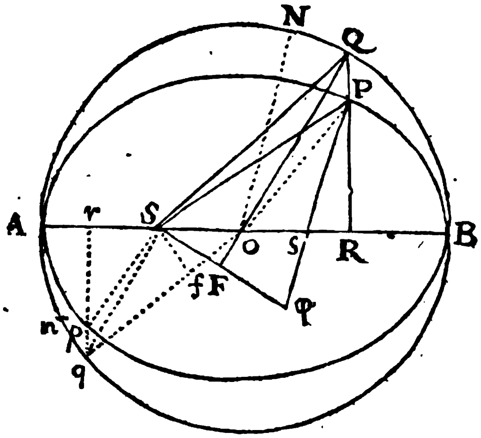
371. Ex datâ anomaliâ verâ ſeu angulo BSP, facilè invenitur ei congrua anomalia media, ſeu arcus BN, quoniam enim ſumpta recta SR pro ſinu toto, eſt PR tangens anguli PSR, & QR tangens anguli QSR, atque PR ad QR ut minor axis ellipſeos ad majorem; ſi fiat ut axis minor ad majorem, ità tangens anguli dati PSB ad 4um., invenietur tangens anguli QSB ſive QSO, ac proindè angulus QSO; hinc datis in triangulo SQO, duobus lateribus SO, OQ cum angulo QSO, invenietur angulus SOQ, & illius ad duos rectos complementum QOB ſeu anomalia excentri BQ dabitur. Fiat ut QO, ad SO, ità 57°. 29578 (qui arcus eſt radio æqualis) ad quartum & dabitur arcus æqualis SO in gradibus gradúſque partibus decimalibus, dicatur hic arcus *B*, & quoniam eſt SO ad SF, ut OQ ad QR, ſeu ut radius ad ſinum anguli QOB ſive arcus BQ, fiat ut radius ad ſinum arcûs BQ, ità SO ſive arcus *B*, ad 4um., & dabitur in gradibus arcus in peripheriâ BQA ſi mendus æqualis rectæ SF; cumque ſit recta SF æqualis arcui QN, (369.) dabitur arcus QN, & proindè BN anomalia media, atque hinc facile eſt anomaliarum & æquationum centri tabulas conſtruere.

372. In orbitis planetarum non admodùm excentricis, datâ anomaliâ mediâ facilè per approximationem duabus methodis ſequentibus invenitur anomalia coæquata.



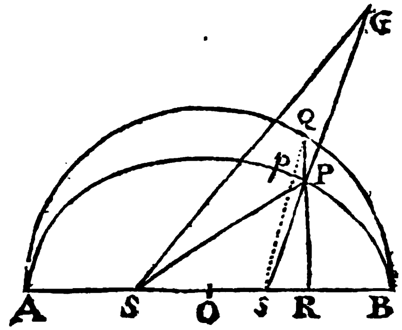
Methodus Wardi. Ad ſecundum focum s, fiat angulus BsP, æqualis anomaliæ mediæ, jungatur SP, erit angulus PSB, anomalia vera, quod quidem ipſe Wardus aſſumebat ut verum ex Hypotheſi merâ, ſed quod etiam ex ſuppoſitione areas eſſe temporibus proportionales deducitur, ſaltem quam proximè: eſt enim angulus NOB ſive anomalia media, æqualis angulis QOB & NOQ, & QOB ſive anomalia excentri, eſt æqualis angulis QSB (ſive PSB neglecto QSP) & SQO, ergo angulus NOB eſt æqualis

DE MOTU CORPORUM.

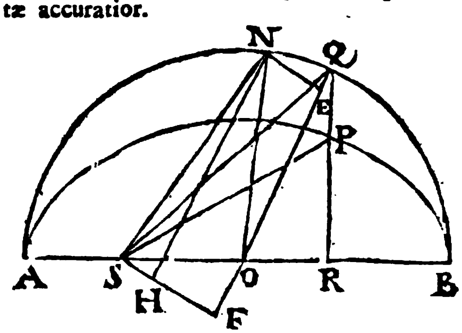


lis angulis PSB, SQO, NOQ quibus etiam quam proximè æqualis eſt angulus PsB, nam coeuntibus focis S & s cum centro O, puncta Q & P etiam coeunt & angulus SPO angulo SQO eſt quam proximè æqualis; pariter ut QO proxime coincidit cum PO ſingatur SF eſſe perpendicularem in ipſam PO, & produci donec cum Ps producto in φ concurrat, erunt quam proximè OF, sφ parallelæ, ideoque ob æquales SO, Os, æquales erunt SF & Fφ, SP & Pφ, ut & anguli SPF & FPφ ſive OPs, ſed ob SF æqualem QN & SQ ſive SP prope æqualem OQ eſt angulus SPF ſive OPs prope æqualis angulo NOQ: ergo totus angulus SPs eſt æqualis angulis SQO & NOQ ſimul ſumptis, & cum angulus PsB ſit æqualis angulis PSB & SPs, æqualis prope erit angulis PSB, SQO, NOQ ſicut angulus NOB, ergo angulus PsB eſt quam proximè anomalia media cujus anomalia coæquata eſt PSB.

Dato autem angulo BsP, angulum PSB, ità quærit Wardus. Producatur sP, ad G, ut ſit PG = PS, & jungatur SG, erit sG = SP + Ps = AB (ex nat. Ellipſ.) adeóque in triangulo GsS, datis lateribus Gs, Ss, angulo SsG dantur anguli SGs (= GSP, ob SP = PG) & GSs, unde cognoſcetur angulus PSs ſive PSB æqualis nempe differentiæ angulorum GSs, GSP, quare in triangulo SPs, datis angulis duobus PsS, PSs, angulo SPs, qui eſt ſumma angulorum GSP, SGP, & latere Ss, invenietur latus SP ſeu intervallum.



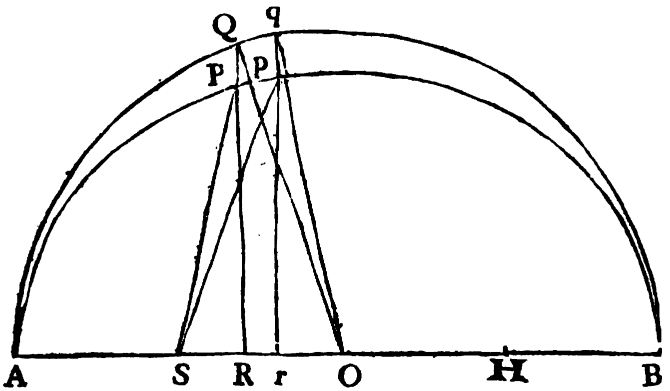
Ubi excentricitas paulo major eſt. Wardi methodum ità corrigit Bulliadus. Per punctum P Wardi methodo determinatum agatur QR axi AB normalis, & excentrico occurrens in Q, jungaturque sQ, orbitam ſecans in p, erit p, locus planetæ accuratior.



Methodus Caſſini. Omnibus poſitis (ut ſuprà num. 369.) jungantur SN, ON & agantur NH rectæ QF parallela & lineæ SF occurrens in H, & NE parallela SF rectæ QF occurrens in E, erit NE = HF ſinus arcûs NQ; cumque ſit SF = NQ (369) erit SH differentia inter arcum NQ & ipſius ſinum NE; ſi excentricitas SO exigua fuerit erit fere NQ = NE = HF = SF & proinde SN parallela FQ, adeóque angulus SNO, æqualis angulo NOQ; Porrò in triangulo SNO, datis duobus lateribus NO, SO, & angulo intercepto SON (complemento nempe anomaliæ mediæ datæ ad duos rectos) invenietur angulus SNO ſeu NOQ, & ipſius menſura nempè arcus NQ; & indè innoteſcet anomalia excentri BQ; Hinc in triangulo SQO, datis lateribus SO, OQ & angulo SOQ, invenietur

Scholium.

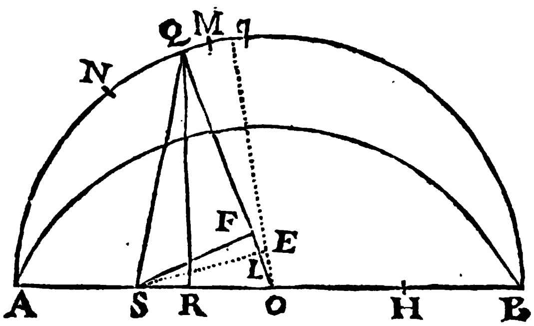
(r) Cæterum, cum difficilis ſit hujus curvæ deſcriptio, præſtat ſolutionem vero proximam adhibere. Inveniatur tum angulus quidam B, qui ſit ad angulum graduum 57. 29578, quem



arcus radio æqualis ſubtendit, ut eſt umbilicorum diſtantia *SH* ad ellipſeos diametrum *AB*; tum etiam longitudo quædam L, quæ ſit ad radium in eâdem ratione inverſè. Quibus ſemel inven-

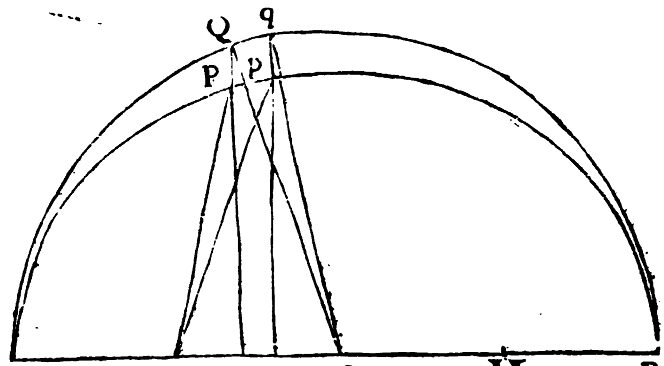
angulus Q S O, & ſumptâ S R pro ſinu toto, erit QR ad P R ſeu axis major ad minorem, ut tangens anguli dati Q S B ad tangentem anguli ad ſolem P S B, qui ità obtinebitur.

Hæc ſatis ſunt in orbitis planetarum non valde excentricis, ſed in orbitis Mercurii & Martis quarum major eſt excentricitas ità invenitur arcus N Q. Ex datis in triangulo S N O, lateribus S O, N O, & angulo S O N, inveniuntur latus S N, & angulus S N O; deindè quæritur in partibus decimalibus radii O N differentia inter arcum qui metitur angulum S N O, & ejus ſinum quæ citrà errorem ſenſibilem ſupponi poteſt æqualis rectæ S H, ſeu differentiæ inter arcum N Q anguli N O Q menſuram & ejus ſinum N E. Sitque ille decimalium numerus *A*. Invenietur numerus decimalium radii S N quem eadem linea S H continet dicendo ut S N ad N O ſic *A* ad numerum quæſitum *B*, & quoniam in triangulo rectangulo S H N eſt S N ad ſinum totum ut S H ſive *B* ad ſinum anguli S N H, invenietur ergò angulus S N H, ex angulo invento S N O ſubducendus, ut relinquatur angulus HNO, ſeu æqualis N O Q, ſive arcus N Q.

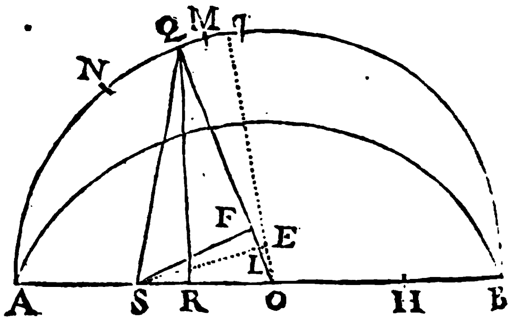


(r) 373. Sit axis major ellipſeos A B, centrum O, umbilici S & H, & feratur planeta à perihelio A ad aphelium B, radio A O deſcribatur circulus excentricus A Q B; quoniam radius circuli æqualis eſt arcui graduum 57. 29578, ſi fiat A B ad SH ſeu Q O ad S O, ut arcus vel angulus 57. 29578, ad arcum *B*, erit *B* arcus æqualis rectæ S O. Cognoſcitur arcus A N tempori proportionalis, & dicatur *N*; deinde per methodum Wardi aut Caſſini vel aliâ ratione inveniatur arcus

ventis, problema deinceps confit per ſequentem analyſin. Per conſtructionem quamvis, vel utcunque conjecturam faciendo, cognoſcatur corporis locus *P* proximus vero ejus loco *p*. Demiſſaque ad axem ellipſeos ordinatim applicatâ *PR*, ex proportione diametrorum ellipſeos, dabitur circuli circumſcripti *AQB* ordinatim applicata *RQ*, quæ ſinus eſt anguli *AOQ* exiſtente *AO* radio, quæque ellipſin ſecat in *P*. Sufficit angulum illum



rudi calculo in numeris proximis invenire. Cognoſcatur etiam angulus tempori proportionalis, id eſt, qui ſit ad quatuor rectos, ut eſt tempus, quo corpus deſcripſit arcum *Ap*, ad tempus



A Q, proximè æqualis anomaliæ excentri à perihelio A ſumptæ, erit arcus N Q æqualis rectæ S F ex umbilico S in radium Q O perpendiculariter demiſſæ (369). fiat ut S H ad A B ſive ut S O ad Q O, ità radius *R* ad longitudinem quandam *L*, & erit $QO = \frac{SO \times L}{R}$. & quoniam triangulum S O F, ſimile eſt triangulo Q O R erit Q O : Q R = S O : S F, hoc eſt, radius ad ſinum anguli Q O A, ut arcus *B* ad alium arcum *D* qui erit æquales rectæ S F : Si itaque arcus A Q rectè aſſumptus fuiſſet foret arcus *D* æqualis arcui N Q (369): Si verò arcus A Q accuratus non eſt, capiatur N M = *D*, punctum M cadet ſuprà vel infra punctum Q. Sit anomalia excentri accurata (quæ eſt incognita) A q, & in radium q O cadat perpendiculum. S E erit æquale N q (369) undè S E − S F, hoc eſt ferè L E = N q − N M = M q = Q q − Q M. Quoniam vero angulus Q O q, parvus eſt, erit O E : O q ſive O Q = L E : Q q = Q q − Q M : Q q. Undè O Q − O E : O Q = Q M : Q q.

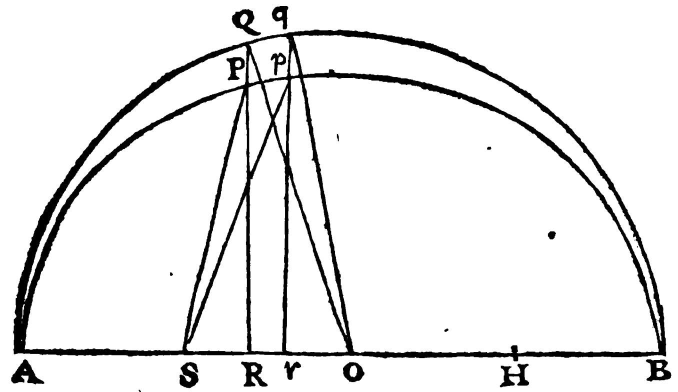
Sed

pus revolutionis unius in ellipſi. Sit angulus iſte N. Tum capiatur & angulus D ad angulum B, ut eſt ſinus iſte anguli AOQ ad radium, & angulus E ad angulum $N - AOQ + D$, ut eſt longitudo L ad longitudinem eandem L coſinu anguli AOQ diminutam, ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Poſtea capiatur tum angulus F ad angulum B, ut eſt ſinus anguli $AOQ + E$ ad radium, tum angulus G ad angulum $N - AOQ - E + F$ ut eſt longitudo L ad longitudinem eandem coſinu anguli $AOQ + E$ diminutam ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Tertiâ vice capiatur angulus H ad angulum B, ut eſt ſinus anguli $AOQ + E + G$ ad radium; & angulus I ad angulum $N - AOQ - E - G + H$, ut eſt longitudo L ad eandem longitudinem coſinu anguli $AOQ + E + G$ diminutam, ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Et ſic pergere licet in infinitum. Denique capiatur angulus AOq æqualis angulo $AOQ + E + G + I +$ &c. Et (ſ) ex coſinu

Sed OE, eſt ferè æqualis OF, ergò $OQ - OF : OQ = QM : Qq$. Porrò OQ, eſt ad RO, ſeu radius ad coſinum anguli AOQ, ut SO, ad OF, adeóque $OF = \frac{SO \times \text{coſ. } AQ}{R}$. Creſcentibus AN, AQ, QR, decreſcit RO, & evaneſcit ubi AQ eſt circuli quadrans, ac tandem fit negativa ubi AQ quadrante major eſt. Quarè cum ſit $+OQ : +SO = RO : OF$, OF idem ſignum + vel − habere debet cum RO, adeóque ſi angulus AOQ, ſeu arcus AQ eſt quadrante minor, OF eſt quantitas affirmativa; Si AQ quadrans eit, OF evaneſcit; Si AQ eſt quadrante major, OF fit negativa. Eſt igitur $OQ - \frac{SO \times \text{coſ. } AQ}{R} : OQ = QM : Qq$, ſeu ob $QO = \frac{SO \times L}{R}$, eſt $\frac{SO \times L - SO \times \text{coſ. } AQ}{R} : \frac{SO \times L}{R}$, ſive $L - \text{coſ. } AQ : L = QM : Qq$, ſi fuerit AQ minor quadrante, & $L + \text{coſ. } AQ : L = QM : Qq$, ſi fuerit AQ major quadrante. Eſt autem arcus $QM = AN - AQ + NM = N - AQ + D$, quarè ſi arcus Qq, dicatur E, erit $E : N - AQ + D = L : L \mp \text{coſ. } AQ$ & $AQ + E$, erit æqualis Aq; invento itaque E per ultimam proportionem, ſi loco AQ capiatur arcus accuratior Aq, ſeu angulus $AOQ + E$, & inſtituatur proceſſus priori ſimilis, capiendo arcum F, ad arcum B, ut eſt ſinus arcûs $AQ + E$ ſeu Aq ad radium, & arcum G ad arcum $N - Aq + F$, ſeu, $N - AQ - E + F$, ut eſt longitudo L, ad longitudinem eandem coſinu anguli AOq ſeu $AOQ + E$ diminutam ubi angulus AOq recto minor eſt, auctam ubi major, erit $AQ + E + G$, ſeu $Aq + G$, arcus magis verus, & ſimiliter ſi loco arcûs Aq, uſurpetur arcus $Aq + G$ & idem repetatur proceſſus, invenietur novus arcus $AQ + E + G + I$, ſeu $Aq + G + I$, accuratior arcu $Aq + G$, & ſic pergere licet in infinitum & quantumvis proximè ad veritatem accedere.

(ſ) * *Ex coſinu Or.* Eſt enim radius ad coſinum anguli inventi AOq, ut qO ad Or, invenientur ergò punctum r, & ordinata qr. Deinde ſi fiat ut axis major ad minorem, ità qr ad pr, habebitur locus corporis p.

DE MOTU CORPORUM.

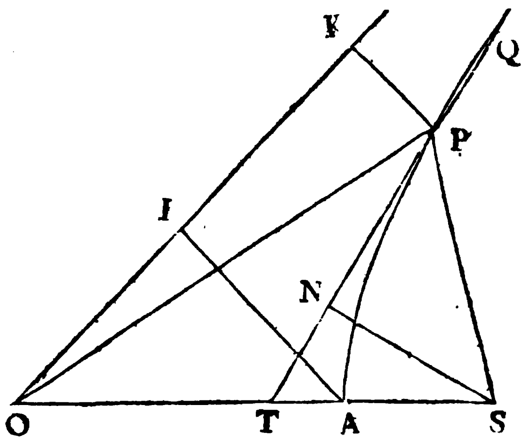


ſinu ejus *Or* & ordinata *pr*, quæ eſt ad ſinum ejus *qr* ut ellipſeos axis minor ad axem majorem, habebitur corporis locus correctus *p*. (t) Si quando angulus N − *AOQ* + D negativus eſt, debet ſignum + ipſius E ubique mutari in −, & ſignum − in +. Idem intelligendum eſt de ſignis ipſorum G & I, ubi anguli N − *AOQ* − E + F, & N − *AOQ* − E − G + H negativi prodeunt. Convergit autem ſeries infinita *AOQ* + E + G + I + &c. quam celerrimè, adeo ut vix unquam opus fuerit ultra progredi quam ad terminum ſecundum E. Et fundatur calculus in hoc theoremate, quod area *APS* ſit ut differentia inter arcum *AQ* & rectam ab umbilico *S* in radium *OQ* perpendiculariter demiſſam.

Non

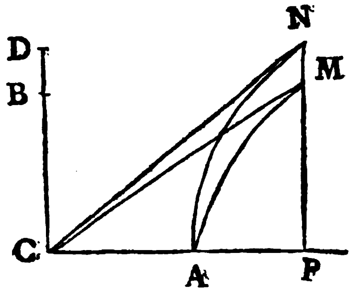
* (t) Si quandò angulus $N - AQ + D$, ſeu arcus QM, (vid fig. Not.) negativus eſt, ſeu ſi punctum M, cadit infrà punctum Q, debet ſignum ipſius $+E$, ubique mutari in −, & ſignum − in +. Quoniam enim ſuprà invenimus $E : N - AQ + D = L : L \mp \text{coſ.}\, AQ$, ſi fuerit arcus $N - AQ + D$, negativus, debet quoque arcus E eſſe negativus, & arcus Aq erit $AQ - E$. Idem intelligendum eſt de ſignis ipſorum G & I &c. ob eandem rationem.

Dixi-



Non diſſimili calculo conficitur problema in hyperbolâ. Sit ejus centrum *O*, vertex *A*, umbilicus *S* & aſymptotos *O K*. Cognoſcatur quantitas areæ abſcindendæ tempori proportionalis. Sit ea A, & fiat conjectura de poſitione rectæ *SP*, quæ aream *APS* abſcindat veræ proximam. Jungatur *O P*, & ab *A* & *P* ad aſymptcton agantur *AI*, *PK* aſymptoto alteri parallelæ, & (a) per tabulam logarithmorum dabitur area

(a) Diximus ſuperius (Theor. IV. de Hyp. p 124.) aream inter aſimptotum, Hyperbolam, ordinatam in vertice erectam & aliam ordinatam comprehenſam, eſſe Logarithmum abſciſſæ, idem verò, more veterum demonſtrare & ad hanc Propoſitionem propius accommodare hic non pigebit.



374. Lemma. Sint duæ hyperbolæ A M, A N quarum centrum C, ſemidiameter communis A C, ſemidiametri conjugatæ C B, C D, per punctum quodvis P agatur P M N ordinatim ad diametrum C P applicata, hyperbolis occurrens in punctis M & N, junganturque C M, C N ſpatia hyperbolica A M P, A N P & ſectores A M C, A N C ſunt ad invicem in ratione ſemidiametrorum conjugatarum C B, C D, vel etiam ordinatarum P M, P N. Nam ex naturâ hyperbolæ (Theor. II. de Hyp.) $PM^2 : CB^2 = CP^2 - CA^2 : CA^2$, & $PN^2 : CD^2 = CP^2 - CA^2 : CA^2$, undè $PM^2 : CB^2 = PN^2 : CD^2$, & $PM^2 : PN^2 = CB^2 : CD^2$, ac $PM : PN = CB : CD$, cùmque idem ſemper eveniat quâcumque in parte cadat ordinata P M N, liquet ſpatia hyperbolica A M P, A N P eſſè inter ſe ut C B ad C D, vel P M ad P N, ſed triangula C P M, C P N ſunt ad invicem ut P M ad P N vel C B ad C D; ergò $CPM - AMP : CNP - ANP = AMC : ANC = PM : PN = CB : CD$. Q. e. D.

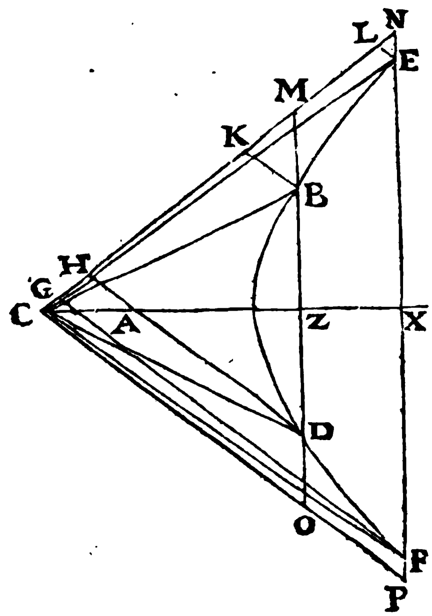
375. Coroll. Si duæ ſemidiametri conjugatæ C A, C D fuerint æquales, hyperbola A N erit æquilatera; quare inventâ quadraturâ ſpatiorum hyperbolicorum A N P vel A N C in hyperbolis æquilateris, habebitur etiam quadratura ſpatiorum hyperbolicorum A M P vel A M C in aliis quibuſvis hyperbolis.

376.

DE MOTU CORPORUM.

376. Lemma. Si ſuper hyperbolæ EBDF aſymptoto CN ſumantur quatuor partes CG, CH, CK, CL, ut ſit CG:CH = CK:CL; ducantur autem rectæ GF, HD, KB, LE alteri aſymptoto CP parallelæ, & hyperbolæ occurrentes in punctis F, D, B, E, juganturque ſemidiametri CF, CD, CB, CE, ſectores hyperbolici CBE, CDF erunt æquales. Agantur enim rectæ BD, EF aſymptotis occurrentes in punctis M, O, N, P, & ob parallelas KB, HD, CO erit MB:MK = DO:CH, & ob parallelas LE, GF, CP erit etiam NE:NL = FP:CG; ſed, ex naturâ hyperbolæ inter aſymptotos (Lem. I. de Conic. pag. 115.) MB = DO, & NE = FP, undè MK = CH & NL = CG; Porrò CG:CH = CK:CL (per hyp.) hoc eſt, NL:MK = CK:CL = LE:KB, ex naturâ hyperbolæ intrà aſymptotos (Theor. IV. de Hyp. p. 124.) rectæ igitur NE, MB, hoc eſt, EF, BD erunt parallelæ, ac proindè, linea per earum medium X, Z ducta erit Diameter, tranſibitque per centrum C; (Lem. IV. de Conic. p. 119.) unde facile deducitur trapezia MXZN, OXZP fore æqualia ut & areæ mixtilineæ BXZE, DXZF, unde ſingulis ex correſpondenti trapezio ſubſtractis relinquentur areæ MBEN & ODFP æquales, quibus addantur Triangula MBC, ODC, æqualia ob baſes æquales MB, OD in eâdem linea poſitas, & ob vertices ad idem punctum C concurrentes, erunt æquales areæ CMNEBC, COPFDC, ex quibus denique ſubſtractis Triangulis NEC, PFC quæ æqualia ſunt ob baſes æquales NE, PF in eâdem lineâ poſitas, & ob vertices ad idem punctum C concurrentes, ſupererunt ſectores hyperbolici CBE, CDF inter ſe æquales. Q. e. D.

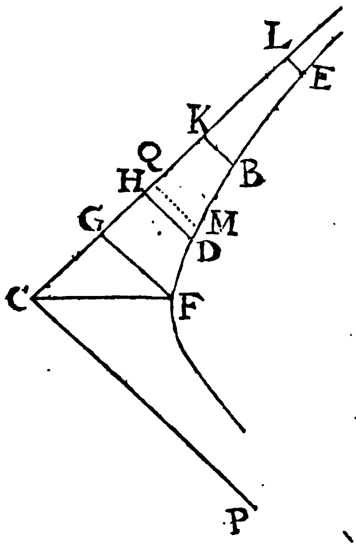
377. Lemma. Si per puncta quævis aſymptoti CL, agantur duæ rectæ GF, HD alteri aſymptoto CP parallelæ, & hyperbolæ occurrentes in F & D, junganturque ſemidiametri CF, CD, trapezium hyperbolicum GFDH æquatur ſectori CFD. Nam, ex naturâ hyperbolæ inter aſymptotos, triangula CHD, CGF, æquantur ob æquales angulos G & H & latera reciproca (per Theor. IV. de Hyp. p. 124.) adeóque ſublato communi triangulo CGA, reſidua ſpatia GADH, CAF erunt æqualia, quibus ſi addatur idem ſpatium hyperbolicum DAF, ſummæ GFDH, CFD erunt æquales. Q. e. D.



378. Coroll. 1. Hinc iiſdem poſitis quæ (num. 376.) trapezia hyperbolica GFDH, KBEL ſunt æqualia.

379. Coroll. 2. Si aſymptoti partes CG, CH, CK fuerint continuè proportionales, duo ſectores CFD, CDB & duo trapezia hyperbolica GFDH, HDBK, æquantur. Eâdem enim ratione quâ num. 376. oſtendetur rectam BF tangenti per punctum D ductæ eſſe parallelam. Undè ſi ſuper aſymptoto CL ſumantur partes quotcumque CG, CH, CK, CL &c. in continuâ progreſſione geometricâ, & ex punctis G, H, K, L &c. agantur rectæ GF, HD, KB, LE &c. alteri aſymptoto parallelæ, trapezia hyperbolica GFDH, HDBK, KBEL erunt æqualia; & viciſſim ſi trapezia illa æquantur, erunt rectæ CG, CH, CK, CL &c. in continuâ progreſſione geometricâ.

380. Coroll. 3. Sit hyperbola FDBE æquilatera, cujus centrum C, aſymptotus CL, ſemiaxis tranſverſus CF, capiantur in aſymptoto partes CG, CH, CK, CL, &c. in continuâ progreſſione geometricâ, aganturque GF, HD, KB, LE &c., alteri aſymptoto CP parallelæ, trapezia hyperbolica GFDH, HDBK, KBEL &c. erunt æqualia; quarè eorum ſummæ, ſcilicet o, GFDH, GFBK, GFEL, &c. erunt in continuâ progreſſione arithmeticâ. Si itaque CG ſit unitas, CH, CK, CL, &c. numeri, erunt o, GFDH, GFBK, GFEL, illorum numerorum logarithmi.



381. Coroll. 4. Itaque per logarithmorum hyperbolicorum tabulas, inveniri poſſunt trapeziorum quorumvis GFDH, BGFK, &c. areæ; Sumptâ enim CG pro unitate, quærantur in numeris valores rectarum CH, CK, &c. & horum numerorum logarithmi exhibebunt trapezia hyperbolica GFDH, GFBK, &c.

382. Coroll. 5. Sit $CG = 1$, $GH = x$, $CH = 1 + x$, $HD = y$, & erit, ex naturâ hyperbolæ inter aſyptotos $\overline{1+x} \times y = 1$, adeóque $y = \frac{1}{1+x}$, & trapezii GFDH elementum DHQM ſeu $y\,dx = \frac{dx}{1+x}$; Si igitur $L.\,1+x$, denotet logarithmum numeri $1+x$, erit $L.\,1+x = GFDH$, & elementum logarithmi ſeu $d.\,L.\,1+x = y\,dx = \frac{dx}{1+x}$. Et ſimiliter elementum logarithmi numeri cujuſvis z ſeu $d.\,L.\,z = \frac{dz}{z}$.

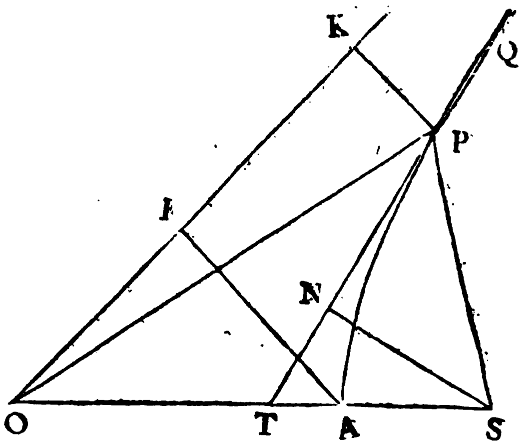
383. Coroll. 6. Cum ſit $y = \frac{1}{1+x}$, ſi peragatur diviſio, erit $y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$ &c. in infinitum, ac proinde $y\,dx = dx - x\,dx + x^2\,dx - x^3\,dx$ &c. in infinitum, & ſumptis utrinque fluentibus $S.\,y\,dx = GFHD = L.\,1+x = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ &c. in infinitum. Si autem numerus propoſitus ſit unitate minor, ſeu $1-x$, eodem modo invenietur ipſius logarithmus $S.\,-y\,dx = L.\,1-x = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5$ &c.

384. Scholium. Obſervandum eſt logarithmos hyperbolicos Neperi à logarithmis Briggii quibus vulgò utimur differre; verùm cum hyperbolici ſint ſemper ad Briggianos ſeu vulgares in eâdem conſtanti ratione, nimirum logarithmus hyperbolicus numeri denarii 2. 302585 eſt ad logarithmum Briggianum numeri denarii 1. 000000, ut quilibet logarithmus hyperbolicus ad ejuſdem numeri logarithmum Briggianum, facile eſt hyperbolicos ad Briggianos & contrà Briggianos ad hyperbolicos reducere, adeóque hyperbolarum quadraturam per logarithmos etiam vulgares invenire. Si dividatur 1. 000000, per 2. 302585 &c., quotiens 0. 4342948 &c. per logarithmum quemvis Hyperbolicum multiplicatus, dabit logarithmum vulgarem, & viceverſâ, ſi logarithmus quilibet vulgaris per 0. 43429481 & dividatur, quotiens erit logarithmus hyperbolicus.

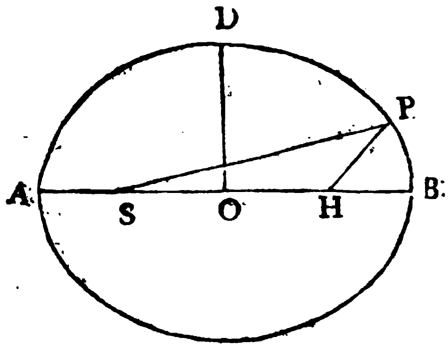
* *Et per tabulam.* (381. 384.)

De Motu Corporum.

A I K P, (b) eique æqualis area *O P A*, quæ ſubducta de triangulo *OPS* relinquet aream abſciſſam *A P S*. Applicando areæ abſcindendæ A & abſciſſæ *A P S* differentiam duplam 2 *A P S* − 2 A vel 2 A − 2 *A P S* ad lineam *SN*, quæ ab umbilico *S* in tangentem *T P* perpendicularis eſt, (c) orietur longitudo chordæ *P Q*. Inſcribatur autem chorda illa *P Q* inter *A* & *P*, ſi area abſciſſa *A P S* major ſit areâ abſcindendâ A, ſecus ad puncti *P* contrarias partes; & punctum *Q* erit locus corporis accuratior. Et computatione repetitâ invenietur idem accuratior in perpetuum.



Atque his calculis problema generaliter conſit analyticè. Verùm uſibus aſtronomicis accommodatior eſt calculus particularis qui ſequitur. Exiſtentibus *A O*, *O B*, *O D* ſemiaxibus ellipſeos, & L ipſius latere recto, ac D differentia inter ſemiaxem minorem *O D* & lateris recti ſemiſſem $\frac{1}{2}$ L; quære tum angulum Y, cujus ſinus ſit ad radium ut eſt rectangulum ſub differentia illa D, & ſemiſumma axium *A O* + *O D* ad quadratum axis majoris *A B*; tum angulum Z, cujus ſinus ſit ad radium ut eſt

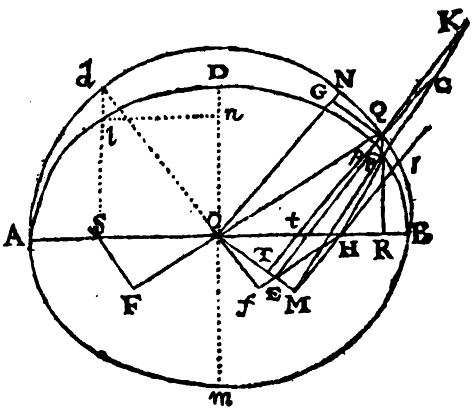


* (b) *Eique æqualis area O P A* (377):

* (c) *Orietur longitudo.* Nam cum arcus PQ exiguus ſit, accipi poteſt pro chordâ PQ ſeu parte PQ tangentis TP productæ; undè triangulum rectilineum SQP, quam proximè æquatur differentiæ ſpatiorum hyperbolicorum APS, ASQ ſeu *A*; ſed triangulum rectilineum SQP $= \frac{PQ \times SN}{2}$, ergò $\frac{PQ \times SN}{2} = A - APS$, vel $= APS - A$, ac proindè $PQ = \frac{2A - 2APS}{SN}$ vel $= \frac{2APS - 2A}{SN}$, prout area *A* major vel minor eſt areâ APS.

duplum rectangulum ſub umbilicorum diſtantiâ SH & differentiâ illâ D ad triplum quadratum ſemiaxis majoris AO. His angulis ſemel inventis, locus corporis ſic deinceps determinabitur. Sume angulum T proportionalem tempori quo arcus BP deſcriptus eſt, ſeu motui medio (ut loquuntur) æqualem; & angulum V, primam medii motus æquationem, ad angulum Y, æquationem maximam primam, ut eſt ſinus dupli anguli T ad radium; atque angulum X, æquationem ſecundam, ad angulum Z, æquationem maximam ſecundam, ut eſt cubus ſinus anguli T ad cubum radii. Angulorum T, V, X vel ſummæ T+X+V, ſi angulus T recto minor eſt, vel differentiæ T+X−V, ſi is recto major eſt rectiſque duobus minor, æqualem cape angulum *BHP*, motum medium æquatum; & ſi *HP* occurrat ellipſi in *P*, actâ *SP* abſcindet aream *BSP* tempori proportionalem quam proximè. Hæc praxis ſatis expedita videtur, propterea quod angulorum perexiguorum V & X, in minutis ſecundis, ſi placet, poſitorum, figuras duas treſve primas invenire ſufficit. Sed & ſatis accurata eſt ad theoriam planetarum. Nam in orbe vel Martis ipſius, cujus æquatio centri maxima eſt graduum decem, error vix ſuperabit minutum unum ſecundum. Invento autem angulo motus medii æquati BHP, angulus veri motus BSP & diſtantia SP in promptu ſunt per methodum notiſſimam. (d) Hacte-

(d) 385. Ellipſeos quam Planeta deſcribit ſit Centrum O, umbilici S, H, & ſemiaxes O B, O D; Sole in S poſito umbilicus alter H erit ferè centrum medii motûs Planetæ, (372) id eſt, ſi ex umbilico H agatur linea HI, quæ cum lineâ apſidum OB, conſtituat angulum IHB anomaliæ mediæ æqualem, recta illa HI, ferè tranſibit per locum Planetæ in orbitâ ellipticâ parum excentricâ revolventis, tranſeat autem H P, per locum verum Planetæ P & erit angulus P H I, anomaliæ mediæ I H B, addendus (vel detrahendus) ut motus medius æquatus BHP habeatur, & angulus PHI aut ipſi æquipollens dicetur æquatio tota medii motus, quam in duas partes dividit Newtonus, quarum unam primam æquationem & al-



De Motu Corporum.

Hactenus de motu corporum in lineis curvis. Fieri autem poteſt ut mobile rectâ deſcendat vel rectâ aſcendat, & quæ ad iſtiuſmodi motus ſpectant, pergo jam exponere.

SEC-

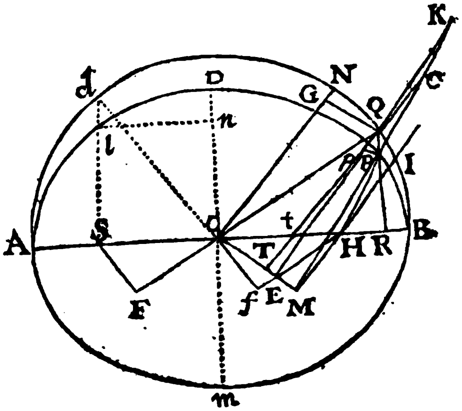
teram ſecundam æquationem vocat; determinat ſingulas in iis punctis ubi maximæ ſunt, & rationem maximæ æquationis ad aliam in dato quovis puncto adhibendam indicat.

Præcedentes Methodos illuſtrarunt demonſtrationibus & exemplis Keillius & Gregorius, hanc non minus ingenioſam intactam reliquerunt, veſtigiis Newtoni inſiſtere conabimur, & aperire quibus fundamentis nitatur hæc approximatio.

386. Producatur IH in M donec occurrat perpendiculo OM, à centro O in ipſam IH demiſſo jungaturque MP, erit angulus PHI æqualis angulis PMH & MPH, quorum ſinus erunt inter ſe ſicut PH ad MH; ſed cum MH ſit ſemper minor OH diſtantia centri à foco, ſitque PH diſtantia foci H ad punctum P Ellipſeos, exigua erit MH reſpectu HP, ideoque minimus eſt angulus MPH reſpectu anguli PMH, illum itaque negligit, & hunc ſolum PMH ut æquationem totam conſiderat Newtonus.

Ducto verò ut ſuperius expoſitum eſt, circulo BQNA ſuper magnum axem Ellipſeos AB, & ex P loco Planetæ ductâ PR perpendiculari in eum magnum axem eâque PR productâ donec ſecet circulum BQNA in Q; ducatur TQ perpendicularis in OM (ideoque parallela lineæ IM) & producatur ita ut ſecet in C lineam MP etiam productam, erit (per 29. 1. El.) angulus TCM æqualis Angulo CMH ſive PMH, eritque TCM æquatio totalis motus medii: Ducatur pariter QO quæ producatur in F donec ſecetur à perpendiculo SF à foco S in quo ſol verſatur ducto, ſumaturque arcus QN æqualis SF & ducatur NO, erit NOB anomalia media (369) & erit NO parallela lineis IM, TQ; ſit QG perpendicularis ducta ex Q in ON, erit QG ſinus arcus QN, & erit OT illi ſinui æqualis.

Ducatur denique in O, Of, perpendicularis in lineam OQ, ideoque parallela lineæ SF, & ex H in illam ducatur perpendiculum Hf, Triangulum OfH æquale erit Triangulo SOF, ob lineas æqua-



les SO, OH, angulos rectos in F & f, & angulos æquales in S & O ob parallelas SF, Of; erit ergo Of=SF=QN; Concurrant lineæ fH, OM in E, & ex E ducatur per Q linea EQ ſecans MC (productam ſi neceſſe ſit) in K, angulus TCM erit æqualis angulis EKM & KQC ſive TQE (per 32 1 Elem.) ſic ergo Newtonus dividit æquationem totam TCM in angulos EKM, TQE, quos ſeparatim determinat.

Prima ergo æquatio determinatur, ductâ HM ex foco quæ faciat cum axi angulum anomaliæ mediæ æqualem, & ductâ ex centro lineâ OM in illam perpendiculari, tum etiam ductâ ex foco lineâ Hf quæ faciat cum axi angulum anomaliæ excentri æqualem, ſecetque lineam OM (productam ſi neceſſe ſit) in E; ex M ducatur linea per locum planetæ P & ex E ducatur linea per Q punctum correſpondens in circulo, & concurrant illæ lineæ in K, & angulus EKM eſt prima æquatio; & ſi ſit KM radius, ME eſt ſinus illius æquationis.

Ut ergo determinetur ME, obſervandum angulum MHE eſſe æqualem

an-

angulo N O Q, cum ſit N O parallela M H & Q O parallela E H per conſtructionem, ſumpto verò M H pro radio erit M E tangens ejus anguli M H E quæ in exiguo angulo pro Arcu ipſo ſumi poteſt, ideoque Radius O N ſive O B erit ad arcum N Q ut M H ad lineam M E; Dicatur autem angulus anomaliæ mediæ *T* erit (per conſtruct.) H O M ejus complementum ad duos Rectos, fiatque ut Radius (qui in toto hoc calculo ſumitur æqualis O B) ad Coſ. *T* ſic O H ad M H $= \frac{OH \times Coſ.\,T}{OB}$; Præterea arcus NQ=SF, & eſt OQ (ſive OB) ad QR ut eſt OS (ſive OH) ad SF ideoque SF ſive $NQ = \frac{OH \times QR}{OB}$ unde proportio ſuperius inventa OB : NQ = MH : ME in hanc vertitur $OB : \frac{OH \times QR}{OB} = \frac{OH \times Coſ.\,T}{OB} : ME = \frac{OH^2 \times QR \times Coſ.\,T}{OB^3}$ ſive quia (per nat. Ellipſ.) $OH^2 = OB^2 - OD^2 = OB + OD \times OB - OD$ (per 6. 2. Elem.) eſt $ME = \frac{OB + OD \times OB - OD \times QR \times Coſ.\,T}{OB^3}$.

Radius verò K M hac ratione determinatur: Ducatur ex P linea P p, perpendicularis in T Q ac proinde parallela lineæ M E, ejus portio terminata in linea E K eſt quidem ita proximè æqualis ipſi P p, ut P p pro illa ſumi poſſit, eſt verò ob parallelas M E : P p = K M : K P.

Facile autem determinatur ratio M E ad P p, nam angulus T Q R eſt complementum anomaliæ mediæ Q t R, unde eſt, Radius O B, ad Coſ. *T* ſicut Q P ad P p $= \frac{Coſ.\,T}{OB} \times QP$, eſt autem QP differentia inter Q R & P R, eſt verò Q R ad P R ut ſemiaxis major O B ad minorem O D, eſt ergo $PR = \frac{OD \times QR}{OB}$ & $QP = QR - \frac{OD \times QR}{OB} = \frac{QR}{OB} \times OB - OD$, itaque $Pp = \frac{Coſ.\,T \times QR}{OB^2} \times OB - OD$, ideoque M E ad P p ſicut $\frac{OB + OD \times OB - OD \times QR \times Coſ.\,T}{OB^3}$ ad $\frac{OB - OD \times QR \times Coſ.\,T}{OB^2}$ utroque autem termino multiplicato per $\frac{OB^3}{OB - OD \times QR \times Coſ.\,T}$ ſupereſt ratio O B + O D ad O B, æqualis rationi M E ad P p ſive K M ad K P, unde convertendo eſt OD : OB + OD = KM − KP (MP) : KM; ſive quia O B + O D eſt ferè 2 O B, eſt OD : 2OB = MP : K M.

Erit autem M P proximè æqualis lineæ T p, hæc verò lineæ Q t, cum enim parva ſit excentricitas, Q p compenſat ferè partem neglectam T t, eſt verò Q t parallela N O, ideoque eſt Q t R æqualis anomaliæ mediæ, ergo eſt ſinus anomaliæ mediæ ad radium ut Q R ad Q t, ſive ſin. $T : OB = QR : Qt = \frac{OB \times QR}{ſin.\,T} = MP$ unde cum ſit O D ad 2 O B ſicut M P ſive $\frac{OB \times QR}{ſin\,T}$ ad K M erit $KM = \frac{2OB^2 \times QR}{OD \times ſin\,T}$, ſed inventa erat $ME = \frac{OB + OD \times OB - OD \times QR \times Coſ.\,T}{OB^3}$ multiplica ergo valores K M & M E per $\frac{2\,ſin\,T \times OD}{QR}$ eritque K M ad M E ſive radius ad ſinum anguli K ut $4OB^2$ (ſive AB^2) ad $\frac{2OD \times OB + OD \times OB - OD \times ſin\,T \times Coſ.\,T}{OB^3}$

& cum ſit ſemi latus rectum $\frac{1}{2}L = \frac{OD^2}{OB}$, erit $OD - \frac{1}{2}L = OD - \frac{OD^2}{OB} = \frac{OD}{OB} \times OB - OD$, vocetur *D* ea differentia ſemiaxis minoris & ſemilateris recti, & ſubſtituto *D* loco $\frac{OD}{OB} \times OB - OD$ erit Radius ad ſinum anguli K ut AB^2 ad $D \times OB + OD \times \frac{2Coſ.\,T \times ſin.\,T}{OB^2}$.

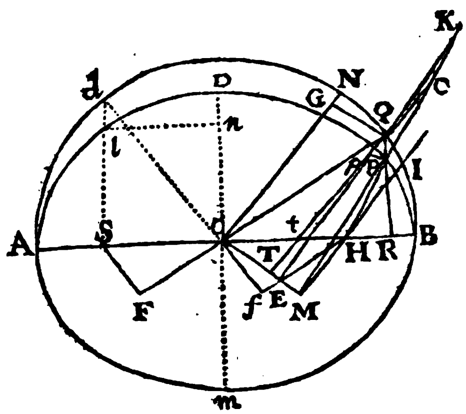
387. Ergo in quovis gradu anomaliæ mediæ erit, eſt ſemper Radius ad AB^2 ut ſinus Anguli K, ad $D \times \frac{OB + OD}{OB} \times \frac{2\,Coſ.\,T \times ſin.\,T}{OB}$ cum verò ratio Radii ad AB^2 ſit conſtans, hæc altera etiam erit conſtans, ideoque in omni caſu ſinus Anguli K ubi anomalia media eſt *T*, erit ad ejus ſinum ubi anomalia media erit *t*, ut D×OB+OD

 × 2 Coſ.

DE MOTU CORPORUM.

$\times \frac{-2\,\text{Coſ.}T\,\text{ſin.}T}{OB^2}$ ad $D \times OB + OD \times \frac{2\,\text{Coſ.}\,t \times \text{ſin.}\,t}{OB^2}$ ſive multiplicando utramque terminum per conſtantes $\frac{OB}{D \times OB + OD}$ ut $\frac{2\,\text{Coſ.}\,T \times \text{ſin.}\,T}{OB}$ ad $\frac{2\,\text{Coſ.}\,t\ \text{ſin.}\,t}{OB}$ ſed conſtat ex Trigonometricis, quod duplum facti ſinus anguli dati cujuſvis per ejus Coſinum, diviſum per radium, eſt æquale ſinui Anguli qui eſt duplus ejus anguli dati, ergo ſinus angulorum K in diverſis anomaliæ mediæ gradibus ſunt inter ſe ut ſinus dupli anguli anomaliæ. Unde ſequitur, quod cum duplum anomaliæ mediæ 45. graduum ſit 90. ejuſque ſinus ſit æqualis Radio ſeu ſinui totali, angulus K erit maximus in 45° gradu, ſive eſt illic anomaliæ mediæ æquatio prima maxima, & ſi ea data ſit, invenientur in aliis gradibus æquationes adhibendæ, dicendo ut Radius ad ſinum dupli anomaliæ mediæ ita ſinus æquationis maximæ primæ ad ſinum æquationis quæſitæ, ſive (quia hic de minimis angulis agitur qui ſunt inter ſe ut ſui ſinus) ita ipſa æquatio maxima ad æquationem quæſitam: Invenietur autem facile maxima illa æquatio, cum enim ſit Radius ad AB^2 ut ſinus K ad $D \times \frac{OB + OD}{OB} \times \frac{\text{ſin}\ 2T}{}$ ſi T ſit 45°, ſin. $2T$ eſt ipſe Radius OB; Eſt ergo Radius ad AB^2 ut ſinus K ad $D \times \frac{OB + OD}{OB} \times OB$ ſive, ut ſtatuit Newtonus, eſt Radius ad ſinum æquationis primæ maximæ ut AB^2 ad $D \times OB + OD$. Quod erat 1°. Dem.

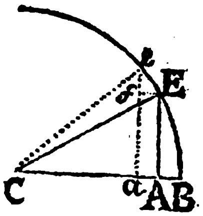
388. Secunda æquatio TQE continetur lineis ductis à puncto Q circuli BQNA ad puncta T & E lineæ OM quæ perpendiculariter in ON lineam motus medii ducitur, eſt vero OT æqualis ſinui arcus QN = SF = Of, & ſi ex f ducatur ad focum linea fH, interſectio ejus lineæ fH (productæ ſi neceſſe ſit) cum linea OM dat alterum punctum E. In hâc ergo æquationis parte eſt QE radius, TE ſinus, eorumque ratio eſt inveſtiganda, eſt verò QE paulo major quam QT & QT eſt æqualis OG, quâ paulò major eſt ON ſive OB unde QE pro OB commodè aſſumi poteſt, quamvis eâ ſit paulo minor; Ut autem valor lineæ TE aſſignetur, notandum eſt quod cum ſit OM in ON perpendicularis, & Of in OQ, eſt angulus fOM æqualis angulo NOQ.



Cognoſcetur ergo arcus menſurans angulum fOM ſive fOE, aſſumpto Of pro radio, dicendo radius ON ſive OB ad arcum NQ ut Of (ſive NQ) ad arcum menſurantem angulum fOE qui ideo erit $\frac{NQ^2}{OB}$, ſecans illius arcus eſt OE, cum verò TO ſit ſinus arcus NQ (æqualis Of) feratur longitudo Of ſecundum lineam OM, cadet tantùm ultra T quantum arcus NQ ſuum ſinum excedit, & tantùm citra E quantùm radius ille Of à ſecante anguli cujus arcus eſt $\frac{NQ^2}{OB}$ deficit: Dato ergo arcu NQ, inveniatur ejus exceſſus ſuper ejus ſinum, & dato arcu $\frac{NQ^2}{OB}$ inveniatur exceſſus ejus ſecantis ſuper radium NQ ſive Of & inventis his duobus habebitur linea TE quæſita.

Lemma I. *Dato Arcu invenire ejus ſinum.* Sit radius CB, r, ſinus quæſitus EA, x, ejus Coſinus CA, $\sqrt{rr - xx}$, Arcus datus BE, v, ejus fluxio Ee ſit dv.

Ducto radio CB, & radio proximo Ce & ſinu arcus Be, ductoque ex E in F perpendiculo, erit ef fluxio ſinus quæſiti ſive dx. Triangula verò ECA, efE, pro ſimilibus ſunt habenda, nam angulus fEA eſt rectus



rectus ut & angulus CEe quia circulus eſt perpendicularis in radium, & dempto communi CEf remanent CEA & fEe æquales, & ob rectos in f & A, angulus tertius feE æqualis erit tertio ECA unde habetur hæc proportio, CA ad CE ut eF ad eE, ſive $\sqrt{rr-xx}:r=dx:dv$ unde eſt $dv = \frac{rdx}{\sqrt{rr-xx}}$ & $dv^2=\frac{rrdx^2}{rr-xx}$ ſive $rr-xx=\frac{rrdx^2}{dv^2}$.

Jam verò ſupponatur valorem x hac ſerie exprimi, $x = Av + Bv^3 + Cv^5$ &c. erit $dx = Adv + 3Bv^2dv + 5Cv^4dv$ &c. & $dx^2 = A^2dv^2 + 6ABv^2dv^2 + 9BBv^4dv^2 + 10ACv^4dv^2$ &c. & $xx = A^2v^2 + 2ABv^4 + BBv^6 + 2ACv^6$ &c. unde $rr - xx = rr - A^2v^2 - 2ABv^4$ &c. & $\frac{rrdx^2}{dv^2} = rrA^2 + 6rrABv^2 + 9rrBBv^4 + 10ACv^4$ &c. undè hæ duæ ſeries æquales ſunt, & terminorum A, B, C &c. valor ex comparatione terminorum correſpondentium harum ſerierum eruitur, erit ergo

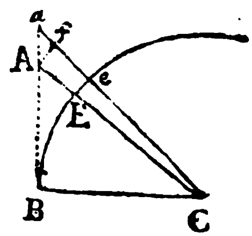
$- rr - A^2v^2 - 2ABv^4$ &c. $= rrAA + 6rrABv^2 + 9rrBBv^4 + 10rrACv^4$ &c.

undè erit $rr = rrAA$, idoque $A = 1$.

$-A^2v^2 = 6rrABv^2$, undè $-1 = 6rrB$ & $B = \frac{-1}{6rr}$

$-2ABv^4 = 9rrBBv^4 + 10rrACv^4$, ſive ſubſtitutione facta & terminis per v^4 diviſis $+\frac{2}{6rr} = \frac{9}{36rr} + 10rrAC$, ſive $10rrAC = \frac{3}{36rr}$

& $C = \frac{3}{10\times 36r^4} = \frac{1}{2\times 3\times 4\times 5r^4}$, &c. undè ſeries $Av + Bv^3 + Cv^5$ &c. $= x$, ad hanc redit $x = v - \frac{v^3}{2\times 3r^2} + \frac{v^5}{2\times 3\times 4\times 5r^4}$ &c. quæ ſeries facile continuatur, & arcu exiſtente parvo citiſſimè convergit.



Lemma II. *Dato arcu invenire ſecantem.* Sit ut prius radius CB, r, ſecans quæſita CA, y, Tangens BA $\sqrt{yy-rr}$, Arcus datus BE, v, ejus fluxio Ee, dv. Ducatur ex centro ſecans Ca, proxima propoſitæ, & radio CA centro C, deſcribatur arcus Af erit fA fluxio ſecantis quæſitæ ſive dy, erunt autem arcus Ee & Af ut eorum radii CE, CA ideoque eſt $r:y = dv:Af = \frac{ydv}{r}$; præterea Triangula ACB, aAf, ſunt ſimilia, nam ob angulum rectum fAC angulus fAa eſt complementum anguli CAB ſive eſt æqualis angulo ACB, anguli verò B & f ſunt ambo æquales ut pote recti, eſt ergo CB : BA = Af : fa, ſive $r:\sqrt{yy-rr} = \frac{ydv}{r}:dy$ & quadrando, $rr:yy-rr = \frac{yydv^2}{rr}:dy^2$ ſive $r^4\frac{dy^2}{dv^2} = y^4 - rry^2$, Fingatur ergo eſſe $y = A + Bv^2 + Cv^4 + Dv^6$ &c.

eſt $dy = 2Bvdv + 4Cv^3dv + 6Dv^5dv$ &c.

& $dy^2 = 4B^2v^2dv^2 + 16BCv^4dv^2 + 16C^6v^6dv^2 + 24DBv^6dv^2$ &c.

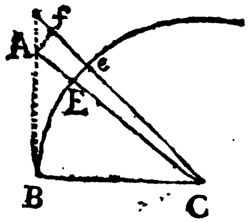
& $y^2 = A^2 + 2ABv^2 + 2ACv^4 + BBv^4$ &c.

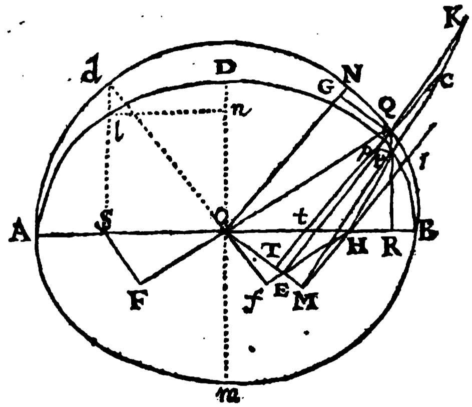
& $y^4 = A^4 + 4A^3Bv^2 + 6A^2B^2v^4 + 4A^3Cv^4$ &c.

eſt ergo $\frac{r^4dy^2}{dv^2} = 4r^4B^2v^2 + 16r^4BCv^4 + 16r^4C^6v^6 + 24r^4DBv^4$ &c.

& $y^4 - rry^2 = A^4 + 4A^3Bv^2 + 6A^2B^2v^4 - r^2A^2 - 2r^2ABv^2 + 4A^3Cv^4 - 2r^2ACv^4 - r^2B^2v^4$ &c.

DE MOTU CORPORUM.





Unde collatis terminis correſpondentibus harum ſerierum eſt $A^4 - r^2 A^2 = 0$, ideoque $A^2 = r^2$, & $A = r$; eſt $4r^4B^2v^2 = 4A^3Bv^2 - 2r^2ABv^2$, ſive diviſis omnibus terminis per Bv^2 & poſito r loco A; $4r^4B = 4r^3 - 2r^3$

ideoque eſt $B = \frac{1}{2r}$,

eſt $16r^4BCv^4 = 6A^2B^2v^4 + 4A^3Cv^4 - 2r^2ACv^4 - r^2BBv^4$, quæ diviſa per v^4 ſubſtitutiſque valoribus A & B dant

$8r^3C = \frac{6}{4} + 4r^3C - 2r^3C - \frac{1}{4}$ unde eſt

$6r^3C = \frac{5}{4}$ & $C = \frac{5}{2\times 3\times 4r^3}$ &c.

Series ergo ad ſecantis valorem exprimendum $A + Bv^2 + Cv^3$ &c. in hanc vertitur $r + \frac{v^2}{2r} + \frac{5v^3}{2\times 3\times 4r^3}$ &c. Quæ ſatis prompte convergit ſi modo arcus v ſit exiguus, ut iſto in caſu.

His poſitis, invenientur commodè partes lineæ TE, ſive ſinus ſecundæ æquationis, ea enim conſtat ex differentia inter arcum NQ & ejus ſinum (dato radio OB) & ex differentia inter eum ipſum arcum NQ ſumptum ut radium in angulo fOE & illius anguli ſecantem.

Primum ergo differentia inter arcum NQ & ejus ſinum, ex primâ ſerie invenitur, ſit enim $v = NQ$ & $r = OB$, ſinus arcus NQ per eam ſeriem invenitur $NQ - \frac{NQ^3}{2\times 3 OB^2}$ &c. & omiſſis reliquis terminis ſeriei, hic admodum exiguis, liquet differentiam inter arcum NQ & ejus ſinum eſſe terminum $\frac{NQ^3}{2\times 3 OB^2}$ qui erat in eâ ſerie ex arcu NQ tollendus ut obtineretur ſinus.

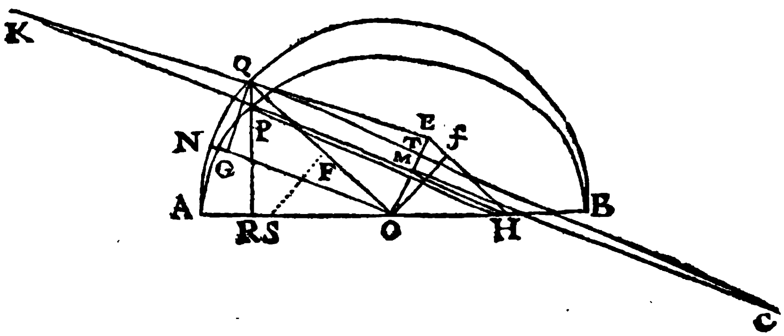
Secundo, ut differentia inter radium & ſecantem anguli fOE obtineatur, loco radii r in ſerie ſuperius inventâ valor radii Of ſive NQ eſt ſubſtituendus, & loco arcus v, valor arcus qui menſurat eum angulum & qui inventus fuit $= \frac{NQ^2}{OB}$, ergo ſeries quæ ſecantem exprimit in hanc abit $NQ + \frac{NQ^4}{2 OB^2 \times NQ}$ &c. reliquis terminis ut pote minimis omiſſis, exceſſus ſecantis ſuper radium eſt $\frac{NQ^3}{2 OB^2}$, qui junctus cum exceſſu arcus ſuper ſinum ſuperius invento $\frac{NQ^3}{2\times 3 OB^2}$ efficit ſummam $\frac{4 NQ^3}{2\times 3 OB^2}$ ſive $\frac{2 NQ^3}{3 OB^2}$ pro valore ſinus æquationis ſecundæ; ſed eſt (369) ut Radius OB ad QR ita SH ſive OH ad SF ſive NQ, ergo $NQ = \frac{OH}{OB} \times QR$ & $\frac{2NQ^3}{3OB^2} = TE = \frac{2OH^3}{3OB^5} \times QR^3$, Itaque cum in hâc ſecundâ æquatione radius QE ſit in omni anomaliæ gradu idem aut prope idem, & anguli ſint minimi erunt inter ſe quam proximè ut eorum ſinus

TE

TE, cumque in valore TE quantitas $\frac{2OH^3}{3OB^5}$ ſit conſtans, ſinus illi ſunt inter ut QR^3, ſed QR eſt ſinus anomaliæ excentri, & in eâdem prope ſunt ratione ſinus anomaliæ mediæ, hinc iſtæ æquationes ſecundæ in variis anomaliæ mediæ gradibus adhibendæ, ſunt inter ſe ut cubi ſinuum anomaliæ mediæ. Si itaque ſumatur anomalia media 90. graduum ejus ſinus eſt ipſe Radius, eritque illic maxima æquatio, quæ erit ad aliam quamvis, ut cubus Radii ad cubum ſinus anomaliæ mediæ ipſi convenientis ut ſtatuit Newtonus.

Ut verò determinetur hæc æquatio ubi eſt maxima, notandum quod ſi in foco S erigatur uſque ad Ellipſim ordinata SI ea erit æqualis ſemi lateri recto, & ſi ducatur, In ordinata in minorem axem erit $In =$ OS ſive OH, & Dn erit differentia ſemi lateris recti & minoris axis quam Newtonus vocat *D*, & ex natura Ellipſeos erit AO^2 ſive $OB^2 : In^2 (OH^2) = OD^2 : Dn \times nm$ (ſive $D \times nm$) ſed nm eſt ferè axi minori 2OD æqualis, ergo erit $OB^2 : OH^2 = OD^2 : D \times 2OD$ & $OH^2 = \frac{2D \times OB^2}{OD}$, quo poſito valor $TE = \frac{2OH^3}{3OB^5} QR^3$ eſt æqualis $\frac{2OH \times 2D}{3OB^3 \times OD} \times QR^3$ vel quia $2OH = SH$ eſt $TE = \frac{2D \times SH}{3OB^3 \times OD} QR^3$.

In nonageſimo verò gradu anomaliæ mediæ linea OM ſive OE in axem OB cadit & QT cui ferè æqualis eſt QE coincidit cum QR, unde QE pro QR ſumi poteſt, & prætereà QR nonnihil excedit lineam Sd ſive axem minorem DO, cum non nihil citra focum cadat, minor tamen eſt radio OB, unde QR^2 pro $OB \times OD$ ſatis accuratè ſumi poteſt, ſicque valor $TE = \frac{2D \times SH}{3OB^3 \times OD} QR^3$ in hanc abit $TE = \frac{2D \times SH}{3OB^2} QE$, ſed Radius eſt ad ſinum æquationis maximæ ſecundæ ut QE ad TE (ſive $\frac{2D \times SH}{3OB^2} \times QE$) & QE ad $\frac{2D \times SH}{3OB^2} QE$ ſicut $3OB^2$, ad $2D \times SH$, ergo æquatio ſecunda maxima invenietur dicendo ut triplum Quadrati ſemi axis majoris ad duplum Rectangulum ſub umbilicorum diſtantiâ SH & differentia *D* ſemi axis minoris & ſemi Lateris Recti, ita Radius ad ſinum ſecundæ æquationis ubi eſt maxima, & ea data reliquæ invenientur dicendo ut cubus Radii ad cubum ſinus anomaliæ mediæ propoſitæ ita hæc maxima æquatio, ad quæſitam. Q. E. D.

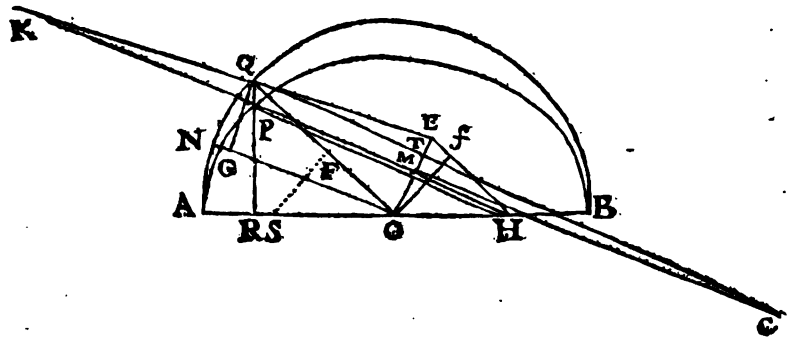


389. Annihilatur prima æquatio in 90. gradu anomaliæ mediæ & in primo, negativa fit in ſecundo quadrante, poſitiva in tertio, negativa iterum in quarto.

Etenim in 90. gradu anomaliæ mediæ OM coincidit cum OH ex conſtructione, ſicque linea fH, non amplius ſecat lineam OM in E, evaneſcit itaque ME ſinus primæ Æquationis.

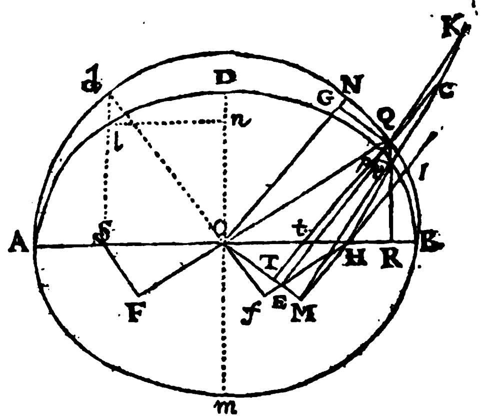
Excedat verò anomalia media 90. fiat-que

DE MOTU CORPORUM.



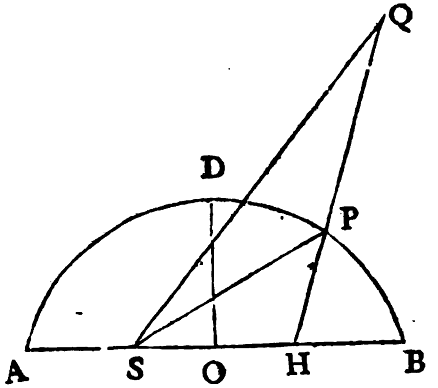
que alia figura ſecundum conſtructionem à nobis indicatam, ſit locus verus Planetæ P, deſcribatur circulus BQNA, in magnum axem BA, ſitque PR perpendicularis à loco Planetæ in axem ducta, quæ producta ſecet circulum BQNA in Q, ducatur QO, in quam ex ſole S, ducatur perpendiculum SF, cui æqualis ſumatur arcus QN, erit NOB anomalia media, ducaturin lineam ON perpendicularis OM quæ terminetur in M per perpendiculum à foco altero H ductum, erit ergo MH parallela ON & MHB æqualis anomaliæ mediæ, ex H ducatur ad Planetam linea HP, erit ergo angulus MHP angulus anomaliæ mediæ addendus ut prodeat motus medius æquatus PHB, fiat etiam ſuper OH Triangulum OfH ſimile & æquale Triangulo SFO, & producatur Hf donec ſecet in E lineam OM productam; Ducatur ex Q ad T linea QT, parallela lineæ NO ideoque etiam parallela lineæ MH, & erit OT æqualis QG ſinui arcus QN. Ducatur etiam linea PM quæ producta ſecabit in C lineam QT productam & angulus C erit æqualis angulo HMC, qui erit æqualis angulis MHP & MPH (per 32. 1mi. Elem.) ſed ob exiguitatem lineæ MH reſpectu MP, omittitur angulus MPH, & angulus HMC, ſive angulus C, pro angulo MHP æquatione motus medii aſſumitur; Denique ex E per Q ducatur linea EQK quæ lineam PMC ſecabit in K erit angulus EQT æqualis angulis K & C: (per 32. I. Elem.) ergo ſi ex angulo EQT ſubtrahatur angulus K remanebit angulus C, ſive æquatio quæſita, eſt vero angulus EQT ſecunda æquatio & angulus K ſive EKM prima, ut liquet ex conſtructione, ergo in ſecundo quadrante prima æquationis pars ſubſtrahi debet ſive negative ſumi, ſecunda verò poſitiva remanet.

In tertio quadrante hæc eadem figura deorſum convertatur ſub axe AB, liquebitque angulum MHB ſeu Anomaliam mediam, quæ hic 180° gradus ſuperat, angulo MHP ſive angulo C eſſe minuendam ut habeatur anomalia æquata PHB, ideoque cum ſit C=EQT−K ſecunda æquatio EQT ſubſtractivè ſumi debebit, & prima K additivè.



In ultimo denique quadrante invertatur figura prima, liquebit ex anomaliâ mediâ IHB, ſeu HMP, detrahendum eſſe angulum IHP, ſeu HMP, ſive angulum C ipſi æqualem, ut prodeat motus medius æquatus ſed angulus C eſt ſumma utriuſque partis æquationis, nempe anguli K, & an-

guli



guli K Q C ſive T Q E, ergo in ultimo quadrante utraque æquatio negativè aſſumitur.

390. Exemplum ſit in orbe Martis A D B, qui omnium, ſi orbem Mercurii excipias, eſt maximè excentricus. Excentricitas SO, ſit partium 141. & ſemiaxis major = 1523. 69. erit ſemiaxis minor O D = 1516. 93. ſemilatus rectum ſeu $\frac{1}{2}$ L = 1510. 184. differentia inter ſemiaxem minorem & ſemilatus rectum $\frac{1}{2}$ L, = 6. 746. = *D*. Differentia inter logarithmum radii & logarithmum quadrati axis A B, per tabulas.

erit = 3. 0321367. 62.
Log. A O + O D = 3. 3097621. 36.
Log. *D* = 0. 7580391. 75.
Summa = 7. 0999380. 73.

æqualis logarithmo ſinûs anguli *Y*, per primam proportionem Newtoni, atque hinc in tabulis invenietur angulus *Y*, minutorum primorum 4′, ſecundorum 21. 14″.

Differentia inter logarithmum radii & Logarithmum facti 3 A O².

erit = 3. 1570755. 62.
Log. facti 2 S H × *D* = 3. 5093282. 75.
Summa = 6. 6664038. 37.

æqualis logarithmo ſinûs anguli *Z*, qui per tabulas invenitur eſſe minutorum ſecundorum 100. 39″. Inventis jam æquationibus maximis *Y* + *Z*, anguli *V*, & *X*, pro quolibet anomaliæ mediæ gradu facilè reperiuntur v. gr. pro 45°.

Eſt enim Log. anguli *Z* = 2. 0016853. 46.
Log. cubi ſinûs 45°. = 29. 5484550.
horum ſumma = 31. 5501403. 46.

Ex hâc ſumma detrahe logarithmum cubi radii 30. 0000000; reſiduum 1. 5501403. 46. erit logarithmus ſinûs anguli X, qui per tabulas invenietur eſſe minutorum ſecundorum 35. 41″. Quarè cum in 45°. anomaliæ gradu angulus *V*, æqualis ſit angulo *Y*, erit motus medius æquatus, ſeu angulus P H B, = 45°, 4′, 56. 55″.

Jam verò ut inveniatur anomalia vera, ſeu angulus P S B, dato angulo P H B, producatur H P ad Q ut ſit P Q = S P, & erit H Q = A B, ex natura ellipſeos, atque angulus P H B, æqualis ſummæ angulorum Q S H, S Q H; Quarè ſemiſumma laterum S H, H Q, eſt ad eorum ſemi differentiam, hoc eſt, A O + S O, ad A O − S O, ut tangens dimidii anguli P H B, ad tangentem ſemidifferentiæ angulorum Q S H, S Q H.

Log. tang. $\frac{1}{2}$ P H B = 9. 6181066. 717.
Log. A O − S O = 3. 1407247. 98.
horum ſumma = 12. 7588314. 698.
Log. A O + S O = 3. 2212068. 41.
Differentia = 9. 5376246. 246.

= Log. tang. Ang. $\frac{1}{2}$ Q S H − $\frac{1}{2}$ S Q H.

Undè invenietur $\frac{1}{2}$ Q S H − $\frac{1}{2}$ S Q H = 19°. 1′, 35. 5″; & hinc anomalia vera = Q S H − S Q H (ſive − Q S P) = [illegible]°. 3′ 11″, quam proximè; Nam ſi ex datâ hâc anomaliâ verâ, quæratur (371) anomalia media, invenietur eſſe 45°. graduum quam proximè.

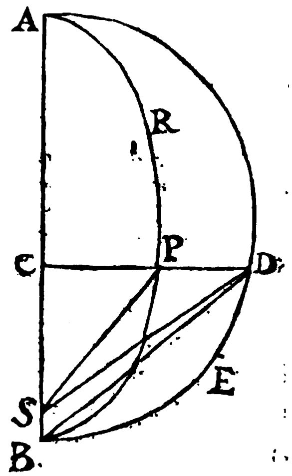
DE MOTU CORPORUM.

SECTIO VII.

De corporum aſcenſu & deſcenſu rectilineo.

PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XXIV.

Poſito quòdvis centripeta ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ locorum à centro, ſpatia definire quæ corpus rectà cadendo datis temporibus deſcribit.

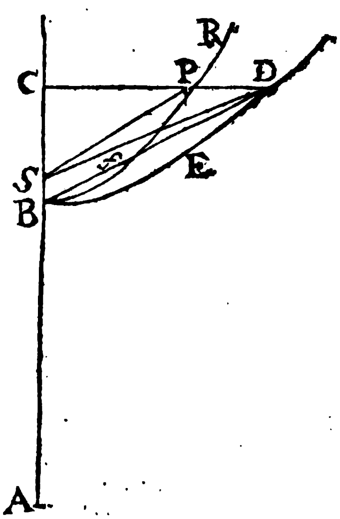


Caſ. 1. Si corpus non cadit perpendiculariter, deſcribet id (per corol. 1. prop. XIII.) ſectionem aliquam conicam cujus umbilicus congruit cum centro virium. Sit ſectio illa conica *ARPB* & umbilicus ejus *S*. Et primo ſi figura ellipſis eſt; ſuper hujus axe majore *AB* deſcribatur ſemicirculus *ADB*, & per corpus decidens tranſeat recta *DPC* perpendicularis ad axem; actiſque *DS*, *PS* erit area *ASD* areæ *ASP*, atque ideo etiam tempori proportionalis. Manente axe *AB* minuatur perpetuo latitudo ellipſeos, & ſemper manebit area *ASD* tempori proportionalis. (e) Minuatur latitu-

(e) 391. Lemma. Si ſectionis conicæ latus rectum ad axem tranſverſum pertinens perpetuò minuatur, & tandem evaneſcat, manente ſectionis axe tranſverſo, omnes ad axem ordinatæ perpetuò minuuntur & tandem evaneſcunt, ac perimeter ſectionis cum axe & umbilici cum axis verticibus coincidunt. Eſt enim, (ex conic.) ordinatæ cujuſvis quadratum ad rectangulum abſciſſarum in ratione datâ lateris recti ad axem tranſverſum; quarè ſi manente axe tranſverſo, adeóq. & abſciſſarum rectangulo, latus rectum perpetuò minuatur ac tandem evaneſcat, ordinatæ quadratum adeóque & ordinata ipſa perpetuò minuitur & tandem evaneſcit, & perimeter ſectionis conicæ cum axe coincidit. Porrò ordinata per umbilicum æqualis eſt dimidio lateri recto (Vid. ſup. in Conicis, Theor. III. de Hyperbola & de Ellipſi & Cor. I. Theor. I. de Parab.) adeóque quadratum dimidii lateris recti eſt ad rectangulum ex diſtantiis umbilici à verticibus, ut latus rectum ad axem tranſverſum, undè rèctangulum ſub quartâ parte lateris recti & axe tranſverſo æquatur rectangulo ex diſtantiis umbilici à verticibus; quarè evaneſcente latere recto & manente axe tranſverſo, rectangulum ſub diſtantiis umbilici à verticibus nullum fit, & umbilicus cum proximo vertice coincidit.

latitudo illa in infinitum: & orbe *APB* jam coincidente cum axe *AB* & umbilico *S* cum axis termino *B*, deſcendet corpus in rectâ *A C*, & area *A B D* evadet tempori proportionalis. Dabitur itaque ſpatium *AC*, quod corpus de loco *A* perpendiculariter cadendo tempore dato deſcribit, ſi modo tempori proportionalis capiatur area *ABD*, & à puncto *D* ad rectam *AB* demittatur perpendicularis *DC* (f). *Q. E. I.*

Caſ. 2. Si figura illa *RPB* hyperbola eſt, deſcribatur ad eandem diametrum principalem *AB* hyperbola rectangula *BED*: & (g) quoniam areæ *CSP*, *CBfP*, *SPfB* ſunt ad areas *CSD*, *CBED*, *SDEB*, ſingulæ ad ſingulas, in datâ ratione altitudinum *CP*, *CD*; & area *SPfB* proportionalis eſt tempori quo corpus *P* movebitur per arcum *PfB*; erit etiam area *SDEB* eidem tempori proportionalis. Minuatur latus rectum hyperbolæ *RPB* in infinitum manente latere tranſverſo, & coibit arcus *PB* cum rectâ *CB* & umbilicus *S* cum vertice *B* & recta *SD* cum rectâ *BD*. Proinde area *BDEB* proportionalis erit tempori quo corpus *C* recto deſcenſu deſcribit lineam *CB*. *Q. E. I.*



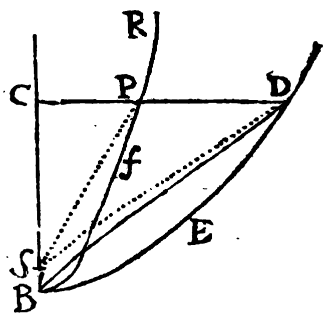
Caſ.

(f) 392. ***Perpendicularis*** *DC*. Quoniam area ABD, ſemper proportionalis eſt tempori quo corpus ex puncto A per rectam AC cadit, erit totius ſemicirculi area ADEB, proportionalis tempori quo corpus idem cadendo percurrit lineam AB, & diviſim area ſegmenti BDEB, proportionalis tempori quo corpus ex A, cadendo percurrit lineam CB.

(g) 393. ***Quoniam areæ.*** Nam 1°. triangula CSP, CSD quorum eſt baſis communis CS, ſunt ut altitudines CP, CD. 2°. areæ hyperbolicæ CBfP, CBED ſunt ut eædem altitudines CP, CD (374) unde 3°. diviſim CBfP − CSP ad CBED − CSD, hoc eſt, ſector SPfB ad ſectorem SDEB ut CP ad CD.

De Motu Corporum.

Caſ. 3. (h) Et ſimili argumento ſi figura *RPB* parabola eſt, & eodem vertice principali *B* deſcribatur alia parabola *BED*, quæ ſemper maneat data, interea dum parabola prior, in cujus perimetro corpus *P* movetur, diminuto & in nihilum redacto ejus latere recto, conveniat cum lineâ *CB*; fiet ſegmentum parabolicum *BDEB* proportionale tempori quo corpus illud *P* vel *C* deſcendet ad centrum *S* vel *B*. *Q. E. I.*



PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA IX.

Poſitis jam inventis, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C *eſt ad velocitatem corporis centro* B *intervallo* BC *circulum deſcribentis, in ſubduplicatâ ratione quam* AC *diſtantia corporis à circuli vel hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore* A, *habet ad figuræ ſemidiametrum principalem* $\frac{1}{2}$ AB.

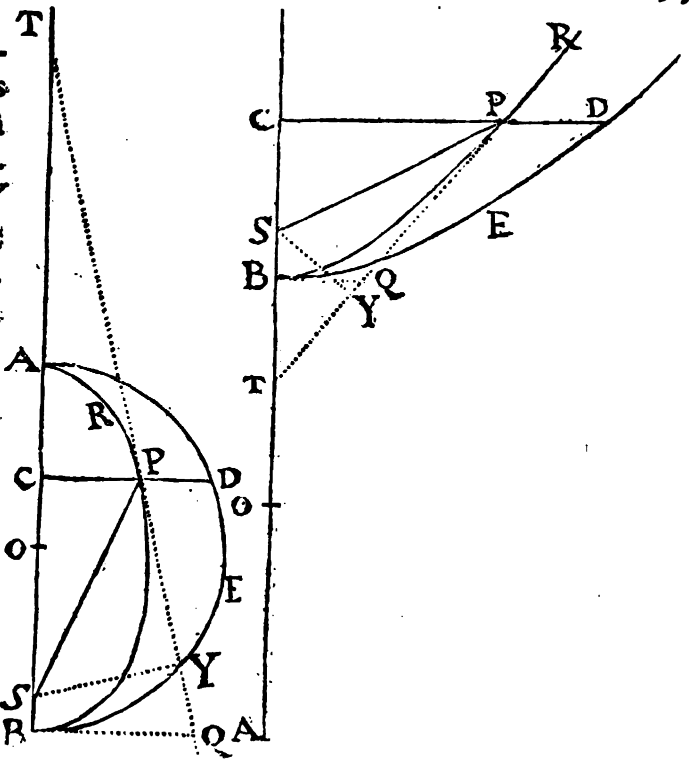
Biſecetur *AB*, communis utriuſque figuræ *RPB*, *DEB* diameter, in *O*; & agatur recta *PT*, quæ tangat figuram *RPB* in *P*, atque etiam ſecet communem illam diametrum *AB* (ſi opus eſt productam) in *T*; ſitque *SY* ad hanc rectam, & *BQ* ad hanc diametrum perpendicularis, atque figuræ *RPB* latus rectum ponatur L. Conſtat per corol. IX. prop. XVI. quod corporis in lineâ *RPB* circa centrum *S* moventis velocitas in loco quovis *P* ſit ad velocitatem corporis intervallo *SP* circa idem

(h) 394. *Simili argumento.* In Parabolâ 1°. CSP : CSD = CP : CD. 2°. ſit latus rectum Parabolæ BfP = l, latus rectum Parabolæ BED = L, erit, ex naturâ Parabolæ $CP^2 = l \times CB$ & $CD^2 = L \times CB$, adeóque $CP : CD = \sqrt{l} : \sqrt{L}$, hoc eſt, in ratione datâ, ergò area CBEP eſt ad aream CBED, in eâdem ratione datâ CP ad CD; Quarè 3°. diviſim SPfB : SDEB = CP : CD. Cætera ſe habent ut in demonſtratione casûs ſecundi.

395. Scholium. Corporis per rectam CS, ad centrum S, cadentis velocitas in loco quovis C, eſt ad velocitatem corporis alterius ad eandem à centro diſtantiam circulum deſcribentis, vel in ratione minore quam $\sqrt{2}$, ad 1, vel in ratione majore aut in eâ ipsâ ratione. In 1°. caſu recta SC, uſurpanda eſt pro ellipſi latitudinis evaneſcentis; in 2°. caſu, recta SC, eſt hyperbola cujus latus rectum evaneſcit; in 3°. caſu, recta SC, eſt parabola lateris recti evaneſcentis. Hæc omnia patent ex coroll. 7°. Prop. XVI.

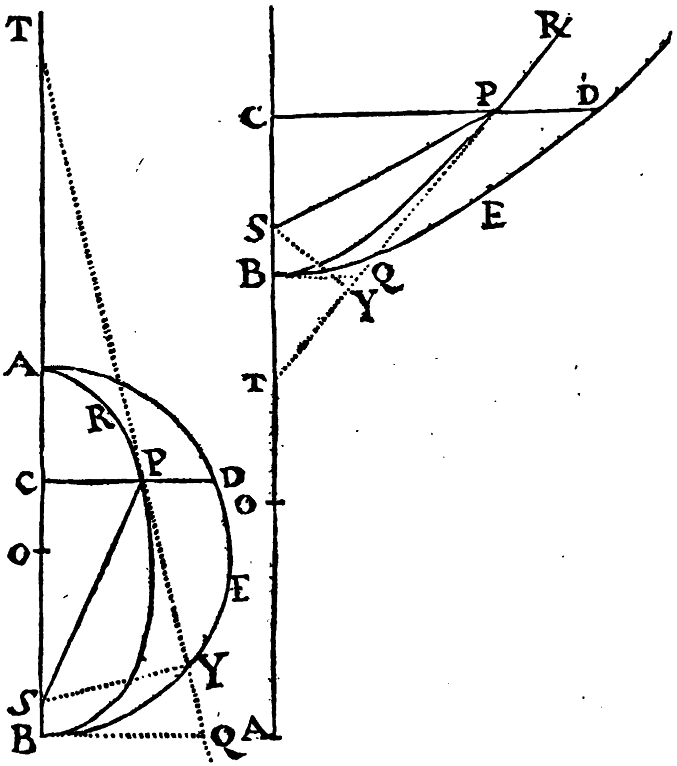
396.

centrum circuitum deſcribentis in ſubduplicatâ ratione rectanguli $\frac{1}{2}L \times SP$ ad SY quadratum. Eſt autem ex conicis ACB ad CPq ut $2AO$ ad L, ideoque $\frac{2CPq \times AO}{ACB}$ æquale L. Ergo velocitates illæ ſunt ad invicem in ſubduplicatâ ratione $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ ad $SY quad.$ (i) Porro ex conicis eſt CO ad BO ut BO ad TO, & compoſitè vel diviſim ut CB ad BT. Unde vel dividendo vel componendo fit $BO -$ vel $+ CO$ ad BO ut CT ad BT, id eſt, AC ad AO ut CP ad BQ; indeque $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ æquale eſt, $\frac{BQq \times AC \times SP.}{AO \times BC}$ Minuatur jam in infinitum figu-



(i) 396. *Porrò ex conicis.* (Vid. Lem. V. de Conicis, Cor. 2.) eſt TO : AO = AO : CO & quia AO = BO, invertendo & permutando eſt CO : BO = BO : TO & in Ellipſi compoſitè CO : BO = CB (ſeu CO + BO) : BT (ſeu BO + TO); & in hyperbolâ diviſim, CO : BO = CB (ſeu CO − BO) : BT (ſeu BO − TO); Quarè in utraque ſectione, CO : BO = CB : BT. Undè in ellipſi dividendo fit AC, ſeu BO − CO, aut AO − CO : BO = CT, ſeu BT − CB : BT, & in hyperbolâ, componendo AC ſeu CO + BO : BO = CT ſeu CB + BT : BT; adeóque in utrâque ſectione AC : BO ſeu AO = CT : BT. Sed propter ſimilitudinem triangulorum TCP, TBQ, CT : BT = CP : BQ, ergò AC : AO = CP : BQ, & $CP = \frac{BQ \times AC}{AO}$, ac $CP^2 = \frac{BQ^2 \times AC^2}{AO^2}$; indèque $\frac{CP^2 \times AO \times SP}{AC \times CB} = \frac{BQ^2 \times AC \times SP}{AO \times CB}$.

ræ *RPB* latitudo *CP*, ſic ut punctum *P* coeat cum puncto *C*, punctumque *S* cum puncto *B*, & linea *SP* cum linea *BC*, lineaque *SY* cum lineâ *BQ*; & corporis jam rectâ deſcendentis in lineâ *CB* velocitas fiet ad velocitatem corporis centro *B* intervallo *BC* circulum deſcribentis; in ſubduplicatâ ratione ipſius $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$ ad *SYq*, hoc eſt (neglectis æqualitatis rationibus *SP* ad *BC* & *BQq* ad *SYq*) in ſubduplicatâ ratione *AC* ad *AO* ſive $\frac{1}{2}$ *AB*. *Q. E. D.*



Corol. 1. Punctis *B* & *S* coeuntibus, fit *TC* ad *TS* ut *AC* ad *AO*.

Corol. 2. (k) Corpus ad datam à centro diſtantiam in circulo quovis revolvens, motu ſuo ſurſum verſo aſcendet ad duplam ſuam à centro diſtantiam.

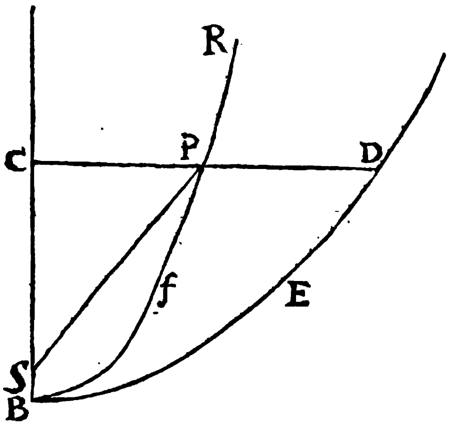
PRO-

(k) 397. *Corpus ad datam.* Si fuerit BED circulus, & punctum C coincidat cum puncto O, erit AC = AO = $\frac{1}{2}$ AB, adeóque velocitas per radium AO cadendo acquiſita eſt æqualis velocitati corporis centro B intervallo BO = AO circulum deſcribentis. Undè ſi corpus illud, ad datam à centro diſtantiam BO in circulo revolvens, ſurſum per OA, projiciatur cum eâ velocitate quâ circulum deſcribit, ſeu quam per AO cadendo acquiſivit, aſcendet ad punctum A, per ſpatium OA (25) ſeu ad duplam ſuam à centro B diſtantiam BA = 2 BO.

398. Coroll. 1. Velocitas in puncto quovis C, eſt ad velocitatem in alio puncto c, in ratione ſubduplicatâ rectanguli AC × BC, ad rectangulum Ac × Bc. Nam velocitas in C, eſt ad velocitatem corporis intervallo BC circulum deſcriben-

PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA X.

Si figura BED *parabola eſt, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis* C *æqualis eſt velocitati quâ corpus centro* B *dimidio intervalli ſui* BC *circulum uniformiter deſcribere poteſt.*



Nam corporis parabolam *RPB* circa centrum *S* deſcribentis velocitas in loco quovis *P* (per corol. VII. prop. XVI.) æqualis eſt velocitati corporis dimidio intervalli *SP* circulum circa idem centrum *S* uniformiter deſcribentis. Minuatur parabolæ latitudo *CP* in infinitum eo, ut arcus parabolicus *PfB* cum rectâ *CB*, centrum *S* cum vertice *B*, & intervallum *SP* cum intervallo *BC* coincidat, & conſtabit propoſitio. *Q. E. D.*

PRO-

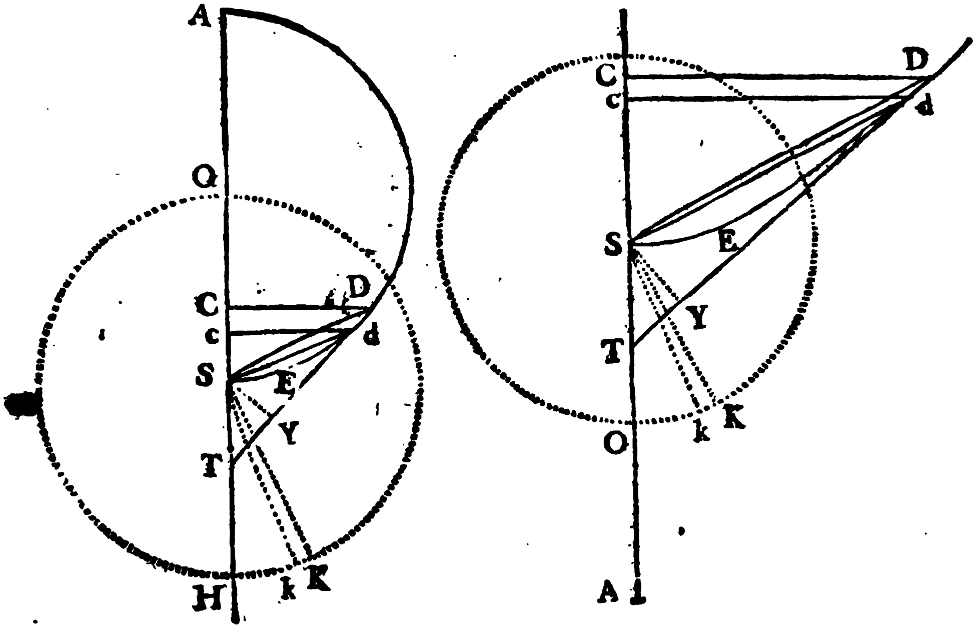


bentis ut $\sqrt{AC}$ ad $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$, (per hancce prop.); Velocitas corporis intervallo BC circulum deſcribentis eſt ad Velocitatem corporis intervallo Bc circulum deſcribentis, (per Cor. 6. Prop. IV.) reciproce in ratione ſubduplicatâ Radiorum, hoc eſt, ut $\sqrt{Bc}$ ad $\sqrt{BC}$; Denique Velocitas Corporis intervallo Bc circulum deſcribentis eſt ad Velocitatem in c corporis ex A cadentis ut $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$ ad $\sqrt{Ac}$ (per hanc propoſitionem); Ergo per compoſitionem rationum) eſt velocitas in C ad velocitatem in c, in ratione compoſitâ ex ratione $\sqrt{AC}$ ad $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$, ratione $\sqrt{Bc}$ ad $\sqrt{BC}$, & ratione $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$ ad $\sqrt{Ac}$, ſive ut $\sqrt{AC} \times \sqrt{Bc}$ ad $\sqrt{Ac} \times \sqrt{BC}$, hoc eſt, in ratione ſubduplicatâ rectanguli $AC \times Bc$ ad rectangulum $Ac \times BC$. Q. E. D.

399. Coroll. 2. Si fuerit BfP Parabola, corporis in ea moti velocitas in loco quovis P, erit ad velocitatem corporis ad diſtantiam SP, circulum deſcribentis in ratione $\sqrt{2}$, ad 1; ſi ſit Ellipſis in minori ratione, in majori verò ſi fuerit hyperbola (per Cor. 7. Prop. 16.) & latitudine orbis imminuta in infinitum ut coincidat BfP cum axe BC, erit corporis cadentis velocitas in loco quovis C ad velocitatem corporis ad diſtantiam BC circulum deſcribentis ut $\sqrt{2}$ ad 1. adeóque $AC : \frac{1}{2}AB = 2 : 1$ in 2°. caſu ratio AC, ad $\frac{1}{2}AB$, minor erit quam ratio 2 ad 1; in 3°. caſu major, & contrà.

PROPOSITIO XXXV. THEOREMA XI.

Iiſdem poſitis, dico quod area figuræ DES, *radio indefinito* SD *deſcripta, æqualis ſit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti figuræ* DES *æquante, circa centrum* S *uniformiter gyrando, eodem tempore deſcribere poteſt.*



Nam concipe corpus *C* quam minimâ temporis particulâ lineolam *Cc* cadendo deſcribere, & interea corpus aliud *K*, uniformiter in circulo *OKk* circa centrum *S* gyrando, arcum *Kk* deſcribere. Erigantur perpendicula *CD*, *cd* occurrentia figuræ *DES* in *D*, *d*. Jungantur *SD*, *Sd*, *SK*, *Sk* & ducatur *Dd* axi *AS* occurrens in *T*, & ad eam demittatur perpendiculum *SY*.

Caſ. 1. Jam ſi figura *DES* circulus eſt vel hyperbola rectangula, biſecetur ejus tranſverſa diameter *AS* in *O*, & erit

SO

SO dimidium lateris recti. (l) Et quoniam eſt *TC* ad *TD* ut *Cc* ad *Dd*, & (m) *TD* ad *TS* ut *CD* ad *SY*, erit ex æquo *TC* ad *TS* ut $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$. Sed (per corol. I. prop. XXXIII.) (n) eſt *TC* ad *TS* ut *AC* ad *AO*, puta ſi in coitu punctorum *D*, *d* capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo *AC* eſt ad *AO* ſeu *SK* ut $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$. Porro corporis deſcendentis velocitas in *C* eſt ad velocitatem corporis circulum intervallo *SC* circa centrum *S* deſcribentis in ſubduplicatâ ratione *AC* ad *AO* vel *SK* (per prop. XXXIII.) Et hæc velocitas ad velocitatem corporis deſcribentis circulum *OKk* in ſubduplicatâ ratione *SK* ad *SC* (per corol. VI. prop. IV.) & ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc eſt lineola *Cc* ad arcum *Kk* in ſubduplicatâ ratione *AC* ad *SC*, (o) id eſt in ratione *AC* ad *CD*. Quare eſt $CD \times Cc$ æquale $AC \times Kk$, & (p) propterea *AC* ad *SK* ut $AC \times Kk$ ad $SY \times Dd$, indeque $SK \times Kk$ æquale $SY \times Dd$, & $\frac{1}{2}\, SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{2}\, SY \times Dd$, id eſt area *KSk* æqualis areæ *SDd*. Singulis igitur temporis particulis generantur arearum duarum particulæ *KSk*, & *SDd*, quæ, ſi magnitudo earum minuatur & numerus augeatur in infinitum, rationem obtinent æqualitatis, & propterea (per corollarium lemmatis IV.) areæ totæ ſimul genitæ ſunt ſemper æquales. *Q. E. D.*

Caſ.

(l) * *Et quoniam eſt TC ad TD ut Cc ad Dd.* Quia in Triangulo TCD, eſt cd parallela baſi CD, ideoque TC : TD ut partes correſpondentes Cc, Dd.

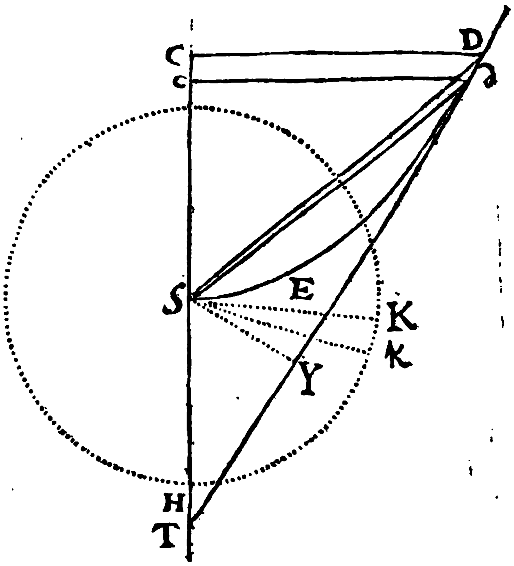
(m) * *Et TD ad TS ut CD ad SY.* Sunt enim propter angulos Y, & C, rectos & angulum T, communem, triangula TCD, TSY, ſimilia.

(n) * *Eſt TC : TS.* Nam punctis D, d, coeuntibus, fit TD, tangens; adeóque (396.) TC : TS = AC : AO.

(o) * *In ratione AC ad SC; id eſt in ratione AC ad CD.* Eſt enim SED, circulus, vel hyperbola æquilatera cujus vertices S & A, ſed in circulo & hyperbolâ æquilaterâ ob axium æqualitatem eſt $CD^2 = AC \times SC$, & proindè $AC : CD = CD : SC$, & hinc AC ad CD, in ratione ſubduplicatâ AC ad SC.

(p) * *Et proptereà.* Nam ex ſuperius demonſtratis $AC : SK = CD \times Cc : SY \times Dd$.

Pp 2 * *Hoc*



Caſ. 2. Quod ſi figura *DES* parabola ſit, invenietur eſſe ut ſupra $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$ ut TC ad TS, hoc (q) eſt ut 2 ad 1, ideoque $\frac{1}{4}\,CD \times Cc$ æquale eſſe $\frac{1}{2}\,SY \times Dd$. Sed corporis cadentis velocitas in C æqualis eſt velocitati quâ circulus intervallo $\frac{1}{2}\,SC$ uniformiter deſcribi poſſit (per prop. xxxiv.) Et hæc velocitas ad velocitatem quâ circulus radio SK deſcribi poſſit, hoc eſt, lineola Cc ad arcum Kk (per corol. vi. prop. iv.) eſt in ſubduplicatâ ratione SK ad $\frac{1}{2}\,SC$, id (r) eſt, in ratione SK ad $\frac{1}{2}\,CD$. Quare eſt $\frac{1}{2}\,SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{4}\,CD \times Cc$, ideoque æquale $\frac{1}{2}\,SY \times Dd$, hoc eſt, area KSk æqualis areæ SDd, ut ſupra. *Q. E. D.*

PRO-

(q) * *Hoc eſt ut* 2 *ad* 1. Cum enim ſit TD tangens, CD ordinata, SC abſciſſa, eſt ex naturâ Parabolæ $TS = SC$, adeóque $TC : TS = 2.\ 1.$

(r) * *Id eſt in ratione* SK, *ad* $\frac{1}{2}$ CD. Nam (ex hyp.) SK, æqualis eſt dimidio lateri recto, quarè ex naturâ parabolæ $2SK \times SC = CD^2$, & $\frac{1}{2}\,SC \times SK = \frac{1}{4}\,CD^2$. Undè $SK : \frac{1}{2}\,CD = \frac{1}{2}\,CD : \frac{1}{2}\,SC$, & hinc SK ad $\frac{1}{2}$ CD in ratione ſubduplicatâ SK ad $\frac{1}{2}$ SC.

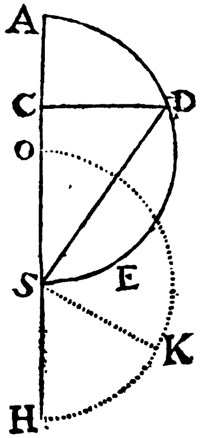
400. Coroll. 1. Si fuerit SED circulus cujus diameter SA, corpus ex loco A demiſſum & ſolâ vi centripetâ ſollicitatum cadendo percurret totam diametrum AS, eodem tempore, quo corpus aliud ad dimidiam diſtantiam SO, deſcribet ſemicirculum OKH; ſunt enim areæ ſemicirculorum OKH & SEA æquales, tempus verò quo corpus ex A demiſſum cadendo percurrit ſpatium quodvis AC eſt ad tempus quo percurret AS, ut area ASD ad ſemicirculum ADES, ſive ut ſector OSK ad ſectorem quem deſcribit corpus in circulo OKH revolvens æqualem ſemicirculo ADES, qui ſector erit ipſe ſemicirculus OKH.

401. Coroll. 2. Si corpus ad diſtantiam SA, circulum deſcribens omni motu revolutionis privaretur, & ad centrum virium S, ſolâ vi centripetâ urgeretur, tempus quo ex A uſque ad S cadendo perveniret, eſſet ad tempus unius revolutionis in circulo ut 1, ad $4\sqrt{2}$: eſt enim tempus periodicum corporis ad diſtantiam SO circulum deſcribentis (hoc eſt, duplum

ejus

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XXV.

Corporis de loco dato A cadentis determinare tempora deſcenſus.



Super diametro *AS* diſtantiâ corporis a centro ſub initio, deſcribe ſemicirculum *ADS*, ut & huic æqualem ſemicirculum *OKH* circa centrum *S*. De corporis loco quovis *C* erige ordinatim applicatam *CD*. Junge *SD*, & areæ *ASD* æqualem conſtitue ſectorem *OSK*. (ſ) Patet per prop. xxxv. quod corpus cadendo deſcribet ſpatium *AC* eodem tempore quo corpus aliud, uniformiter circa centrum *S* gyrando, deſcribere poteſt arcum *OK*. *Q. E. F.*

PRO-

ejus temporis quo corpus ex A, cadendo percurrit AS, (400)] ad tempus periodicum corporis ad diſtantiam AS (= 2 SO) in circulo revolventis ut Radices quadratæ cuborum diſtantiarum 1 & 2. ſive ut 1, ad $\sqrt{8}$ (191), hoc eſt, ut 1 ad $2\sqrt{2}$; ergo tempus quo corpus cadendo percurrit AS, eſt ad tempus periodicum corporis ad diſtantiam AS in circulo revolventis ut $\frac{1}{2}$ ad $2\sqrt{2}$, hoc eſt, ut 1, ad $4\sqrt{2}$.

402. Scholium. Si planetarum orbitas circulares eſſe ſuponamus, vimque centripetam quâ in ſuis orbitis retinentur, in duplicatâ ratione diſtantíarum à centro decreſcere, ex datis temporibus periodicis, facile erit tempora definire quibus uſque ad centrum ſui motus cadendo pervenirent. Exempli cauſâ, cum tempus periodicum lunæ circà terram revolventis ſit dierum 27. hor. 7. minutorum primorum 43, hoc eſt, minutorum primorum 39343, erit $4\sqrt{2}$, ad 1, hoc eſt, quam proximè 565685, 100000, ut 39343, ad 6955. 5, ſeu dies 4, hor. 19, min. prim. 55, & ſecund. 30, tempus quo luna cadendo ad centrum telluris perveniret.

(ſ) * *Patet per prop. XXXV.* Cum enim ſemicirculorum ADS, OKH, & ſectorum OSK, ASD, areæ æquales ſint reſpectivè, erit quoque ſector HSK æqualis ſegmento SED, adeóque (401.) tempus quo corpus ex A cadendo percurrit CS, æquatur tempori, quo corpus aliud in circulo OKH revolvens deſcribit arcum KH, & quoniam tempus per AS cadendo æquatur tempori quo corpus revolvens totum ſemicirculum OKH, deſcribit (401), erit tempus per AC, æquale tempori per arcum OK.

403. Coroll. Arcus OK, æqualis eſt ſummæ arcus AD & lineæ CD. Eſt enim ſector ASD, æqualis ſectori AOD, + triangulo DOS, ſive $\frac{1}{2}$ AO × AD + $\frac{1}{2}$ AO × CD: ſector verò OSK, = $\frac{1}{2}$ SO × OK = $\frac{1}{2}$ AO × OK, ſed eſt ſector OSK = ASD. Quarè $\frac{1}{2}$ AO × OK = $\frac{1}{2}$ AO × AD + $\frac{1}{2}$ AO × CD, atquè adeò OK = AD + CD. Si itaque fiat ut radius ad arcum grad. 57. 29578, qui radio æqualis eſt, ita CD, ad 4um. *B*, erit *B* arcus rectæ CD æqualis, & obtinebitur OK = AD + *B*. Hinc dato tempore quo corpus datam AS ex puncto A cadendo percurrit, invenitur tempus quo datam rectæ AS partem AC deſcribit, ſi fiat ut ſemicirculus OKH, ſeu grad. 180, ad arcum AD + *B*, ſeu OK, ità tempus quo corpus ex A cadendo percurrit AS, ad tempus quo percurrit AC.

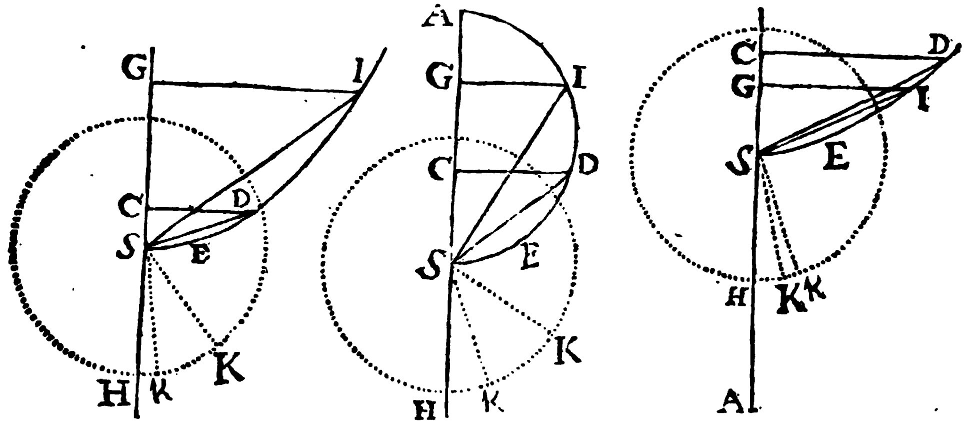
Pp 3

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XXVI.

Corporis de loco dato ſurſum vel deorſum projecti definire tempora aſcenſus vel deſcenſus.

Exeat corpus de loco dato *G* ſecundum lineam *GS* cum ve-



locitate quâcumque. In duplicatâ ratione hujus velocitatis ad uniformem in circulo velocitatem, quâ corpus ad intervallum datum *SG* circa centrum *S* revolvi poſſet, cape *GA* ad ½ *AS*. Si ratio illa eſt numeri binarii ad unitatem, punctum *A* infinite diſtat, quo caſu parabola vertice *S*, axe *SG*, latere quovis recto deſcribenda eſt. Patet hoc per prop. XXXIV. Sin ratio illa minor vel major eſt quam 2 ad 1, priore caſu circulus, poſteriore hyperbola rectangula ſuper diametro *SA* deſcribi debet. (t) Patet per prop. XXXIII. Tum centro *S*, intervallo æquan-

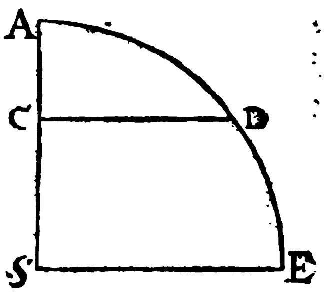
(t) * *Patet per Prop. XXXIII.* Scilicet, fingatur ſectio conica latitudinis quam minimæ, ut proximè coincidat cum axe AB, & in ea fingatur eſſe punctum G ex quo corpus movetur cum datâ velocitate, primo quæritur ſpecies illius ſectiones, & ex proportione velocitatis datæ ad velocitatem quâcum corpus ad intervallum datum SG circa Centrum S revolveretur, agnoſcetur, ex Cor. 7. Prop. XVI: &, ſi ſit Ellipſis vel Hiperbola ejus axis major ex velocitate in G datâ etiam innoteſcet, per Prop. XXXIII, quia velocitas corporis cadentis in puncto G, eſt ad velocitatem corporis in diſtantia SG revolventis in ſubduplicatâ ratione diſtantiæ puncti G à vertice ulteriore Ellipſis vel Hyperbolæ ad ejus ſemi Axem, unde

æquante dimidium lateris recti, deſcribatur circulus *HkK*, & ad corporis deſcendentis vel aſcendentis locum *G*, & locum alium quemvis *C*, erigantur perpendicula *GI*, *CD* occurrentia conicæ ſectioni vel circulo in *I* ac *D*. Dein junctis *SI*, *SD*, fiant ſegmentis *SEIS*, *SEDS* ſectores *HSK*, *HSk* æquales, & per prop. xxxv. corpus *G* deſcribet ſpatium *GC* eodem tempore quo corpus *K* deſcribere poteſt arcum *Kk*. *Q. E. F.*

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XII.

Poſito quod vis centripeta proportionalis ſit altitudini ſeu diſtantiæ locorum à centro, dico quod cadentium tempora, velocitates & ſpatia deſcripta ſunt arcubus, arcuumque ſinibus rectis & ſinibus verſis reſpectivè proportionalia.

Cadat corpus de loco quovis *A* ſecundum rectam *AS*; & centro virium *S*, intervallo *AS*, deſcribatur circuli quadrans *AE*, ſitque *CD* ſinus rectus arcus cujuſvis *AD*; & corpus *A*, tempore *AD*, cadendo deſcribit ſpatium *AC*, inque loco *C* acquiret velocitatem *CD*.



Demonſ-

unde ſi fiat GA ad $\frac{1}{2}$ SA in duplicatâ ratione velocitatis in G ad velocitatem corporis in diſtantiâ SG revolventis, erit A vertex ulterior Ellipſis vel Hyperbolæ, & $\frac{1}{2}$ SA ſemi Axis quæſitus.

Fiat ergo in vertice S Parabola quævis, ſi curva evaneſcens in quâ G eſt, ſit Parabola, vel fiat Circulus, vertice S Diametro SA, ſi ſit Ellipſis; vel Hyperbola æquilatera eâdem Diametro ſi ea curva ſit Hyperbola, & ſi Corpus ex G perveniat in C, erectis uſque ad curvas deſcriptas perpendicularibus GI. CD, erunt ſegmenta SEI, SED proportionalia temporibus quibus corpus propoſitum ex G ad S, & ex C ad S movebitur per Prop. XXXII: *Sed per Prop. XXXV*, corpus G ſpatia GS, CS, iiſdem temporibus cadendo percurrit, quibus corpus K, deſcribit arcus KH, kH; eodem igitur tempore percurritur GC, quo Kk.

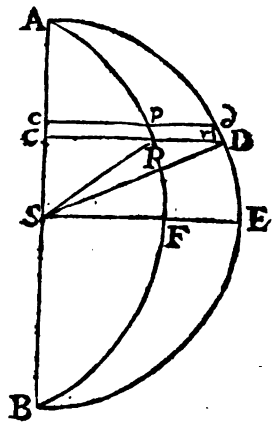
DE MOTU CORPORUM.

(u) Demonſtratur eodem modo ex propoſitione X, quo propoſitio XXXII, ex propoſitione XI demonſtrata fuit.

Corol. 1. (x) Hinc æqualia ſunt tempora, quibus corpus unum de loco *A* cadendo pervenit ad centrum *S*, & corpus aliud revolvendo deſcribit arcum quadrantalem *A D E*.

Corol. 2. Proinde æqualia ſunt tempora omnia quibus corpora de locis quibuſvis ad (y) uſque centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (per corol. III. prop. IV.) æquantur.

PRO-



(u) * 404. *Demonſtratur eodem modo.* Nam ſi corpus non cadit perpendiculariter, deſcribet id (per Cor. 1. Prop. X.) ellipſim aliquam A P F B, cujus centrum congruit cum centro virium S; Super hujus ellipſeos axe majore A B, deſcribatur ſemicirculus A D B, & per corpus decidens tranſeat recta D P C perpendicularis ad axem, actiſque D S, P S, erit area A S D, areæ A S P, atque adeò etiam tempori proportionalis. Manente axe AB, minuatur perpetuò latitudo Ellipſeos, & ſemper manebet area A S D, tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum, & orbe A P B jam coincidente cum axe A B, puncto P cum C, & F cum S, deſcendet corpus in rectâ A C, & area A S D, ſeu huic proportionalis arcus A D, evadet tempori proportionalis. In rectâ A C capiatur linea quam minima C c, agaturque c d, parallela C D, & circulum ſecans in puncto d, ex quo ad C D, demittatur perpendiculum d r, & arcus D d proportionalis erit tempori quo percurritur C c, (ex demonſtr.) atque adeò coeuntibus punctis C c, & d D, erit velocitas in C, ut $\frac{Cc}{Dd}$ (5, 145), ſed ob triangula D r d, S C D, ſimilia C c, ſeu d r : d D = C D : S D, id eſt, $\frac{Cc}{dD} = \frac{CD}{SD}$. Quare velocitas in loco C, eſt ut $\frac{CD}{SD}$, hoc eſt, ob conſtantem S D, ut C D. Q. E. D.

(x) * *Cor, 1. Hinc æqualia.* Nam per coroll. 2. prop. X. tempora revolutionum in ellipſibus quibuſvis APF, ADB, adeóque & tempora per ellipſeon quadrantes A P F ſeu A S, A D E, ſunt æqualia.

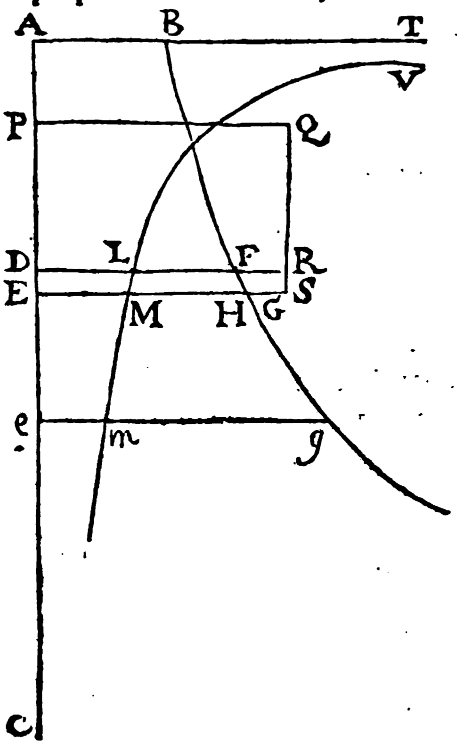
(y) * *Ad uſque centrum.* Ex quiete cadunt.

405. Æqualia ſunt tempora quibus corpus unum de loco A cadendo pervenit ad locum C, & corpus aliud revolvendo deſcribit arcum circuli A D; Cum enim corpus in circulo uniformiter revolvatur, erit tempus per A D ad tempus per A E ſeu ad tempus per A S, ut arcus A D, ad quadrantem A E, ſed eſt etiam tempus per A C, ad tempus per A S, ut arcus A D, ad quadrantem A E, ergò tempus per A C, æquatur tempori per A D.

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XXVII.

Poſitâ cujuſcumque generis vi centripetâ, & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis rectâ aſcendentis vel deſcendentis tum velocitas in locis ſingulis, tum tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.

De loco quovis *A* in rectâ *ADEC* cadat corpus *E*, (z) deque loco ejus *E* erigatur ſemper perpendicularis *EG*, vi centripetæ in loco illo ad centrum *C* tendenti proportionalis: Sitque *BFG* linea curva quam punctum *G* perpetuo tangit. Coincidat autem *EG* ipſo motus initio cum perpendiculari *AB*, & erit corporis velocitas in loco quovis *E* (a) ut recta, quæ poteſt aream curvilineam *ABGE*. *Q. E. I.*



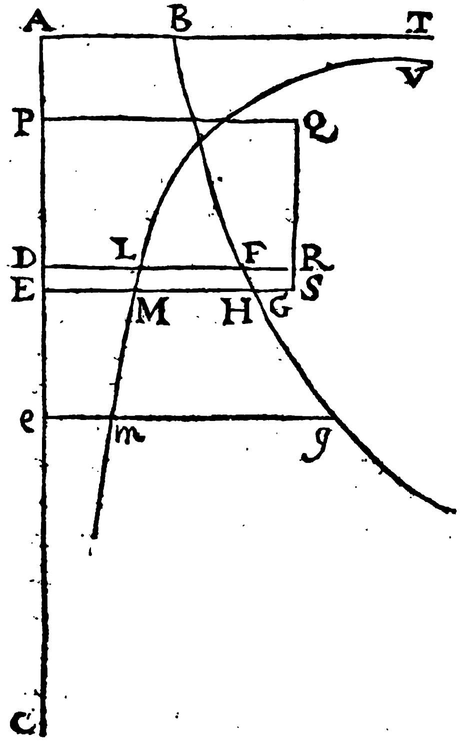
In *EG* capiatur *EM* rectæ, quæ poteſt aream *ABGE*, reciprocè proportionalis, & ſit *VLM* linea curva, quam punctum *M* perpetuo tangit, & cujus aſymptotos eſt recta *AB* producta; & erit tempus, quo corpus cadendo deſcribit lineam *AE*, ut area curvilinea *ABTVME*. *Q. E. I.*

(z) * *Deque loco ejus E.* Id eſt, per omnia lineæ A C puncta erigantur perpendicula ut E G, vi centripetæ in ſingulis illis punctis proportionalia, ſitque B F G curva ad quam omnia illa perpendicula terminentur. Poſſunt autem perpendicula illa ad arbitrium aſſumi, dummodò ſingula vi centripetæ in ſingulis locis proportionalia ſint.

(a) *Ut recta, quæ poteſt aream curvilineam A B G E.* In prioribus Editionibus erat, *ut areæ curvilineæ A B G E latus quadratum*; hæ ſcilicet phraſes ſynonymæ ſunt; fraſis quæ hic juxta Editionem Londinenſem adhibetur, veteribus Geometris eſt familiaris: Ea autem linea quæ poteſt figuram datam, eſt linea cujus quadratum eſt æquale illi figuræ datæ.

DE MOTU CORPORUM.

Etenim in rectâ AE capiatur linea quam minima DE datæ longitudinis, ſitque DLF locus lineæ EMG, ubi corpus verſabatur in D; & ſi ea ſit vis centripeta, ut recta, quæ poteſt aream $ABGE$, ſit ut deſcendentis velocitas: erit area ipſa in duplicatâ ratione velocitatis, id eſt, ſi pro velocitatibus in D & E, ſcribantur V & V+I, erit area $ABFD$ ut VV, & area $ABGE$ ut VV + 2VI+II, & diviſim area $DFGE$ ut 2VI+II, ideoque $\frac{DFGE}{DE}$ ut $\frac{2VI+II}{DE}$, id (b) eſt ſi primæ quantitatum naſcentium rationes ſumantur, longitudo DF ut quantitas $\frac{2VI}{DE}$, ideoque etiam ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{DE}$. Eſt autem tempus, quo corpus cadendo deſcribit lineolam



(b) 406. * *Id eſt, ſi primæ quantitatum naſcentium &c.* Seu coeuntibus punctis, D & E, F & G, ſit area DFGE, æqualis rectangulo DF×DE (107) & velocitatis finitæ V, incrementem naſcens I, evaneſcit reſpectu V, (107) ac proindè cum ſit I:V=II:VI, quadratum II, evaneſcit reſpectu rectanguli VI, aut 2VI; Quarè in hoc caſu $\frac{DFGE}{DE}$, $=\frac{DF \times DE}{DE}$ $=$ DF, & $\frac{2VI+II}{DE}=\frac{2VI}{DE}$; Eſt igitur longitudo DF, ut quantitas $\frac{2VI}{DE}$, ideóque etiam, ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{DE}$: Quoniam autem velocitas per ſpatium evaneſceus DE, eſt uniformis (145), ſi tempus quo DE percurritur, dicatur T, erit $T=\frac{DE}{V}$, (5). Eſt autem vis ut $\frac{I}{T}$ (13) adeóque ſi loço T ponatur $\frac{DE}{V}$, erit vis ut $\frac{I \times V}{DE}$, hoc eſt, ut longitudo DF, *ergò vis ipſi DF, vel EG &c.*

* Pars

neolam *DE*, ut lineola illa directè & velocitas V inversè, eſtque vis ut velocitatis incrementum I directè & tempus inversè, ideoque ſi primæ naſcentium rationes ſumantur, ut $\frac{I \times V}{DE}$, hoc eſt, ut longitudo *DF*. Ergo vis ipſi *DF* vel *EG* proportionalis facit ut corpus eâ cum velocitate deſcendat, quæ ſit ut recta quæ poteſt aream *ABGE*. *Q. E. D.*

(c) Porro cum tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola *DE* deſcribatur, ſit ut velocitas inverſè, ideoque inverſè ut linea recta quæ poteſt aream *ABFD*; (d) ſitque *DL*, atque ideo area naſcens *DLME*, ut eadem linea recta inverſè: erit tempus ut area *DLME*, & ſumma omnium temporum ut ſumma omnium arearum, hoc eſt (per corol. lem. IV.) tempus totum quo linea *AE* deſcribitur ut area tota *ATVME*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Si *P* ſit locus, de quo corpus cadere debet, ut urgente aliquâ uniformi vi centripetâ notâ (qualis vulgo ſupponitur gravitas) velocitatem acquirat in loco *D* æqualem velocitati, quam corpus aliud vi quâcunque cadens acquiſivit eodem loco *D*, & in perpendiculari *DF* capiatur *DR*, quæ ſit ad *DF* ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco *D*, & compleatur rectangulum *PDRQ*, eique æqualis abſcindatur area *ABFD*; erit *A* locus de quo corpus alterum cecidit. Namque completo rectangulo *DRSE*, (e) cum ſit area *ABFD* ad aream *DFGE* ut VV ad 2VI, ideoque ut $\frac{1}{2}$ V ad I, id eſt, ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæ-

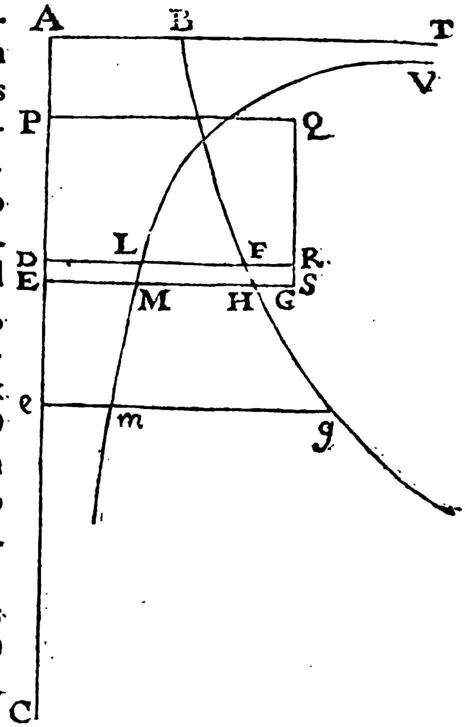
(c) * *Porrò cum tempus.* Tempus enim eſt ut ſpatium uniformiter percurſum directè & velocitas inverſe (5), quarè ſi ſpatium conſtans fuerit, tempus eſt ut velocitas inverſè.

(d) * *Sitque* DL. Eſt enim DL, ut DL in conſtantem DE ducta, hoc eſt, ut area naſcens DLME, ſed DL eſt ut latus quadratum areæ ABFD inverſè (per conſtr.) ergò area naſcens DLME, eſt ut idem latus quadratum inverſè, hoc eſt, ut velocitas inversè, ſive, ut tempus per DE. *Quarè ſumma omnium temporum eſt ut ſumma omnium arearum naſcentium. Hoc eſt, &c.*

(e) * *Cum* (coeuntibus punctis D, E) *ſit area ABFD ad aream* DFGE, *ut VV, ad* $2V \times I$; Si enim A ſit locus ex quo corpus cadere debet vi quâcumque ut eamdem in D velocitatem V acquiſiverit ac ſi ex P vi gravitatis decidiſſet erit area ABFD, ut VV, & area DFGE, ut 2VI + II, hoc eſt, (406) ut 2VI. Quarè ABFD : DFGE = VV : 2VI = $\frac{1}{2}$ V : I.

DE MOTU CORPORUM.

inæquabili cadentis; (f) & ſimiliter area $PQRD$ ad aream $DRSE$ ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; ſintque incrementa illa (ob æqualitatem temporum naſcentium) ut vires generatrices, id eſt, ut ordinatim applicatæ DF, DR, ideoque ut areæ naſcentes $DFGE$, $DRSE$; erunt ex æquo areæ totæ $ABFD$, $PQRD$ ad invicem ut ſemiſſes totarum velocitatum, & propterea, ob æqualitatem velocitatum, æquantur.



Corol. (g) 2. Unde ſi corpus quodlibet de loco quocunque D datâ cum velocitate vel ſurſum vel deorſum projiciatur, & detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco

(f) * *Et ſimiliter area PQRD ad aream DRSE*, hoc eſt, linea PD ad lineam DE (propter altitudinem communem DR=SE) *ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis*, ſcilicet cum velocitas in D ſit V, ejus incrementum in E ſit X, ex naturâ gravitatis altitudines ex quibus corpus cadit ſunt ut quadrata velocitatum in fine lapſus acquiſitarum, ergo erit PD ad PE ut VV ad VV + 2VX + X², & dividendo PD : DE = VV : 2VX + X² (& omiſſo X² ut pote infinite parvo) VV : 2VX = $\frac{1}{2}$ V : X; unde PQRD : DRSE = $\frac{1}{2}$ V : X, ſive invertendo DRSE : PQRD = X : $\frac{1}{2}$ V; ſunt verò incrementa illa I & X (13) ut vires generatrices id eſt ut DF ad DR, ſive ut DFGE ad DRSE. Eſt ergo per hanc demonſtrationem

ABFD : DFGE = $\frac{1}{2}$ V : I

DFGE : DRSE = DF : DR = I : X

DRSE : PQRD = X : $\frac{1}{2}$ V

Unde ex compoſitione rationum ABFD : PQRD = $\frac{1}{2}$ V × I × X : I × X × $\frac{1}{2}$ V ſive in ratione æqualitatis.

(g) * *Coroll. 2. demonſtratur.* Sit A punctum ex quo corpus cadere debet ut acquirat in loco D velocitatem cum quâ ſurſum vel deorſum projicitur, erit, (ex Dem.) area ABge proportionalis quadrato velocitatis corporis in loco e; Eſt autem (ex Dem.) area ABFD, æqualis rectangulo PQRD, adeóque area ABge = PQRD + DFge ſi locus e loco D inferior fuerit, & ABge = PQRD − DFge, ſi locus e loco D ſuperior, hoc eſt, ſi corpus ſurſum projectum ſit; ergò velocitas

cor-

loco *e*, erigendo ordinatam *eg*, & capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco *D* ut eſt recta, quæ poteſt rectangulum *PQRD* areâ curvilineâ *DFge* vel auctum, ſi locus *e* eſt loco *D* inferior, vel diminutum, ſi is ſuperior eſt, ad rectam quæ poteſt rectangulum ſolum *PQRD*.

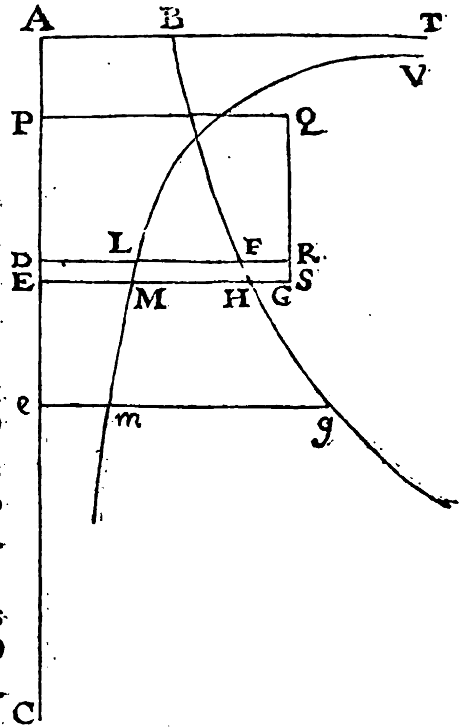
Corol 3. Tempus quoque innoteſcet erigendo ordinatam *em* reciproce proportionalem lateri quadrato ex *PQRD* + vel − *DFge*, & capiendo tempus quo corpus deſcripſit lineam *De* ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit à *P* & cadendo pervenit ad *D*, ut area curvilinea *DLme* ad rectangulum $2\,PD \times DL$. Namque tempus quo corpus vi uniformi deſcendens deſcripſit lineam *PD* eſt ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineam *PE* in (h) ſubduplicatâ ratione *PD* ad *PE*, id eſt (lineola *DE* jamjam naſcente) in ratione *PD* ad $PD + \frac{1}{2}DE$ ſeu $2PD$ ad $2PD + DE$, & (i) diviſim, ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineolam *DE* ut $2PD$ ad *DE*, ideoque ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream *DLME*; eſtque tempus quo corpus utrumque deſcripſit lineolam *DE* ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu deſcripſit lineam *De*, ut area *DLME* ad aream *DLme*, & ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum $2\,PD \times DL$ ad aream *DLme*.

corporis in loco e, eſt ut $\sqrt{PQRD \mp DFge}$; cumque ſit velocitas in D, ut $\sqrt{ABFD}$, ſive ut huic æqualis $\sqrt{PQRD}$ (ex Dem.) erit velocitas in e, ad velocitatem in D, ut $\sqrt{PQRD \mp DFge}$, ad $\sqrt{PQRD}$.

(h) * *In ſubduplicatâ ratione* PD, ad PE (27), *id eſt, lineola* DE, *jamjam naſcente in ratione* PD, *ad* PD, $+ \frac{1}{2}$ DE; quadratis enim his ultimis terminis fiet $PD^2 : PD^2 + PD \times DE + \frac{1}{4}DE^2$; & cum ſit PD quantitas finita; & DE naſcens, evaneſcit (107) $\frac{1}{4}DE^2$ reſpectu $PD \times DE$; adeóque $PD \times DE \mp \frac{1}{4}DE^2 = PD \times DE$. Undè eſt $PD^2 : PD^2 + PD \times DE + \frac{1}{4}DE^2 = PD^2 : PD^2 + PD \times DE = PD : PD + DE$, ſeu PE; eſt igitur PD : PE in ratione duplicatâ PD ad $PD + \frac{1}{2}DE$, atque adeò PD ad $PD + \frac{1}{2}ED$, in ratione ſubduplicatâ PD, ad PE.

(i) * *Et diviſim.* Tempus per PD, vi uniformi deſcriptum eſt ad tempus per DE, ut 2PD, ad DE, adeóque ut rectangulum $2PD \times DL$, ad rectangulum $DE \times DL$, ſeu ad aream DLME; tempus per rectam PD, vi uniformi deſcriptum ſit T, tempus per DE, ſit θ, & tempus per De, ſit t, erit (ex Dem.) $T : \theta = 2PD \times DL : DLME$, eſtque idem tempus θ, quo utrumque corpus deſcribit lineam DE, ſiquidem utriuſque eadem eſt velocitas in D: ſed (ex conſtructione) tempus quo corpus

inæquabili cadentis; (f) & ſimiliter area *PQRD* ad aream *DRSE* ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; ſintque incrementa illa (ob æqualitatem temporum naſcentium) ut vires generatrices, id eſt, ut ordinatim applicatæ *DF*, *DR*, ideoque ut areæ naſcentes *DFGE*, *DRSE*; erunt ex æquo areæ totæ *ABFD*, *PQRD* ad invicem ut ſemiſſes totarum velocitatum, & propterea, ob æqualitatem velocitatum, æquantur.



Corol. (g) 2. Unde ſi corpus quodlibet de loco quocunque *D* datâ cum velocitate vel ſurſum vel deorſum projiciatur, & detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco

(f) * *Et ſimiliter area PQRD ad aream DRSE*, hoc eſt, linea PD ad lineam DE (propter altitudinem communem DR=SE) *ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis*, ſcilicet cum velocitas in D ſit V, ejus incrementum in E ſit X, ex naturâ gravitatis altitudines ex quibus corpus cadit ſunt ut quadrata velocitatum in fine lapſus acquiſitarum, ergo erit PD ad PE ut VV ad $VV + 2VX + X^2$, & dividendo $PD : DE = VV : 2VX + X^2$ (& omiſſo X^2 ut pote infinite parvo) $VV : 2VX = \frac{1}{2}V : X$; unde $PQRD : DRSE = \frac{1}{2}V : X$, ſive invertendo $DRSE : PQRD = X : \frac{1}{2}V$; ſunt verò incrementa illa I & X (13) ut vires generatrices id eſt ut DF ad DR, ſive ut DFGE ad DRSE. Eſt ergo per hanc demonſtrationem

$$ABFD : DFGE = \tfrac{1}{2}V : I$$
$$DFGE : DRSE = DF : DR = I : X$$
$$DRSE : PQRD = X : \tfrac{1}{2}V$$

Unde ex compoſitione rationum $ABFD : PQRD = \frac{1}{2}V \times I \times X : I \times X \times \frac{1}{2}V$ ſive in ratione æqualitatis.

(g) * *Coroll.* 2. *demonſtratur.* Sit A punctum ex quo corpus cadere debet ut acquirat in loco D velocitatem cum quâ ſurſum vel deorſum projicitur, erit, (ex Dem.) area ABge proportionalis quadrato velocitatis corporis in loco e; Eſt autem (ex Dem.) area ABFD, æqualis rectangulo PQRD, adeóque area ABge = PQRD + DFge ſi locus e loco D inferior fuerit, & ABge = PQRD − DFge, ſi locus e loco D ſuperior, hoc eſt, ſi corpus ſurſum projectum ſit; ergò velocitas

[illegible]

loco e, erigendo ordinatam eg, & capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco D ut eſt recta, quæ poteſt rectangulum $PQRD$ areâ curvilineâ $DFge$ vel auctum, ſi locus e eſt loco D inferior, vel diminutum, ſi is ſuperior eſt, ad rectam quæ poteſt rectangulum ſolum $PQRD$.

Corol 3. Tempus quoque innoteſcet erigendo ordinatam em reciproce proportionalem lateri quadrato ex $PQRD +$ vel $- DFge$, & capiendo tempus quo corpus deſcripſit lineam De ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit à P & cadendo pervenit ad D, ut area curvilinea $DLme$ ad rectangulum $2PD \times DL$. Namque tempus quo corpus vi uniformi deſcendens deſcripſit lineam PD eſt ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineam PE in (h) ſubduplicatâ ratione PD ad PE, id eſt (lineola DE jamjam naſcente) in ratione PD ad $PD + \frac{1}{2}DE$ ſeu $2PD$ ad $2PD + DE$, & (i) diviſim, ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineolam DE ut $2PD$ ad DE, ideoque ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream $DLME$; eſtque tempus quo corpus utrumque deſcripſit lineolam DE ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu deſcripſit lineam De, ut area $DLME$ ad aream $DLme$, & ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream $DLme$.

corporis in loco e, eſt ut $\sqrt{PQRD \mp DFge}$; cumque ſit velocitas in D, ut $\sqrt{ABFD}$, ſive ut huic æqualis $\sqrt{PQRD}$ (ex Dem.) erit velocitas in e, ad velocitatem in D, ut $\sqrt{PQRD \mp DFge}$, ad $\sqrt{PQRD}$.

(h) * *In ſubduplicatâ ratione* PD, *ad* PE (27), *id eſt, lineola* DE, *jamjam naſcente in ratione* PD, *ad* PD, $+ \frac{1}{2}$ DE; quadratis enim his ultimis terminis fiet $PD^2 : PD^2 + PD \times DE + \frac{1}{4} DE^2$; & cum ſit PD quantitas finita; & DE naſcens, evaneſcit (107) $\frac{1}{4} DE^2$ reſpectu $PD \times DE$; adeóque $PD \times DE \mp \frac{1}{4} DE^2 = PD \times DE$. Undè eſt $PD^2 : PD^2 + PD \times DE + \frac{1}{4} DE^2 = PD^2 : PD^2 + PD \times DE = PD : PD + DE$, ſeu PE; eſt igitur PD : PE in ratione duplicatâ PD ad PD $+ \frac{1}{2}$ DE, atque adeò PD ad PD $+ \frac{1}{2}$ ED, in ratione ſubduplicatâ PD, ad PE.

(i) * *Et diviſim.* Tempus per PD, vi uniformi deſcriptum eſt ad tempus per DE, ut 2PD, ad DE, adeóque ut rectangulum $2PD \times DL$, ad rectangulum $DE \times DL$, ſeu ad aream DLME; tempus per rectam PD, vi uniformi deſcriptam ſit T, tempus per DE, ſit θ, & tempus per De, ſit t, erit (ex Dem.) $T : \theta = 2PD \times DL : DLME$, eſtque idem tempus θ, quo utrumque corpus deſcribit lineam DE, ſiquidem utriuſque eadem eſt velocitas in D: ſed (ex conſtructione) tempus quo corpus ina-

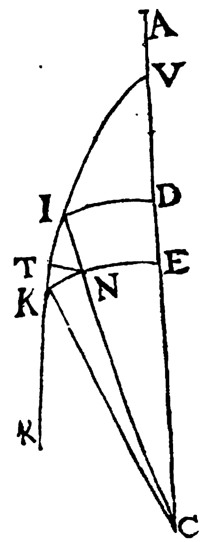
SECTIO VIII.

De inventione orbium in quibus corpora viribus quibuſcunque centripetis agitata revolvuntur.

PROPOSITIO XL. THEOREMA XIII.

Si corpus, cogente vi quâcunque centripetâ, moveatur utcunque, & corpus aliud rectà aſcendat vel deſcendat, ſintque eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum caſu æquales, velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.

Deſcendat corpus aliquod ab *A* per *D*, *E*, ad centrum *C*, & moveatur corpus aliud a *V* in lineâ curvâ *VIKk*. Centro *C* intervallis quibuſvis deſcribantur circuli concentrici *DI*, *EK* rectæ *AC* in *D* & *E*, curvæque *VIK* in *I* & *K* occurrentes. Jungatur *IC* occurrens ipſi *KE* in *N*; & in *IK* demittatur perpendiculum *NT*; ſitque circumferentiarum circulorum intervallum *DE* vel *IN* quam minimum, & habeant corpora in *D* & *I* velocitates æquales. Quoniam diſtantiæ *CD*, *CI* æquantur, erunt vires centripetæ in *D* & *I* æquales. Exponantur hæ vires per æquales lineolas *DE*, *IN*; & ſi vis una *IN* (per legum corol. 2.) reſolvatur in duas *NT* & *IT*, vis *NT*, agendo ſecundum lineam *NT* corporis curſui *ITK* perpendicularem, nil mutabit velocitatem corporis in curſu illo, ſed retrahet ſolummodo corpus à curſu rectilineo, facietque ipſum de orbis tangente perpetuo deflectere, inque viâ curvilineâ *ITKk* progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota conſumetur: vis autem altera *IT*, ſecundum corporis curſum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quam minimo accelerationem generabit



nerabit ſibi ipſi proportionalem. (k) Proinde corporum in *D* & *I* accelerationes æqualibus temporibus factæ (ſi ſumantur linearum naſcentium *DE*, *IN*, *IK*, *IT*, *NT* rationes primæ) ſunt ut lineæ *DE*, *IT*: temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim. Tempora autem quibus *DE* & *IK* deſcribuntur, ob æqualitatem velocitatum ſunt ut viæ deſcriptæ *DE* & *IK*, ideoque accelerationes, in curſu corporum per lineas *DE* & *IK*, ſunt ut *DE* & *IT*, *DE* & *IK* conjunctim, id eſt ut *DE quad.* & *IT*×*IK rectangulum.* (l) Sed *rectangulum IT*×*IK* æquale eſt *IN quadrato*, hoc eſt, æquale *DE quad.* & propterea accelerationes in tranſitu corporum à *D* & *I* ad *E* & *K* æquales generantur. Æquales igitur ſunt corporum velocitates in *E* & *K*: & eodem argumento ſemper reperientur æquales in ſubſequentibus æqualibus diſtantiis. *Q. E. D.*

Sed & (m) eodem argumento corpora æquivelocia & æqualiter à centro diſtantia, in aſcenſu ad æquales diſtantias æqualiter retardabuntur. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi corpus vel oſcilletur pendens à filo, vel impedimento quovis politiſſimo & perfectè lubrico cogatur in lineâ curvâ moveri, & corpus aliud rectâ aſcendat vel deſcendat,

(k) * *Proindè corporum in D & I accelerationes æqualibus temporibus factæ ſunt ut lineæ DE, IT.* Sunt enim vires acceleratrices ut accelerationes naſcentes, ſeu celeritatum incrementa naſcentia directè & tempora inversè (13), undè temporibus æqualibus accelerationes naſcentes ſunt ut vires acceleratrices, temporibus autem inæqualibus ut vires acceleratrices & tempora conjunctim; ſed lineæ DE, IT, ſunt ut vires acceleratrices in directionibus DE, IT; ergò corporum in *D* & I accelerationes æqualibus temporibus factæ ſunt ut lineæ DE, IT; temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim.

(l) * *Sed rectangulum* IT × IK *æquale eſt IN qudrato*, cum ſit KNI angulus rectus, & linea NT ad baſim IK normalis, adeóque crus IN medium proportionale inter hypothenuſam IK & illius abſciſſam IT.

(m) 411. *Et eodem argumento.* Vis enim acceleratrix motum corporis aſcendentis eodem modo retardat, quo motum deſcendentis accelerat in iiſdem locis (25); undè vera eſt propoſitio ſivè corpus utrumque deſcendat aut aſcendat, ſive deſcendente uno, alterum aſcendat.

412. Si centrum C in infinitum abeat, rectæ AC, IC fiunt parallelæ & arcus DI, EK in rectas, lineis AC, IC perpendiculares, mutantur. Valet igitur propoſitio etiam ubi vis centripetæ directio AC, IC ſibi perpetuò parallela eſt, dummodò puncta D, I æque alta ſint, hoc eſt, in eâdem rectâ ad directionem vis centripetæ perpendiculari ſumantur.

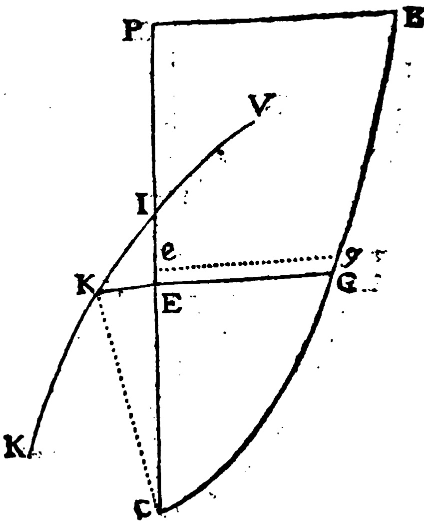
De Motu Corporum.

dat, ſintque velocitates eorum in eâdem quâcunque altitudine æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibuſcunque æqualibus altitudinibus æquales. Namque corporis penduli filo vel (n) impedimento vaſis abſolutè lubrici idem præſtatur quod vi tranſversâ *NT*. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, ſed tantum cogitur de curſu rectilineo diſcedere.

Corol. 2. Hinc etiam ſi quantitas P ſit maxima à centro diſtantia, ad quam corpus vel oſcillans vel in trajectoriâ quâcunque revolvens, deque quovis trajectoriæ puncto, eâ quam ibi habet velocitate ſurſum projectum aſcendere poſſit; ſitque quantitas A diſtantia corporis à centro in alio quovis orbitæ puncto, & vis centripeta ſemper ſit ut ipſius A dignitas quælibet A^{n-1}, cujus index $n-1$ eſt numerus quilibet n unitate diminutus; velocitas corporis in omni altitudine A erit ut $\sqrt{P^n - A^n}$, atque ideo datur. (o) Namque velocitas rectâ aſcendentis ac deſcendentis (per prop. XXXIX.) eſt in hâc ipſâ ratione.

(n) * *Impedimento vaſis.* (Vid. not. 83. 86. 89. 90. 91.

(o) 413. *Namque velocitas recta aſcendentis ac deſcendentis (per prop. XXXIX.) eſt in hâc ipſâ ratione* $\sqrt{P^n - A^n}$; Sit enim centrum virium C, diſtantiâ CP ex quâ corpus incipit cadere dicatur *P*, viſque centripeta ſit ſemper ut abſciſſarum CE (quæ dicuntur *A* in hoc Corollario) dignitas $n-1$, erigantur in omnibus punctis E perpendiculares EG vi centripetæ CE^{n-1} proportionales, perpendicularis PB in puncto P erecta dicatur b, & per omnium perpendicularium vertices ducatur curva, dicantur *x* abſciſſæ CE, dicantur *y* ordinatæ EG, erit $b : y = P^{n-1} : x^{n-1}$, ideoque $y = \frac{b x^{n-1}}{P^{n-1}}$. Unde liquet curvam hanc eſſe generis Parabolici & ejus quadraturam facilè obtineri, ſit enim $Ee = dx$ fluxio abſciſſæ CE, erit $EegG = y\,dx$ fluxio areæ CEG, & loco *y* poſito ejus valore $\frac{b x^{n-1}}{P^{n-1}}$ erit $y\,dx = \frac{b x^{n-1}}{P^{n-1}} dx$, cujus fluens eſt (165) $\frac{b x^n}{n P^{n-1}}$, quæ exprimit aream quæ reſpondet abſciſſæ *x*, ſive *A*, ignque deletis



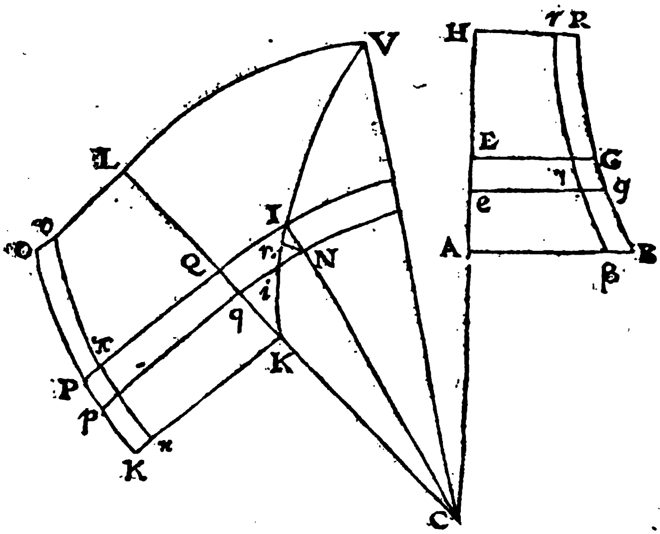
conſtantibus, erunt ſemper areæ CEG ſicut x^n ſive A^n.

Jam verò per Prop. XXXIX., velocitas corporis cadentis in puncto E, eſt ut linea quæ poteſt aream PBGE, ſive quæ poteſt differentiam arearum CPB, CEG, eſt autem ſemper CPB ad CEG ut P^n ad A^n, earum ergo differentiæ erunt ſemper ut $P^n - A^n$, ideoque velocitas corporis cadentis in E erit ſemper ut $\sqrt{P^n - A^n}$.

His poſitis ſi corpus vel oſcillans vel in trajectoriâ quâcumque VIKk revolvens in puncto I velocitatem eam habeat quâ (lineâ CI in P productâ) ex I in P aſcendere potuiſſet, vel quod idem eſt quam acquireret (25) ex P ad I decidendo, in omni aliâ altitudine CK ſive A eamdem habebit celeritatem quam corpus acquiret rectà deſcendendo ex diſtantiâ P à centro uſque ad altitudinem æqualem CK, per Prop. præſentem, ſed celeritates corporis ex P rectà deſcendentis erunt ſemper ut $\sqrt{P^n - A^n}$, Ergo etiam velocitates corporis in trajectoriâ revolventis erunt ſemper in quâvis diſtantiâ A à centro ut $\sqrt{P^n - A^n}$. Q. E. D.

LIBER PRIMUS. PROP. XL.

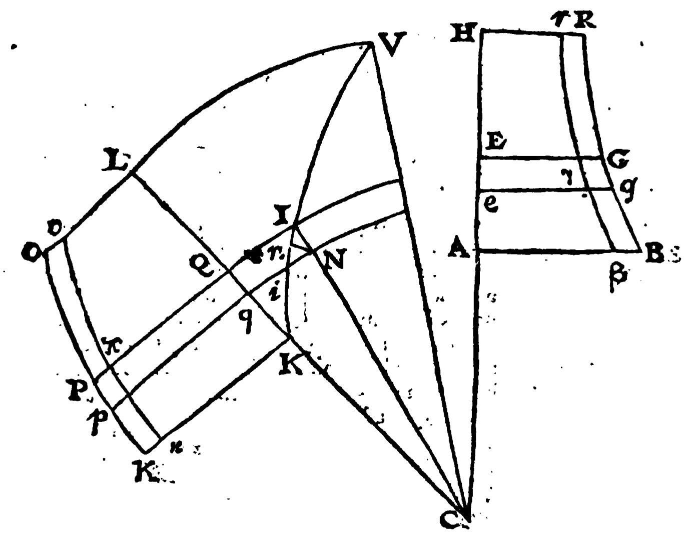
414. Scholium. Vera eſt Propoſitio XL, ſi corporum duorum (quorum unum in rectâ alterum in curvâ lineâ fertur) maſſæ ſint æquales & pondera in locis æquè altis æqualia aut pondera maſſis inæqualibus proportionalia in locis æquè altis. Illud idem theorema ad majorem univerſalitatem admodum eleganter reduxit Varignonius in Comm. Pariſ. an. 1719. Nos quoque principiis ſuprà poſitis inſiſtentes, univerſalius Newtoni propoſitionem demonſtrabimus.



Corpora duo quorum Maſſæ M, m ad eidem vel diverſa virium centra C ex locis quibuſlibet datis H, V deſcendant, alterum quidem M, perpendiculariter per rectam HC; alterum verò m per rectam vel curvam quamvis VIK.

Primùm. De loco quovis E lineæ HC erigatur ſemper perpendicularis EG vi centripetæ in loco illo ad centrum tendenti proportionalis, ſitque RGB linea curva quam punctum G perpetuò tangit: Perpendiculares in punctis datis H & A ſint HR & AB, perpendicularis in puncto variabili E ſit EG cui proxima ducatur linea eg; velocitates in punctis datis H & A ſint b & a, velocitas in puncto variabili E ſit V, & vis centripeta in eo puncto dicatur F, cui EG eſt proportionalis, ſit abſciſſa HE, s, ejus fluxio Ee erit ds, & tempuſculum quo deſcribitur

De Motu Corporum.



Ee lapſu corporis M ſit dT; Erit (13 & 409) vis centripeta F ſive $EG = \frac{M \times dV}{dT}$, & (5) $ds = VdT$. Unde erit $EG \times ds$ ſive fluxio areæ $HRGE = MVdV$, cujus fluens erit $\frac{1}{2} MVV$ (165) junctâ aut detractâ quâdam conſtanti quantitate; Coeuntibus enim H & E eſt in H, $V = b$ ideoque fit $\frac{1}{2} MVV = \frac{1}{2} Mbb$ dum area HRGE evaneſcit, itaque (170) ex fluente $\frac{1}{2} MVV$ detrahenda eſt quantitas conſtans $\frac{1}{2} Mbb$ ut areæ HRGE ſit æqualis: Coeuntibus verò E & A, cum in puncto A ſit $V = a$ erit in eo caſu HRGE ſive HRBA $= \frac{1}{2} Maa - \frac{1}{2} Mbb$, & ſumpto quovis puncto E erit HRBA − HREG ſive EGBA $= \frac{1}{2} Maa - \frac{1}{2} Mbb - \frac{1}{2} MVV + \frac{1}{2} Mbb$ $= \frac{1}{2} Maa - \frac{1}{2} VV$, Unde ſic tandem incidimus in duas æquationes

$HRGE = \frac{1}{2} MVV - \frac{1}{2} Mbb$ &

$EGBA = \frac{1}{2} Maa - \frac{1}{2} MVV$ quibus comparatis cum iis quas reſpectu corporis m in curvâ VIK moti ſimili modo deducemus, velocitates corporum in quibuſvis æqualibus vel inæqualibus altitudinibus, in quâvis virium centripetarum hypotheſi & in quâlibet ponderum & maſſarum proportione conferri poterunt.

Secundò itaque, per locum K datum in curva VIK agatur recta CKL æqualis CV & centro C per punctum quodvis I lineæ VIK deſcribatur arcus circularis IQ rectæ CL occurrens in Q per punctum Q erigatur ſemper perpendiculum PQ proportionale vi Centripetæ quâ Corpus in diſtantiâ CQ verſus C urgetur: ſitque OPk curva quam punctum P perpetuò tangit, & perpendiculares in punctis datis L & K ſint LO & Kk. Dicatur arcus VI, x, & linea LQ, y; ſit linea Ii fluxio arcus VI, & radio Ci deſcribatur arcus lineæ CL occurrens in q, & lineæ CI in N, erit Qq = IN, ex q erigatur perpendicularis qp uſque ad curvam OPK, & ex N ducatur Nn perpendicularis in arcum Ii.

Velocitates corporis m in punctis datis L & K dicantur e & c velocitas in puncto variabili Q ſit u: Vis totalis centripeta in Q ſemper exprimatur per QP, eadem vis QP aget in I (propter æquales CQ, CI,) ſecundùm directionem IN, reſolvatur ergo illa vis in vires duas quarum una agit in corpus m ſecundum directionem In, alte-

altera ſecundum directionem N n, erit I N ad I n ut vis tota Q P ad vim quâ corpus urgetur ſecundum curvam, ſed ob Triangula I N n, I N i ſimilia eſt I N ad I n ſicut I i ad I N ſive Q q, ideoque I i ad Q q ut vis Q P ad vim agentem ſecundum curvam quæ itaque erit $\frac{QP\times Qq}{Ii}$; ſit dt, tempuſculum quo deſcribetur I i per eam vim, eritque (13 & 409) ea vis $\frac{QP\times Qq}{Ii}=\frac{mdu}{dt}$. Unde erit $QP\times Qq=\frac{mdu}{dt}\times Ii$ ſed (5) eſt I i ſpatiolum percurſum tempore dt velocitate u eſt ergo æquale udt ideoque $QP\times Qq\,\frac{mdu}{dt}\times udt=mudu$, ſed $QP\times Qq=mudu$ eſt fluxio areæ LOQP, hujus fluens eſt $\frac{1}{2}muu$ (165) additâ aut detractâ quâdam conſtanti quantitate, coeuntibus enim Q & L, fit in L, $u=e$ ideoque fit $\frac{1}{2}muu=\frac{1}{2}mee$ dum area LOQP evaneſcit; itaque (170) ex fluente $\frac{1}{2}muu$ detrahenda eſt quantitas conſtans $\frac{1}{2}mee$, eritque $LOQP=\frac{1}{2}muu-\frac{1}{2}mee$, & coeuntibus Q & K fit $u=c$ & $LOKk=\frac{1}{2}mcc-\frac{1}{2}mee$ & $LOKk-LOQP$ ſive $QPKk=\frac{1}{2}mcc-\frac{1}{2}muu$, ſicque tandem incidimus in has duas æquationes

$LOQP=\frac{1}{2}muu-\frac{1}{2}mee$ &

$QPKk=\frac{1}{2}mcc-\frac{1}{2}muu$ eâdem methodo quâ in primo calculo ſumus uſi.

415. Coroll. 1. Ex primâ Æquatione primi calculi eſt $V=\frac{\sqrt{2HRGE+Mbb}}{M}$, ex primâ Æquatione ſecundi calculi eſt $u=\frac{\sqrt{2LOQP+mee}}{m}$, unde invenitur $V:u=\frac{\sqrt{2HRGE+Mbb}}{M}:\frac{\sqrt{2LOQP+mee}}{m}$.

Ex ſecundâ verò æquatione primi calculi eſt $V=\frac{\sqrt{Maa-2EGBA}}{M}$ & ex ſecunda Æquatione 2^di^. calculi $u=\frac{\sqrt{mcc-2QPKk}}{m}$, & hinc eſt $V:u=\frac{\sqrt{Maa-2EGBA}}{M}:\frac{\sqrt{mcc-2QPKk}}{m}$.

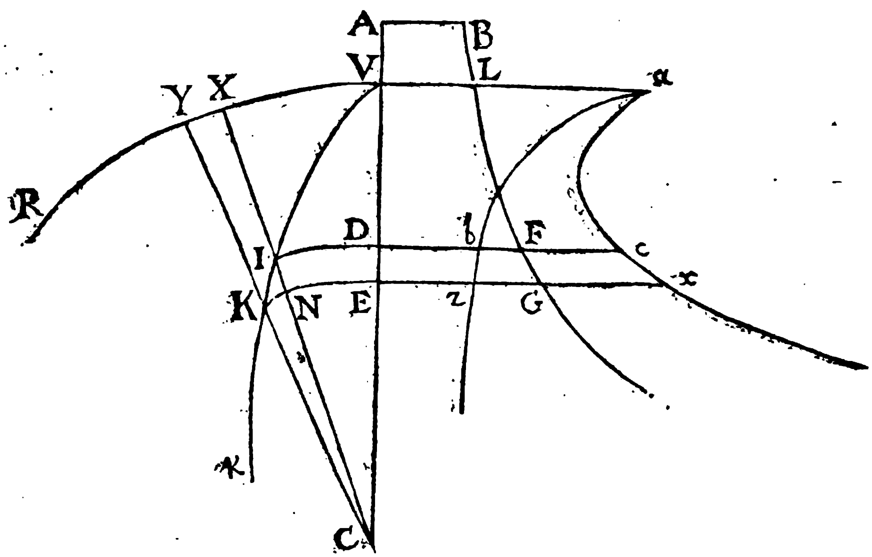
416. Coroll. 2. Si in perpendiculo QP, ità capiatur $Q\pi$, ut factum $\pi Q\times m$, ſit ubique gravitati corporis in I proportionale, ſeu rectæ Q P æquale, erit $2Lo\pi Q\times m=2LOQP$, adeóque $u=\frac{\sqrt{2LOQP+mee}}{m}=\sqrt{2Lo\pi Q+ee}$ & $u=\sqrt{cc-2Q\pi\kappa K}$; Et ſimiliter ſi ponatur $E\gamma\times M=EG$, erit $V=\sqrt{2Hr\gamma E+bb}$ & $V=\sqrt{aa-2E\gamma\beta A}$.

417. Coroll. 3. Si puncta H & V, E & I, fuerint æquè alta, & in illis lineæ EG, QP vi centripetæ proportionales, ſint ſemper æquales, erit HRGE = LOPQ. Quare ſi præterea maſſæ M, m, & velocitates b, e, in punctis H, V, æquentur, erit $\frac{2HRGE+Mbb}{M}=\frac{2LOQP+mee}{m}$, adeóque $V=u$, in omnibus punctis æquè altis E & I. Si in punctis æquè altis H & V, E & I, vires centripetæ maſſarum M & m rationem ſemper habeant, erit $HRGE:LOQP=M:m$, proindéque $\frac{2HRGE}{M}=\frac{2LOQP}{m}$. Undè ſi præterea ponatur $bb=ee$, erit $V=u$, quæ eſt propoſitio XL. Newtoni. Patet etiam in 4. ſuperioribus formulis (415), Maſſas M & m exterminari, ſi fuerint ponderibus proportionales.

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXVIII.

Poſitâ cujuſcunque generis vi centripetâ & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in trajectoriis inventis.

Tendat vis quælibet ad centrum *C* & invenienda ſit trajectoria *VIKk*. Detur circulus *VR* centro *C* intervallo quovis *CV* deſcriptus, centroque eodem deſcribantur alii quivis circuli *ID*, *KE* trajectoriam ſecantes in *I* & *K* rectamque *CV*



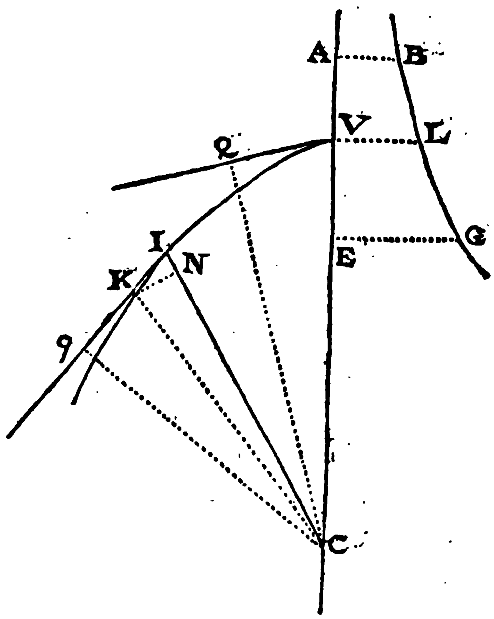
in *D* & *E*. Age tum rectam *CNIX* ſecantem circulos *KE*, *VR* in *N* & *X*, tum rectam *CKY* occurrentem circulo *VR* in *Y*. Sint autem puncta *I* & *K* ſibi invicem viciniſſima, & pergat corpus ab *V* per *I* & *K* ad *k*; ſitque punctum *A* locus ille de quo corpus aliud cadere debet, ut in loco *D* velocitatem acquirat æqualem velocitati corporis prioris in *I*. Et ſtantibus quæ in propoſitione XXXIX, lineola *IK*, dato tempore quam mini-

minimo deſcripta, erit ut velocitas, atque ideo ut recta quæ poteſt aream *ABFD*, & (p) triangulum *ICK* tempori proportionale dabitur, ideoque *KN* erit reciprocè ut altitudo *IC*, id eſt, ſi detur quantitas aliqua Q, & altitudo *IC* nominetur A, ut $\frac{Q}{A}$. Hanc quantitatem $\frac{Q}{A}$ nominemus Z, & ponamus eam eſſe magnitudinem ipſius Q ut ſit in aliquo caſu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut eſt *IK* ad *KN*, & (q) erit in omni caſu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut *IK* ad *KN*, & *ABFD* ad ZZ ut *IKq* ad *KNq*, & diviſim *ABFD*−ZZ ad ZZ ut *IN* (r) *quad.* ad *KN quad.* LIBER PRIMUS. PROP. XLI.

(p) * *Triangulum ICK tempori quo deſcribitur proportionale* (per Prop. 1.) dato tempore *dabitur*; Eſt autem trianguli ICK area $= \frac{1}{2}$ KN × IC. Quarè erit rectangulum KN × IC quantitati conſtanti æquale, & hinc lineola KN æqualis quantitati conſtanti ad IC applicatæ, hoc eſt, KN reciprocè ut IC.

(q) * *Erit in omni caſu.* Quoniam IK eſt ſemper ut $\sqrt{ABFD}$, hoc eſt IK ad $\sqrt{ABFD}$ in datâ ratione, & ſimiliter Z ad KN in datâ ratione, ſi in aliquo caſu ſit $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut IK ad KN adeóque $\sqrt{ABFD}$ ad IK ut Z ad KN, erit in omni caſu $\sqrt{ABFD}$ ad IK ut Z ad KN, ac proindè $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut IK ad KN.

418. Ducatur VL parallela EG quæ curvæ BFG occurrat in L, & ex centro C ad QV tangentem in V, ac ad qI, tangentem in I, demiſſis perpendiculis CQ, Cq, erit CQ × $\sqrt{ABLV}$ quantitas conſtans & æqualis Cq × $\sqrt{ABFD}$. Nam (per coroll. 1. prop. 1.) velocitas in V (adeóque $\sqrt{ABLV}$) eſt ut CQ reciprocè, id eſt, ut $\frac{1}{CQ}$ directè & proinde CQ × $\sqrt{ABLV}$ eſt quantitas conſtans 1, & pariter velocitas in I (adeóque $\sqrt{ABFD}$) eſt ut Cq reciprocè, id eſt, ut $\frac{1}{Cq}$ directè; & proindè Cq × $\sqrt{ABFD}$, ut quantitas conſtans 1, adeóque Cq × $\sqrt{ABFD}$ = CQ × $\sqrt{ABLV}$. Si itaque capiatur Q = CQ × $\sqrt{ABLV}$ = Cq × $\sqrt{ABFD}$, & Z = $\frac{Q}{IC}$ (unde eſt



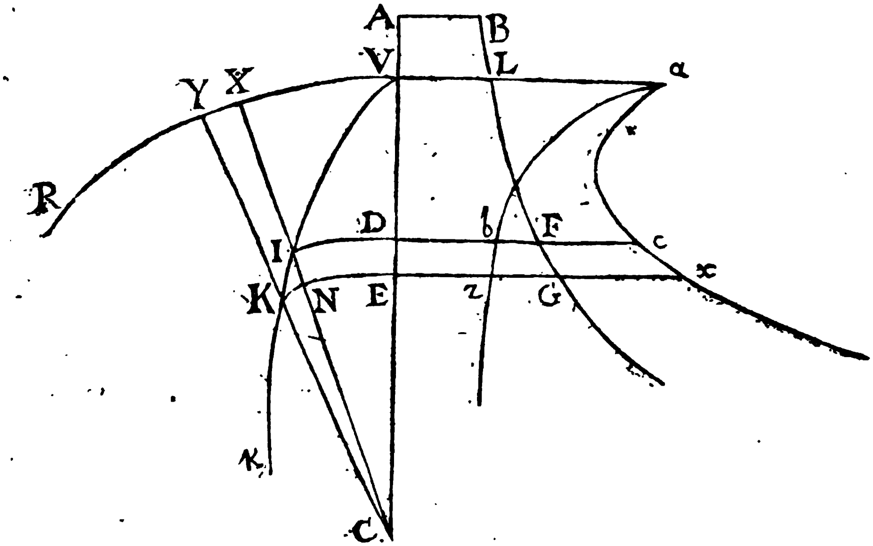
Q = Z × IC) erit ſemper $\sqrt{ABFD}$: Z = IC : Cq = IK : KN. Nam propter triangula IKN, ICq ſimilia, eſt IK ad KN ut IC ad Cq, ſed quia Z × IC (= Q) = Cq × $\sqrt{ABFD}$ eſt IC : Cq = $\sqrt{ABFD}$: Z ergo IK : KN = IC : Cq = $\sqrt{ABFD}$: Z.

(r) * *Ut IN^2, ad KN^2.* Eſt enim ob angulum INK rectum, $IK^2 - KN^2 = IN^2$.

* Ut

De Motu Corporum.

ideoque $\sqrt{ABFD - ZZ}$ ad Z ſeu $\frac{Q}{A}$ ut IN ad KN, & propterea $A \times KN$ æquale $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD - ZZ}}$. (f) Unde cum $YX \times XC$ ſit ad $A \times KN$ ut CXq ad AA, erit rectangulum $XY \times XC$ æquale $\frac{Q \times IN \times CX \; quad.}{AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$. Igitur ſi in perpendi-

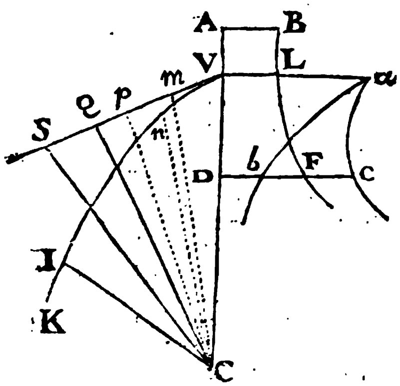


culo DF capiantur ſemper Db, Dc ipſis $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$, $\frac{Q \times CX \; quad.}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$ æquales reſpectivè, & deſcribantur curvæ lineæ ab, ac, quas puncta b, c perpetuo tangunt; deque puncto V ad lineam AC erigatur perpendiculum Va abſcindens areas curvilineas $VDba$, $VDca$, & erigantur etiam ordinatæ Ez, Ex: quoniam rectangulum $Db \times IN$ ſeu $DbzE$ æquale eſt dimidio rectanguli $A \times KN$ ſeu triangulo ICK; & rectangulum

(f) * *Undè cum* $YX \times XC : A \times KN = CX^2 : AA$. Sunt enim triangula naſcentia CKN, CYX ſimilia & eorum proindè areæ duplæ $YX \times XC$, $IC \times KN$ ſeu $A \times KN$, in ratione duplicata homologorum laterum CX, CI, ſive A.

† 413

$Dc \times IN$ ſeu $Dc \times E$ æquale eſt dimidio rectanguli $YX \times XC$ ſeu triangulo XCY; hoc eſt, quoniam arearum $VDba$, VIC æquales ſemper ſunt naſcentes particulæ $Dbz E$, ICK, & arearum $VDca$, VCX æquales ſemper ſunt naſcentes particulæ $Dcx E$, XCY, erit area genita $VDba$ æqualis areæ genitæ VIC, ideoque tempori proportionalis, & area genita $VDca$ æqualis ſectori genito VCX. Dato igitur tempore quovis ex quo corpus diſceſſit de loco V, (†) dabitur area ipſi proportionalis $VDba$, & inde dabitur corporis altitudo CD vel CI; & area $VDca$, eique æqualis ſector VCX unà cum ejus angulo VCI. Datis autem angulo VCI & altitudine CI datur locus I,



(†) 419. *Dabitur area ipſi proportionalis.* Datâ corporis velocitate & directione ſeu tangente in V, datur ſpatium VS quod corpus in illâ tangente dato tempore quo deſcribitur area VIC uniformi motu deſcriberet. Porrò junctâ CS, area trianguli CSV æqualis erit areæ VIC, quam corpus in curvâ VIK motum deſcribit eodem tempore quo uniformiter percurreretur VS. Nam tempuſculo naſcente velocitate æquabili ſpatium Vm deſcribatur in tangente VS, & eodem tempuſculo arcus Vn deſcribatur in curvâ VIK, erit (per prop. 1.) area VCm = VCn, & ob velocitatem uniformem in tangente ſingulo tempuſculo lineolæ æquales Vm, mp &c. percurrentur ideoque æquabuntur triangula VCM, mCp, &c., ſed pariter omnes areæ æqualibus tempuſculis deſcriptæ in curva VIK æquantur areæ VCn ſive VCm, undè patet ſummam arearum VCm + mCp + &c. æqualem eſſe ſummæ arearum quæ eodem tempore in curvâ deſcribuntur, hoc eſt, totas areas VCS, VIC, eodem tempore deſcriptas eſſe æquales. Cum igitur data ſit tangens VS & perpendiculum CQ in eam ductum, ex tempore dato dabitur area trianguli VCS, & area VIC ei æqualis; Hincque conceſſis figurarum quadraturis, invenietur area VDba = VCS = VIC, & indè dabitur VD, atque CD = CV — VD; dabitur quoque conſtans Q = QC × √ABLV (418).

420. Si ponatur variabilis IC = CD = x, data VC = a, erit VD = $a - x$ & $Z = \frac{Q}{x}$, conceſſiſque figurarum curvilinearum quadraturis area ABFD exprimi poterit per datas AV, VC & variabilem x, ac proinde iiſdem quantitatibus exprimi poterunt $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$ & $\frac{Q \times CX^2}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$, ſeu ordinatim applicatæ Db, Dc; & hinc obtinebuntur æquationes ad curvas ab, ac, ex conſtantibus & ſolis variabilibus CD, Db, vel Dc, compoſitæ, curvæque illæ poterunt deſcribi. Quoniam porrò eſt (per conſtr.) ſector VCX, æqualis areæ VDca, erit arcus $VX = \frac{2\,VDca}{CV}$; quarè invenitur angulus VCX, & indè punctum I, in trajectoriâ VIK.

421. Scholium. Datâ vi centripetâ in ſingulis locis trajectoriæ VIK, & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, trajectoria VIK deſcribi poteſt, ut in probl. XXVIII., licet gravitates maſſis non

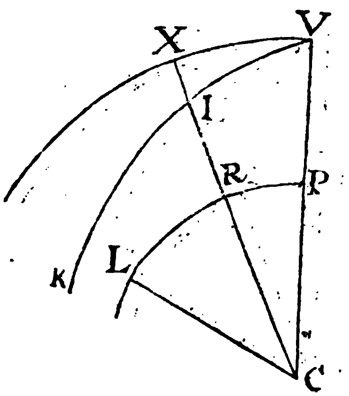
De Motu Corporum.

in quo corpus completo illo tempore reperietur. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc maximæ minimæque corporum altitudines, id eſt, apſides trajectoriarum expeditè inveniri poſſunt. Sunt enim apſides puncta illa in quibus recta *IC* per centrum ducta incidit perpendiculariter in trajectoriam *VIK*, id (t) quod fit ubi rectæ *IK* & *NK* æquantur, ideoque ubi area *ABFD* æqualis eſt ZZ.

(u) *Corol.* 2. Sed & angulus *KIN*, in quo trajectoria alicu-

ſupponantur proportionales, nec vis centripeta æqualis in æqualibus à centro diſtantiis. Nam factum M×EG, ex corporis maſſa M in perpendiculum EG, ejuſdem corporis gravitatem in loco quovis I exhibeat, ſitque BLFG curva quam punctum G perpetuò tangit, velocitas in loco V dicatur C, lineâ AB ita abſcindatur ut ſit area $ABLV = \frac{1}{2}CC$; erit velocitas in $I = \sqrt{2VLFD + 2ABLV}$ (416), id eſt $= \sqrt{2ABFD}$, adeóque ut $\sqrt{ABFD}$, undè *lineola IK dato tempore quam minimo deſcripta erit ut* $\sqrt{ABFD}$, *& triangulum ICK &c.* Cætera quæ in probl. XXVIII. ſolutione ſequuntur ratiocinia & conſtructiones manent eadem.



424. Trajectoria VIK, geometricè rationalis eſt ubi per æquationes finitas inveniri poteſt ſector circuli æqualis areæ VDca: & hujus ſectoris radius eſt ad CX radium, circuli VXY, ut *nn* ad 1 eſtque *nn* numerus rationalis poſitivus integer vel fractus. Sit enim ſector circuli LPC = areæ VDca, id eſt, æqualis ſectori VCX, ſitque radius CP ad radium CV, ut *n*, ad 1, erit CP×PL = CV×VX, & CP : CV = *n* : 1 = VX : PL, (per hyp.) & CP : CV = *n* : 1 = PR : VX (ex naturâ circuli). Quare per compoſitionem rationum & ex æquo *nn* : 1 = RP : PL. Si ergò fuerit *nn*, ad 1, ut numerus ad numerum, dato arcu PL, inveniri poterit arcus RP per æquationem finitam, cum poſſit ſemper arcus datus in datâ ratione numeri ad numerum per æquationem finitam dividi. Quoniam igitur aſſumptæ CI poſitio & punctum I, in curvâ VIK per finitas æquationes determinantur, erit VK curva algebraica ſeu geometricè rationalis. Hermannus prop. 25. Lib. I. Phoron, hoc elegans & difficile problema ſolvit: invenire canonem generalem determinandæ gravitatis variabilis pro omnibus curvis algebraicis in infinitum, quantitatibus finitis expreſſum.

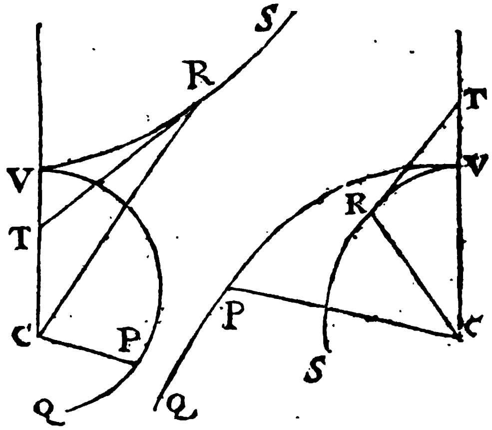
(t) * *Id quod fit ubi rectæ IK & KN æquantur.* Tunc enim punctum N coincidit cum puncto I, ob angulum KIN rectum, adeóque ob proportionem $\sqrt{ABFD} : Z = IK : KN$, fit $ABDF = ZZ = \frac{QQ}{IC^2}$, & $IC^2 \times ABFD = QQ$ quantitati datæ. Hinc cum conceſſis curvarum quadraturis data ſit area ABFD in quantitatibus conſtantibus & variabili IC ſeu CD, invenietur valor IC, hoc eſt, maximæ & minimæ altitudines corporis trajectoriam VK deſcribentis.

(u) * *Coroll.* 2. Ob angulum KNI rectum in triangulo naſcente KIN, ſinus anguli KIN eſt ad ſinum totum, ut KN ad IK, id eſt, ut Z (ſeu $\frac{Q}{IC}$) ad $\sqrt{ABFD}$. Verum datâ IC datur area ABFD, & indè ob quantitatem Q datam datur ratio

Q

ibi ſecat lineam illam *IC*, ex datâ corporis altitudine *IC* expeditè invenitur; nimirum capiendo ſinum ejus ad radium ut *KN* ad *IK*, id eſt, ut Z ad latus quadratum areæ *ABFD*.

(x) *Corol.* 3. Si centro *C* & vertice principali *V* deſcribatur ſectio quælibet conica *VRS*, & à quovis ejus puncto *R* agatur tangens *RT* occurrens axi infinitè producto *CV* in puncto *T*; dein junctâ *CR* ducatur recta *CP*, quæ æqualis ſit abſciſſæ *CT*, angulumque *VCP* ſectori *VCR* proportionalem conſtituat; tendat autem ad centrum *C* vis centripeta cubo diſtantiæ locorum à centro reciprocè proportionalis, & exeat corpus de loco *V* juſtâ cum velocitate ſecundum lineam rectæ *CV* perpendicularem: progredietur

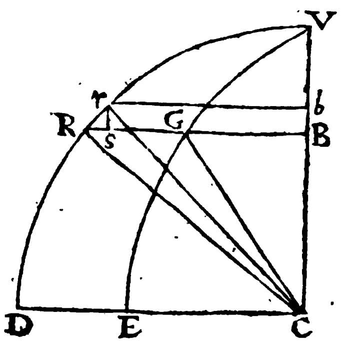


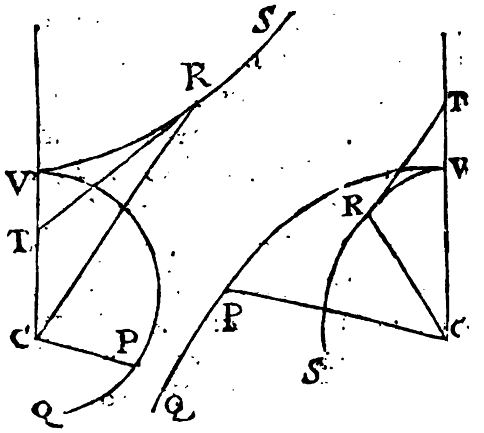
$\frac{Q}{IC}$ ad $\sqrt{ABFD}$, hoc eſt, ratio ſinûs anguli KIN, ad radium. Invenietur ergò ſinus anguli KIN, & hinc angulus ipſe cognoſcetur.

(x) 423. Lemma. Si fuerit DVC, circuli quadrans cujus radius CV $= r$ abſciſſa CB $= z$, ordinatæ infinitè propinquæ BR, br, fluxio arcûs DR erit $\frac{r\,dz}{\sqrt{rr-zz}}$, & fluxio ſectoris CDR $= \frac{\frac{1}{2}rr\,dz}{\sqrt{rr-zz}}$.

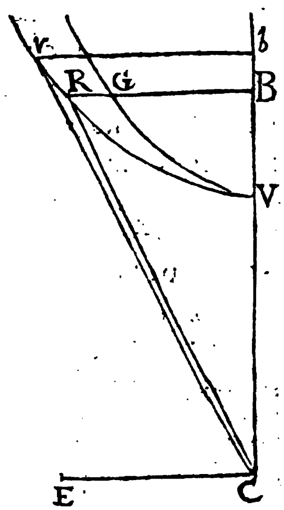
Eſt enim BR $= \sqrt{rr-zz}$, & demiſſâ ex puncto r in RB, perpendiculari rs, triangula ſimilia RCB, rRs, dant RB $(\sqrt{rr-zz})$: RC (r) = rs (dz) : Rr $= \frac{r\,dz}{\sqrt{rr-zz}}$. Q. e. 1. Porrò ſector naſcens CRr $= \frac{1}{2}$ CR × Rr $= \frac{\frac{1}{2}rr\,dz}{\sqrt{rr-zz}}$. Q. e. 2.

424. Coroll. Si fuerit EGVC, quadrans ellipſeos cujus centrum C, ſemiaxis unus CV $= r$, alter ſemiaxis CE $= c$, abſciſſa CB $= z$, & BG ordinatim applicata ad axem CV, ſectoris CEG fluxio erit $= \frac{\frac{1}{2}rc\,dz}{\sqrt{rr-zz}}$. Sunt enim ſectores CDR, CEG, adeóque & eorum fluxiones in datâ ratione r ad c, (251).





dietur corpus illud in trajectoriâ *VPQ* quam punctum *P* perpetuò tangit; ideoque ſi conica ſectio *VRS* hyperbola ſit, deſcendet idem ad centrum: Sin ea ellipſis ſit, aſcendet illud perpetuò & abibit in infinitum. Et contra, ſi corpus quâcunque cum velocitate exeat de loco *V*, & perindè ut incœperit vel obliquè deſcendere ad centrum, vel ab eo obliquè aſcendere, figura *VRS* vel hyperbola



425. Lemma. Si fuerit VRr, hyperbola æquilatera cujus centrum C, ſemiaxis tranſverſus CV $=r$, abſciſſa CB $=z$; RB ad axem ordinatim applicata, ſectoris hyperbolici CRV fluxio erit $\frac{\frac{1}{2}rrdz}{\sqrt{zz-rr}}$. Agatur enim rb ordinata, priori RB infinitè propinqua, ſitque RB $=y$, erit (ex naturâ hyperbolæ æquilateræ) $yy = zz-rr$, & $y=\sqrt{zz-rr}$. Undè $2ydy = 2zdz$, & $dy = \frac{zdz}{\sqrt{zz-rr}}$. Porrò triangulum CRB $=\frac{1}{2}zy$, & illius fluxio $= \frac{1}{2}zdy + \frac{1}{2}ydz =$ trapeſio BbrR + triang. CrR; ſed trapeſium naſcens BbrR $=ydz$, ergò ſector naſcens CrR $=\frac{1}{2}zdy - \frac{1}{2}ydz$

$$= \frac{\frac{1}{2}zzdz}{\sqrt{zz-rr}} - \frac{1}{2}dz \times \sqrt{.zz-rr}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}zzdz - \frac{1}{2}zzdz + \frac{1}{2}rrdz}{\sqrt{zz-rr}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}rrdz}{\sqrt{zz-rr}}.$$ Q. e. D.

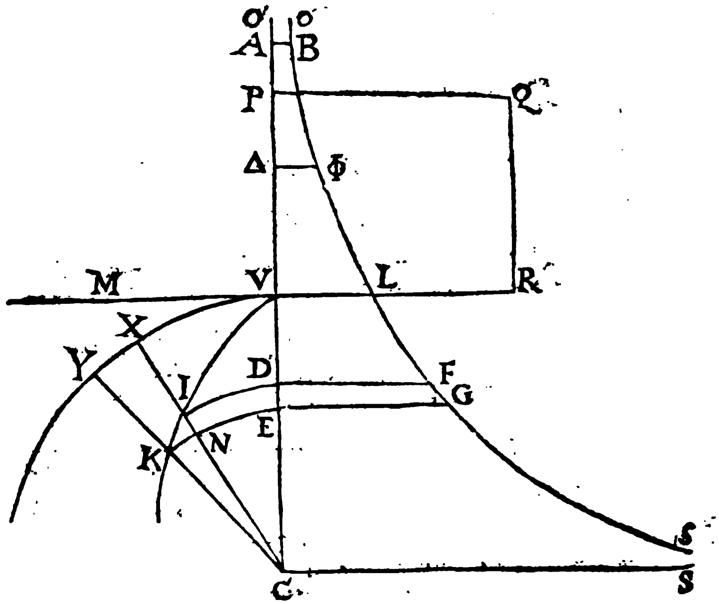
426. Coroll. 1. Quoniam (ex demonſtratis) $dy = \frac{zdz}{\sqrt{zz-rr}}$, & $yy=zz-rr$, erit $\frac{dz}{\sqrt{zz-rr}} = \frac{dy}{z}$, & $z=\sqrt{yy+rr}$, adeóque CrR $= \frac{\frac{1}{2}rrdz}{\sqrt{zz-rr}} = \frac{\frac{1}{2}rrdy}{\sqrt{yy+rr}}$.

427. Coroll. 2. Si deſcripta fuerit altera hyperbola GV, cujus idem centrum C, idem ſemiaxis tranſverſus CV $=r$, ſemiaxis conjugatus CE $=c$; ſectoris CGV fluxio erit $= \frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{zz-rr}} = \frac{\frac{1}{2}rcdy}{\sqrt{yy+rr}}$. Eſt enim ſector CRV ad ſectorem CGV, adeóque prioris fluxio ad fluxionem poſterioris in datâ ratione r ad c. (374).

428.

ſit vel ellipſis, inveniri poteſt trajectoria augendo vel minuendo angulum *VCP* in datâ aliquâ ratione. Sed &, vi centripetâ in centrifugam versâ, aſcendet corpus obliquè in trajectoriâ *VPQ*, quæ invenitur capiendo angulum *VCP* ſectori elliptico *VRC* proportionalem, & longitudinem *CP* longitudini *CT* æqua-

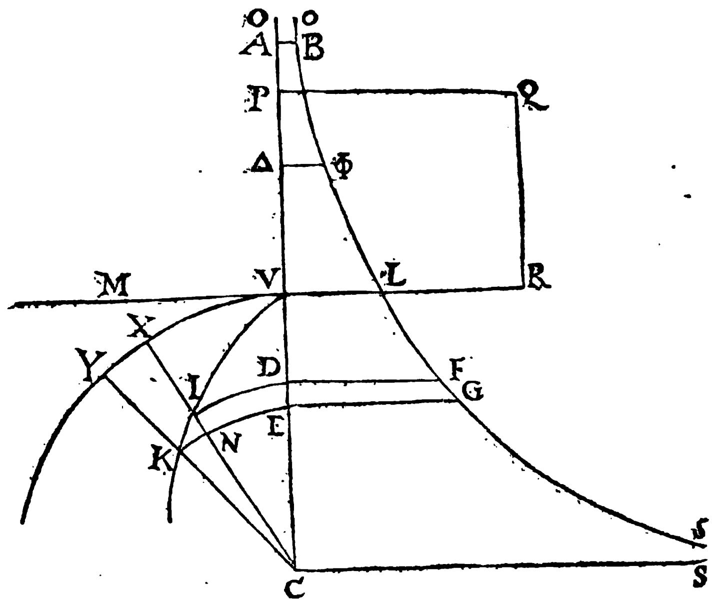
LIBER PRIMUS. PROP. XLI.



428. Lemma. Iiſdem poſitis quæ in ſuperioribus Newtoni propoſitionibus, ſit CV $=r$, CA $=a$, CD vel C$\Delta = x$, DF vel $\Delta\Phi = y$; & ſi fuerit vis centripeta in loco quovis D ut $\frac{1}{CD^3}$, ſitque $2f^4$ quantitas data; erit $y = \frac{2f^4}{x^3}$, æquatio ad curvam BFG, & quoniam in æquatione y infinita evadit ſi x ponatur $= 0$, & ſimiliter x infinita fit ſi $y = 0$, liquet rectas ſibi mutuò perpendiculares CO CS eſſe curvæ BFG aſymptotos. Area DFGE $= y\,dx = \frac{2f^4 dx}{x^3}$, undè ſumptis fluentibus additâque conſtanti Q; erit area in infinitum versùs S protenſa CDFsSC $= Q - \frac{f^4}{xx}$; Ponatur x infinita, & erit $\frac{f^4}{xx} = 0$, & area CDFsS, mutabitur in aream utrinque infinitè protenſam COosSC; quarè COosSC $=$ Q; & hinc COosSC $-$ CDFsSC $=$ ODFo $= Q - Q + \frac{f^4}{xx} = \frac{f^4}{xx}$, id eſt, area ODFo, vel OΔΦo verſus O in infinitum extenſa, æqualis eſt quantitati finitæ $\frac{f^4}{xx}$.

3 429. Co-

qualem ut ſupra. Conſequuntur hæc omnia ex propoſitione præcedente, per curvæ cujuſdam quadraturam, cujus inventionem, ut ſatis facilem, brevitatis gratiâ miſſam facio.



429. Coroll. 1. Area infinitè protenſa $OVLo = \frac{f^4}{rr}$; area $OABo = \frac{f^4}{aa}$ & proindè $\sqrt{OVLo} = \frac{ff}{r}$, $\sqrt{OABo} = \frac{ff}{a}$.

430. Coroll. 2. Area $ABLV = OVLo - OABo = \frac{f^4 \times \overline{aa - rr}}{rraa} = \frac{f^4 cc}{rraa}$, ponendo $aa - rr = cc$ (429) undè $\sqrt{ABLV} = \frac{f^2 c}{ra}$.

431. Coroll. 3. Similiter ſi punctum D ſit inter puncta data C, V, & punctum Δ inter puncta data V, A; erit area $AB\Phi\Delta$, vel $ABFD = \frac{f^4 \times \overline{aa - xx}}{aaxx}$, area $VLFD = \frac{f^4 \times \overline{rr - xx}}{rrxx}$, $\Delta\Phi LV = \frac{f^4 \times \overline{xx - rr}}{rrxx}$. (428. 429. 430.)

432. Iiſdem manentibus quæ in Lemmate ſuperiori (428) ſi corpus de loco V, cum velocitate quâlibet ſecundùm directionem VM ad CV perpendicularem projiciatur ut curvam VIK deſcribat, erit VM hujus curvæ tangens in puncto V, CV ad tangentem VM normalis, & velocitas projectionis æqualis erit velocitati quam corpus ex diſtantiâ infinitâ OV, cadendo acquireret in loco V, vel eâ minor, vel major.

433. Primus caſus. Velocitas projectionis æqualis ſit velocitati per ſpatium infinitum OV cadendo acquiſitæ in loco V, erit (418) quantitas data $Q = CV\sqrt{OVLo} = ff$ (429) & $Z = \frac{Q}{IC} = \frac{ff}{x}$. Sed (per prop. 41.) $\sqrt{ODFo} : Z = IK : KN$, hoc eſt, (428) $\frac{ff}{x} : \frac{ff}{x} = IK : KN$, ergò $IK = KN$, proindeque angulus KIN rectus eſt (cor. 2. prop. 41.) In hoc igi-

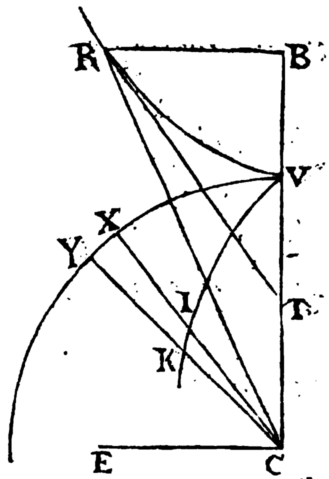
tur caſu trajectoria VIK eſt circulus VXY radio CV deſcriptus.

434. Hinc ſi velocitas projectionis minor fuerit velocitate quæ ex infinitâ diſtantiâ cadendo acquiritur in loco V, corpus in trajectoriâ VK motum ad centrum virium C perpetuò accedet, velocitas illius perpetuò creſcet, & punctum D ſemper erit inter data puncta V & C ſitum. Si verò projectionis velocitas major ſit velocitate per infinitum ſpatium cadendo acquiſitâ, corpus in trajectoriâ VIK, à centro ſemper recedet, illius velocitas continuò decreſcet & punctum Δ puncto I correſpondens, puncto dato V ſuperius erit.

435. Si manente caſûs primi hypotheſi, directio VM ad CV perpendicularis non ſit, & perpendiculum è centro C in projectionis directionem demiſſum dicatur p, erit $Q = \frac{pff}{r}$, $Z = \frac{pff}{rx}$, & $\sqrt{ODFo}\left(\frac{f^2}{x}\right) : Z\left(\frac{pff}{rx}\right) = r : p = IK : KN$. Hoc eſt, (per coroll. 2. prop. 41.), ſinus totus ad ſinum anguli KIN, in datâ ratione adeóque angulus KIN datus, & trajectoria VK ſpiralis logarithmica.

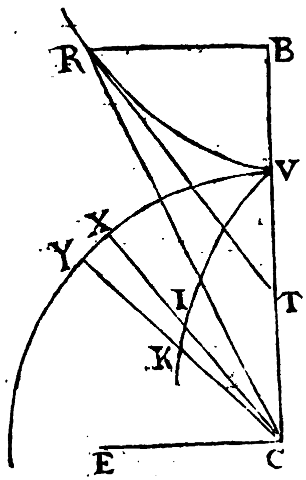
436. Caſus ſecundus. Velocitas projectionis æqualis ſit velocitati quam corpus de loco aliquo dato A, cadendo haberet in V, erit $Q = CV \times \sqrt{ABLV} = \frac{ffc}{a}$ (430) $Z = \frac{ffc}{ax}$, $ZZ = \frac{f^4cc}{aaxx}$, $ABFD = \frac{f^4 \times aa - xx}{aaxx}$ (431.), undè $ABFD - ZZ = \frac{f^4 \times aa - cc - xx}{a^2x^2} = \frac{f^4 \times rr - xx}{a^2x^2}$, ob $a^2 - cc = rr$ (430) & $\sqrt{ABFD - ZZ} = \frac{ff\sqrt{rr - xx}}{ax}$. Cum igitur (in prop. 41.) ſit $A = IC = CD = x$, $DE = IN = dx$, $CX = CV = r$, erit $\frac{Q \times CX^2 \times IN}{2AA} = \frac{\frac{1}{2}ffrrcdx}{axx}$ & $\frac{Q \times CX^2 \times IN}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}} = \frac{\frac{1}{2}rrcdx}{x\sqrt{rr - xx}} =$ ſectori CXY. Quoniam autem creſcente IC ſeu x, decreſcit ſector YXC (434) ſcribendum eſt $CXY = -\frac{\frac{1}{2}rrcdx}{x\sqrt{rr - xx}}$ (159).

Ponatur $x = \frac{rr}{z}$, erit $xx = \frac{r^4}{zz}$, $rr - xx = \frac{rrzz - r^4}{zz}$, $\sqrt{rr - xx} = \frac{r\sqrt{zz - rr}}{z}$, & $zx = rr$, ſumptiſque fluxionibus $zdx + xdz = o$, & proindè $-\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}$, hiſque valoribus ſubſtitutis invenitur $-\frac{\frac{1}{2}rrcdx}{x\sqrt{rr - xx}} = \frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{zz - rr}} = CXY$.



Centro C, ſemiaxe tranſverſo $CV = r$ ſemiaxe conjugato $CE = c$, deſcribatur hyperbola VR, ex cujus puncto quovis R, demittatur ad axem perpendiculum RB, & tangens RT, axi occurrens in T, & CB, dicatur $= z$, erit (427) $\frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{zz - rr}}$, fluxio ſectoris hyperbolici CRV, & (ex conicis) CB (z) : CV (r) = CV (r) : $CT = \frac{rr}{z} = x = CI$. Itaque cum ſit $CXY = \frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{zz - rr}}$, ſi ſumantur utrinque fluentes additâ conſtanti Q erit ſector circuli CXV, æqualis ſectori hyperbolico CRV + Q. invenitur autem $Q = o$. Nam poſitâ CT ſeu $x = r$,

De Motu Corporum.



$x=r$, fit quoque $z=r$, ob $\frac{rr}{z}=x$, & puncta B & V coeunt, evaneſcitque ſector CRV, & quoniam poſitâ $x=r$ corpus projectum eſt in V, punctum X coincidet quoque in hoc caſu cum puncto V, & fit CXV=o, undè æquatio CXV=CRV+Q, mutatur in hanc o=o+Q. Nulla igitur eſt quantitas conſtans addenda vel ſubducenda, ſed eſt ſemper CXV=CRV. Quare invenitur punctum I in trajectoriâ VIK, capiendo ſectorem CXV=CRV, & in lineâ CX ſumendo CI=CT.

437. Caſus 3us. Projectionis velocitas major ſit velocitate per ſpatium infinitum cadendo acquiſitâ. Sit P locus de quo corpus cadere debet ut urgente gravitate uniformi velocitatem acquirat in loco V æqualem velocitati projectionis. In perpendiculo VL, capiatur VR ad VL in ratione vis gravitatis uniformis ad vim centripetam variabilem in loco V, & compleatur rectangulum PVRQ cujus latus quadratum dicatur e; & velocitas projectionis erit ut e, (per cor. 1. prop. 39.) Quarè (430) $Q=re$, $ZZ=\frac{rree}{xx}$; & quoniam velocitas corporis trajectoriam VIK deſcribentis continuò decreſcit atquè corpus à centro C perpetuò recedit (434), loco areæ ABFD, (prop. 41.) capienda eſt quantitas $ee-\Delta\phi LV=ee-\frac{f^4\times xx-rr}{rrxx}$ (431) $=\frac{rreexx-f^4xx+f^4rr}{rrxx}$, & quantitas ABFD−ZZ, (prop. 41.) erit hic $=\frac{r^2e^2xx-f^4xx+f^4rr-r^4ee}{rrxx}$. Eſt autem area rectanguli PVRQ major areâ infinitè protenſâ OVLo, hoc eſt, quantitas ee major quam $\frac{f^4}{rr}$, & proindè $rree-f^4$, quantitas poſitiva, fiat igitur $rree-f^4=bbrr$, & quantitas ABFD−ZZ. (prop. 41.) evadet $=\frac{bbrrxx-bbr^4}{rrxx}$, & $\sqrt{ABFD-ZZ}=\frac{b\sqrt{xx-rr}}{x}$; Hinc factis debitis ſubſtitutionibus, formula (prop. 41.) $\frac{Q\times CX^2\times IN}{2AA\sqrt{ABFD-ZZ}}$, in hanc mutabitur

$$\frac{r^3edx}{2xx}\times\frac{x}{b\sqrt{xx-rr}}=\frac{\frac{1}{2}r^3edx}{bx\sqrt{xx-rr}}=\frac{\frac{1}{2}r^2cdx}{x\sqrt{xx-rr}}$$

ponendo $\frac{re}{b}=c$. Quarè ſector circuli

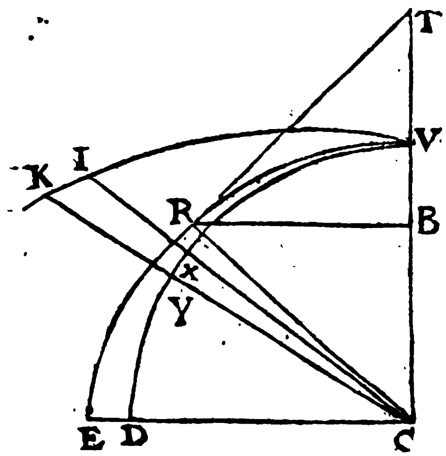
$CXY=\frac{\frac{1}{2}r^2cdx}{x\sqrt{xx-rr}}$. Fiat $x=\frac{rr}{z}$ & erit $\frac{dx}{x}=\frac{-dz}{z}$, ac $\sqrt{xx-rr}=\frac{r\sqrt{rr-zz}}{z}$

atquè $\frac{\frac{1}{2}r^2cdx}{x\sqrt{xx-rr}}=-\frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{rr-zz}}$ = CXY. Centro C, ſemiaxe CV $=r$, & altero ſemiaxe CE $=c$, deſcribatur ellipſeos quadrans VE, ex cujus puncto quovis R agatur ad axem CV perpendiculum RB, & tangens RT axi producto occurrens in T, & CB dicatur $=z$, erit (ex conicis) CB (z) : CV (r) = CV (r) : CT $=\frac{rr}{z}=x=$ CI;

& (424) $\frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{rr-zz}}$, fluxio ſectoris elliptici

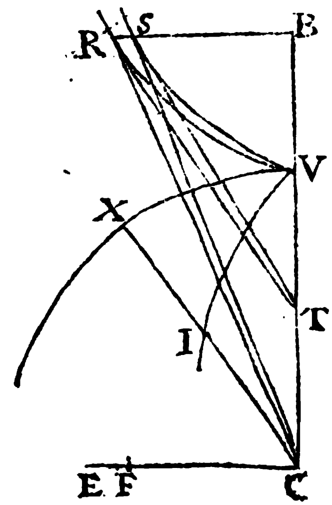
CRE; quarè cum ſit $CXY=-\frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{rr-zz}}$, ſi ſumantur utrinque fluentes additâ conſtanti Q, erit ſector circuli CXV = Q − CRE. Ut inveniatur valor quantitatis conſtantis Q, ponatur CXV = o, & erit Q = CRE; ſed ubi CXV = o puncta X & I cum puncto V coeunt, & fit CT ſeu

CI



CI=CV, adeóque punctum R coincidit etiam cum puncto V, & ſector CER, æqualis ſit quadranti CEV; ergò Q=CEV. Eſt igitur ſemper CXV=CEV−CRE =CRV. Itaque ut inveniatur trajectoriæ VIK punctum I, capiatur ſector circuli CXV, æqualis ſectori elliptico CRV, & in lineâ CX, productâ capiatur CI=CT, erit I punctum in trajectoriâ quæſitâ.

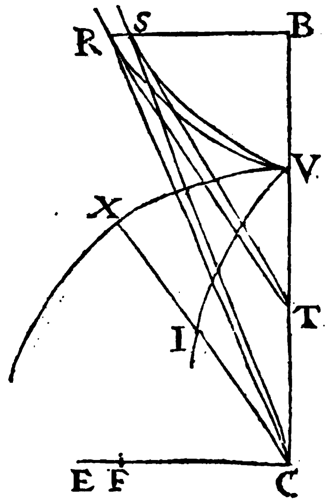
438. Datâ velocitate projectionis & magnitudine vis centripetæ variabilis, hoc eſt, ipſius ratione ad aliquam vim centripetam uniformem notam in loco dato V, (fig. not. 430.) deſcribi poteſt trajectoria VIK. Iis enim datis, dabitur locus P ex quo corpus urgente vi centripetâ conſtante cadere debet ut in loco V datam projectionis velocitatem habeat; & ſumptâ VR ad VL in datâ ratione vis centripetæ conſtantis ad vim centripetam variabilem in loco V, dabitur rectangulum PQRV. Porrò ſi rectangulum illud æquale fuerit areæ infinitè protenſæ OVLo, corpus circulum deſcribet (per caſ. 1. not. 433.); ſi rectangulum minus eſt areâ OVLo, inveniri poterit punctum A, ex quo ducta perpendicularis AB, abſcindat aream ABLV æqualem rectangulo PQRV; & trajectoria VIK, deſcribetur (per conſtr. caſ. 2^{i}.) (436). Si rectangulum PQRV areâ OVLo majus eſt, adhibenda erit conſtructio caſûs 3^{i}. (437). Obſervandum autem eſt ſectores circulares eſſe angulis ſuis ad centrum proportionales; undè in ſubſequentibus conſtructionibus loco ſectorum circuli, uti poſſumus angulis qui ad ſectores hyperbolicos vel ellipticos datam habeant rationem.



439. Caſus 2us. & 3us. conſtrui poſſunt per hyperbolam vel ellipſim, cujus ſit ſemiaxis CV=r, & alter ſemiaxis quilibet. Nam iiſdem poſitis quæ in conſtructione caſûs 2^{i}., ſemiaxe tranſverſo CV=r, & ſemiaxe quovis conjugato CF, deſcribatur hyperbola altera SV, quam in S ſecat perpendiculum RB; tangentes RT, ST per puncta R, S ductæ axi occurrunt in eodem puncto T, (257) & ſector CRV eſt ad ſectorem CSV in datâ ratione CE ad CF (374). Quarè cum (per conſtr. caſ. 2^{i}.) ſector circuli CXV æqualis ſit ſectori CRV, erit etiam ad ſectorem CSV in datâ ratione CE ad CF, atquè itâ punctum trajectoriæ I invenietur capiendo ſectorem CXV ad ſectorem CSV, in datâ ratione CE ad CF, & in radio CX, capiendo CI=CT. Idem eodem modo demonſtratur in caſu 3°.

440. Hinc ſi (juxtà conſtructionem Coroll. 3. prop. 41.) deſcribatur curva VI capiendo angulum VCI ſectori conico VCR proportionalem, vel quod in idem recidit, capiendo ſectorem circuli CXV ad ſectorem conicum VCR in

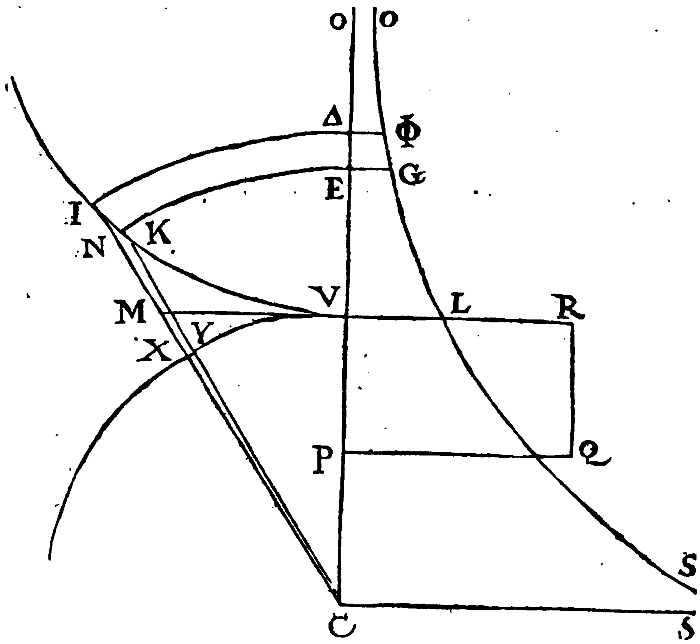
De Motu Corporum.



in datâ ratione, & $CI = CT$, inveniri poterit velocitas quâ corpus de loco V, ſecundùm lineam ipſi CV perpendicularem projici debet ut in trajectoriâ deſcriptâ VI progrediatur. Nam ſit VS hyperbola quævis, centro C, ſemiaxe tranſverſo $CV = r$, ſemiaxe conjugato CF deſcripta, data erit ratio ſectoris circuli CXV, ad ſectorem hyperbolicum CSV, (ex hyp.) ſeu (439) ratio CB ad datam CF; ergò dabitur CE, ſeu c; Eſt autem in caſ. 2°. (430, 436) $cc = aa - rr$ adeóque $aa = rr + cc$; & hinc datis r & c, dabitur a, ſeu AC, (fig. not. 428). Dato autem puncto A, & vi centripetâ, datur rectangulum PQRV, æquale areæ ABLV, & indè velocitas projectionis habetur, (438). Si trajectoria VI, per ſectores ellipſeos deſcripta fuerit, ſimiliter invenietur c; eſt autem in caſu 3°. (437) $c = \frac{re}{b}$, & $rree - f^4 = bbrr$, adeóque $b = \frac{re}{c}$, $bb = \frac{rree}{cc}$, & $bb = \frac{rree - f^4}{rr} = \frac{rree}{cc}$; quarè $ccrree - r^4ee = f^4cc$, & $ee = \frac{f^4cc}{ccrr - r^4} = \frac{f^4}{rr} \times \frac{cc}{cc - rr}$, cum igitur datæ ſint c, & r, ac $\frac{f^4}{rr}$ = areæ datæ OVLo (429); dabitur ee, ſeu rectangulum PQRV (437) & hinc velocitas projectionis in V, habetur (438). Patet autem in hoc caſu c majorem eſſe debere radio r, ſeu CV, alioquin problema eſſet impoſſibile, cum ſit $e = \frac{ff}{r} \times \frac{c}{\sqrt{cc - rr}}$.

441. Vis centripeta in centrifugam vertatur, ſeu directionem in contrariam mutet, & corpus per rectam VM ad CV perpendicularem cum quâvis velocitate projiciatur, ut trajectoriam VKI deſcribat. Sit ut in caſû 3°. (437) PV ſpatium per quod vi centrifugâ conſtante urgeri debet corpus ut velocitatem acquirat in V velocitati projectionis æqualem, & RV ad LV ut vis centrifuga conſtans ad variabilem in V, & rectangulum PRQV, dicatur ee; velocitas projectionis in V, erit ut e, (per cor. 1. prop. 39.) & quoniam velocitas in receſſu à centro ſemper creſcit, erit velocitas in I vel Δ, ut $\sqrt{ee + \Delta\Phi LV}$, quæ (in formulâ prop. 41.) ſubſtitui debet loco $\sqrt{ABFD}$. Invenietur etiam (430) $Q = re$, $ZZ = \frac{rree}{xx}$, $ee + \Delta\Phi LV = ee + \frac{f^4 \times \overline{xx - rr}^2}{rrxx}$ (431) $= \frac{rreexx + f^4xx - f^4rr}{rrxx}$. Hinc quantitas $ABFD - ZZ$ (propoſ. 41.) fiet hic $= \frac{rreexx + f^4xx - f^4rr - r^4ee}{rrxx} = \frac{bbrrxx - bbr^4}{xx}$, ponendo $rree + f^4 = bbrr$. Quarè $\sqrt{ABFD - ZZ} = \frac{b\sqrt{xx - rr}}{x}$. Factis igitur debitis ſubſtitutionibus, formula prop. 41. $\frac{Q \times CX^2 \times IN}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$, in hanc mutatur $\frac{\frac{1}{2}r^3edx}{bx\sqrt{xx - rr}} = \frac{\frac{1}{2}r^2cdx}{x\sqrt{xx - rr}}$, ponendo $\frac{re}{b} = c$. Quarè ſector circuli $CXY = \frac{\frac{1}{2}r^2cdx}{bx\sqrt{xx - rr}}$, ut in caſ. 3°. (437). Igitur trajectoria VI conſtruetur per ſectores ellipticos prorſus ut in hoc 3°. caſu.

442. Schol. Keillius ad calcem introduc-



ductionis ad veram aſtronomiam, inverſum problema virium centripetarum in ratione triplicatâ diſtantiæ à centro decreſcentium generatim ac perſpicuè ſolvit, & trajectoriarum quæ in hâc hypotheſi deſcribuntur plures proprietates demonſtravit, inter alias iſtam, earum omnium, ſi circulum exceperis, areas eſſe perfectè quadrabiles, quæ quidem de omnibus trajectoriis per conſtr. coroll. 3. prop. 41. deſcriptis facilè demonſtratur. Nam (per prop. 41.) arearum illarum fluxio

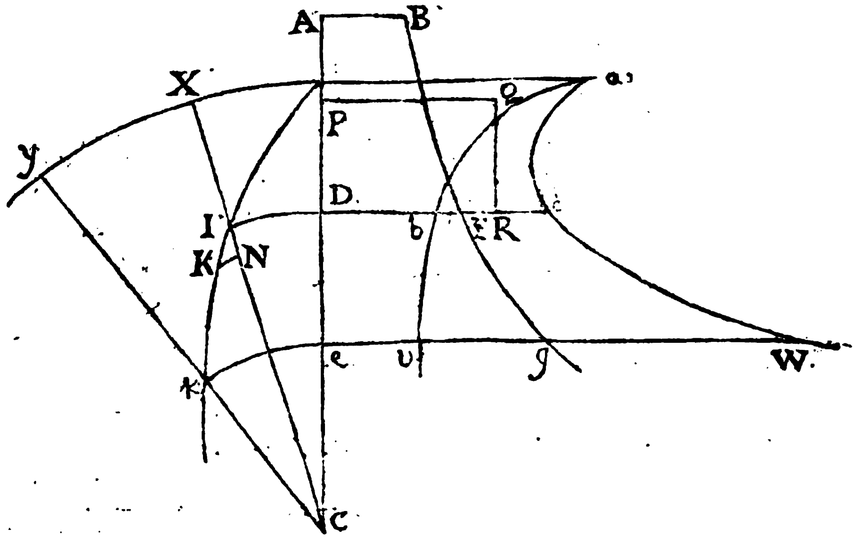
$$CIK = \frac{Q \times IN}{2\sqrt{ABFD - ZZ}} = \frac{-\frac{1}{2}cxdx}{\sqrt{rr - xx}}$$

in caſ. 1°. & $CIK = \frac{Q \times IN}{2\sqrt{ABFD - ZZ}} = \frac{\frac{1}{2}cxdx}{\sqrt{xx - rr}}$ in caſu 3°. (437. 441.). Ponatur 1°. $\sqrt{rr - xx} = z$; & erit $rr - xx = zz$, $-xdx = zdz$, & $-\frac{\frac{1}{2}cxdx}{\sqrt{rr - xx}} = CIK = \frac{1}{2}cdz$, & ſumptis fluentibus, ſector $CIV = \frac{1}{2}cz = \frac{1}{2}c\sqrt{rr - xx}$, nulla enim eſt addenda quantitas conſtans. Ponatur 2°. $\sqrt{xx - rr} = y$, & proindè $xx - rr = yy$, $xdx = ydy$, erit $CIK = \frac{\frac{1}{2}cxdx}{\sqrt{xx - rr}} = \frac{1}{2}cdy$, & ſector fluens $CIV = \frac{1}{2}cy = \frac{1}{2}c\sqrt{xx - rr}$.

PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXIX.

Datâ lege vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, ſecundum datam rectam egreſſi.

Stantibus quæ in tribus propoſitionibus præcedentibus: exeat



corpus de loco *I* ſecundum lineolam *IK*, eâ cum velocitate quam corpus aliud, vi aliquâ uniformi centripetâ, de loco *P* cadendo acquirere poſſet in *D*: ſitque hæc vis uniformis ad vim, quâ corpus primum urgetur in *I*, ut *DR* ad *DF*. Pergat autem corpus verſus *k*; centroque *C* & intervallo *Ck* deſcribatur circulus *ke* occurrens rectæ *PD* in *e*, & erigantur curvarum *BFg*, *abv*, *acw* ordinatim applicatæ *eg*, *ev*, *ew*. (y) Ex dato

(y) * *Ex dato rectangulo* P D R Q *&c.* Ex datâ vis centripetæ lege, datur curva linea B F G, (per conſtr. 1æ. partis prop. 39). Dato rectangulo PDRQ, datur locus A, de quo corpus urgente vi centripetâ variabili cadere debet, ut velocitatem acquirat in loco D, æqualem velocitati quam corpus aliud urgente aliquâ uniformi vi centripetâ notâ ex loco P cadens acquiſivit eodem loco D, (per cor. 1. prop. 39.) dato autem loco A, & deſcriptâ curvâ BFg, deſcribi poterit altera curva V L M, (per conſtr. & fig. 2æ. ptis. Prop. 39).

dato rectangulo *PDRQ*, datâque lege vis centripetæ quâ corpus primum agitatur, datur curva linea *BFg*, per conſtructionem problematis XXVII, & ejus corol. 1. (z) Deinde ex dato angulo *CIK* datur proportio naſcentium *IK*, *KN*, & inde, per conſtructionem prob. XXVIII. datur quantitas Q, unà cum curvis lineis *abv*, *acw*: ideoque, completo tempore quovis *Dbve*, datur tum corporis altitudo *Ce* vel *Ck*, tum area *Dcwe*, eique æqualis ſector *XCy*, angulusque *ICk*, & locus *k* in quo corpus tunc verſabitur. *Q. E. I.*

Supponimus autem in his propoſitionibus vim centripetam in receſſu quidem à centro variari ſecundum legem quamcunque, quam quis imaginari poteſt, in æqualibus autem à centro diſtantiis eſſe undique eandem. Atque hactenus motum corporum in orbibus immobilibus conſideravimus. Supereſt ut de motu eorum in orbibus, qui circa centrum virium revolvuntur, adjiciamus pauca.

(z) * *Deinde.* Cum ſit IK ad KN; ut ſinus totus ad ſinum anguli dati NIK, (per cor. 2. prop. 41.) dabitur quantitas conſtans Q, unà cum curvis lineis abu. acw, eſt enim $IK : KN = \sqrt{ABFD}$ (ſive $\sqrt{PDRQ}$) $: Z$; eſt ergo data Z (per conſtr. probl. 28. & not. 418). & $Z = \frac{Q}{A}$ ſive $A \times Z = Q$ unde habetur Q, ex quibus habentur quantitates $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$ & $\frac{Q \times CX^2}{2A^2 \times \sqrt{ABFD - ZZ}}$ quæ ſunt ordinatæ curvarum abv, acw.

SECTIO IX.

De motu corporum in orbibus mobilibus, deque motu apſidum.

PROPOSITIO XLIII. PROBLEMA XXX.

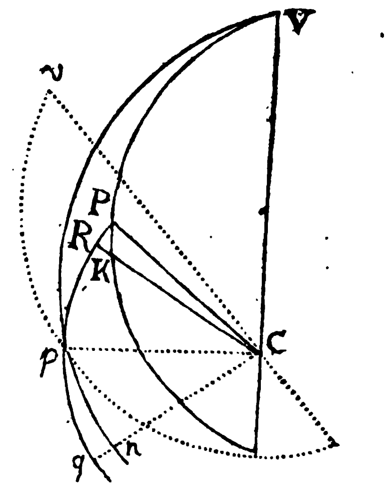
(a) *Efficiendum eſt ut corpus in trajectoriâ quâcunque circa centrum virium revolvente perinde moveri poſſit, atque corpus aliud in eâdem trajectoriâ quieſcente.*

In orbe *VPK* poſitione dato revolvatur corpus *P* pergendo à *V* verſus *K*. A centro *C* agatur ſemper *Cp*, quæ ſit ipſi *CP* æqualis, angulumque *VCp* angulo *VCP* proportionalem conſtituat; & (b) areæ, quam linea *Cp* deſcribit, erit ad aream *VCP*, quam linea *CP* ſimul deſcribit; ut velocitas lineæ deſcribentis *Cp* ad velocitatem lineæ deſcribentis *CP*; hoc eſt, ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*, ideoque in datâ ratione, & prop-

(a) * *Efficiendum eſt.* Sit VPK quælibet immota trajectoria quam corpus P ad centrum virium C tendens deſcribat pergendo ab V verſus K, invenienda eſt lex vis centripetæ ad C tendentis, quâ urgente corpus aliud p feratur in perimetro figuræ u p, priori ſimilis & æqualis, intereadum hæc ipſa figura u p, circà C revolvitur in uno eodemque plano, ità ut dum corpus P, arcum quemlibet ut V P, percurrit in orbe quieſcente V P, aliud corpus p, ſimilem & æqualem arcum u p, percurrat in orbe revolvente u p.

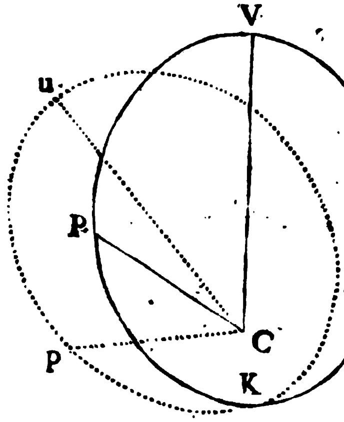
443. Si fuerit C V ad trajectoriam VPK in puncto V perpendicularis, hoc eſt, ſi ſit C V linea apſidum in orbe quieſcente, & correſpondens C u linea apſidum in orbe revolvente, motus angularis lineæ C u dicitur apſidum motus, qui in conſequentia fit, ubi linea C u, in eandem partem fertur cum corpore P, vel p. In antecedentia verò ubi linea C u, & corpus P, vel p, in plagas contrarias tendunt.

(b) * *Et area quam linea C p, deſcribit.* Sit V p n curva quam corpus p in orbe mobili u p revolvens deſcribit, centro C, intervallo C P, vel C p, deſcribatur circuli arcus P p q, agatur radius C R orbem



quieſcentem V P K ſecans in K, & radius C q, trajectoriam V p n, ſecans in n, ſintque K, n, loca in quibus eodem tempore reperiuntur corpora P, p, id eſt, arcus P K, p n, ſint eodem tempore deſcripti. Naſcentibus arcubus P R, p q, ſectores P C K, p C n, æquales ſunt factis $\frac{1}{2}$ PC

propterea tempori proportionalis. Cum area tempori proportionalis ſit quam linea *Cp* in plano immobili deſcribit, manifeſtum eſt quod corpus, cogente juſtæ quantitatis vi centripetâ revolvi poſſit unà cum puncto *p* in curvâ illâ lineâ quam punctum idem *p* ratione jam expoſitâ deſcribit in plano immobili. Fiat angulus *VCu* angulo *PCp*, & linea *Cu* lineæ *CV*, atque figura *uCp* figuræ *VCP* æqualis, & corpus in *p* ſemper exiſtens movebitur in perimetro figuræ revolventis *uCp*, eodemque tempore deſcribet arcum ejus *up* quo corpus aliud *P* arcum ipſi ſimilem & æqualem *VP* in figurâ quieſcente *VPK* deſcribere poteſt. Quæratur igitur, per corollarium quintum propoſitionis VI., vis centripeta quâ corpus revolvi poſſit in curvâ illâ lineâ quam punctum *p* deſcribit in plano immobili, & ſolvetur problema. *Q. E. F.*



PRO-

$\frac{1}{2}$ PC×PR, $\frac{1}{2}$ pC×pq, adeóque ob pC=PC ſectores illi ſunt inter ſe ut arcus PR, pq, ſeu ut anguli PCK, pCn; ſed quoniam angulus VCK, eſt ad angulum VCn, in datâ ratione anguli VCP, ad angulum VCp (per hyp.) erit dividendo angulus VCK—VCP, ad angulum VCn—VCp, hoc eſt, angulus PCK, ad angulum pCn, in datâ ratione anguli VCP, ad VCp, atquè adeò ſector PCK, ad ſectorem pCn, in eâdem ratione datâ. Undè (per cor. Lem. 4.) totus ſector VpC, eſt ad totum ſectorem VPC, eodem tempore deſcriptum in datâ ratione, ſive ſector VpC, eſt ut ſector VPC, proindéque (per prop. 1.) ut tempus quo ſector uterque deſcribitur. Quarè manifeſtum eſt (per prop. 2.) quod corpus p, cogente juſtæ quantitatis vi centripetâ revolvi poſſit in curvâ lineâ Vpn, quam punctum p perpetuò tangit. Porrò dato orbe VPK, & virium centro C, datur longitudo & poſitio lineæ CP, per (ſuperiorem Newt. conſtr.) ideoque & lineæ Cp, & hinc datur punctum quodlibet p, in trajectoriâ Vpn, adeóque & ipſa trajectoria datur. Inveniri igitur poteſt (per cor. 5. prop. 6). Lex vis centripetæ quâ corpus p, in trajectoriâ illâ Vpn revolvi poteſt.

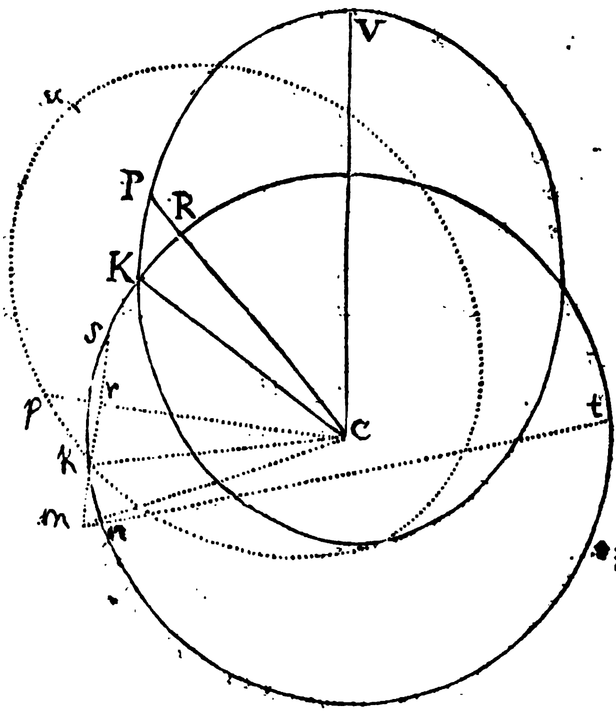
Quoniam autem angulus VCP æqualis eſt angulo vCp (per conſtr.) erit quoque angulus VCv æqualis angulo PCp, adeóque datâ Cp, magnitudine & poſitione, facilè invenitur poſitio lineæ apſidum Cv in orbe mobili Vp: Fiat enim angulus VCv angulo PCp, & linea Cv lineæ CV, atque figura uCp, figuræ VCP ſimilis & æqualis, & corpus unà cum puncto p, ſemper latum & figuram immotam Vpn deſcribens, deſcribit etiam perimetrum up, figuræ revolventis uCp, eodemque tempore deſcribit arcum ejus vp, quo corpus aliud P arcum ipſi ſimilem & æqualem VP, in figurâ quieſcente VPK, deſcribere poteſt. Vide Varignonium Legem vis centripetæ in trajectoriâ Vpn determinantem, in Comm. Pariſ. 1705.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XIV.

Differentia virium, quibus corpus in orbe quieſcente, & corpus aliud in eodem orbe revolvente æqualiter moveri poſſunt, eſt in triplicatâ ratione communis altitudinis inverſe.

Partibus orbis quieſcentis *VP*, *PK* ſunto ſimiles & æquales orbis revolventis partes *up*, *pk*; & punctorum *P*, *K* diſtantia intelligatur eſſe quam minima. A puncto *k* in rectam *pC* demitte perpendiculum *kr*, idemque produc ad *m*, ut ſit *mr* ad



kr ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*. Quoniam corporum altitudines *PC* & *pC*, *KC* & *kC*, ſemper æquantur, manifeſtum eſt quod linearum *PC* & *pC* incrementa vel decrementa ſemper ſint æqualia, ideoque ſi corporum in locis *P* & *p* exiſtentium diſtinguantur motus ſinguli (per legum corol. 2) in bi-

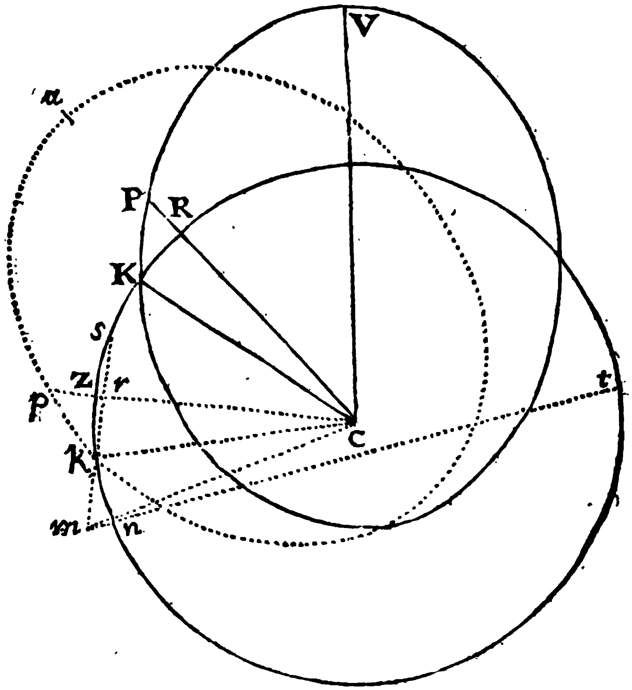
nos,

nos, quorum hi verſus centrum, ſive ſecundum lineas PC, pC determinentur, & alteri prioribus tranſverſi ſint, & ſecundum lineas ipſis PC, pC perpendiculares directionem habeant; motus verſus centrum erunt æquales, & motus tranſverſus corporis p erit ad motum tranſverſum corporis P, ut motus angularis lineæ pC ad motum angularem lineæ PC, id eſt, ut angulus VCp ad angulum VCP. Igitur eodem tempore quo corpus P motu ſuo utroque pervenit ad punctum K, corpus p æquali in centrum motu æqualiter movebitur à p verſus C, ideoque completo illo tempore reperietur alicubi in lineâ mkr, quæ per punctum k in lineam pC perpendicularis eſt; & motu tranſverſo acquiret diſtantiam à lineâ pC, quæ ſit ad diſtantiam quam corpus alterum P acquirit à lineâ PC, ut eſt motus tranſverſus corporis p ad motum tranſverſum corporis alterius P. Quare cum kr æqualis ſit diſtantiæ quam corpus P acquirit à lineâ PC, ſitque mr ad kr ut angulus VCp ad angulum VCP, hoc eſt, ut motus tranſverſus corporis p ad motum tranſverſum corporis P, (c) manifeſtum eſt quod corpus p completo illo tempore reperietur in loco m. Hæc ita ſe habebunt ubi corpora p & P æqualiter ſecundum lineas pC & PC moventur, ideoque æqualibus viribus ſecundum lineas illas urgentur. Capiatur autem angulus pCn ad angulum pCk ut eſt angulus VCp ad angulum VCP, ſitque nC æqualis kC, & corpus p completo

(c) * *Manifeſtum eſt quod corpus p &c.* Ex puncto K in rectam P C, demiſſum intelligatur perpendiculum K R, & erit P R = p r. Fingamus corpus P de loco P ità projici ut vi ſecundum directionem P C, urgente percurrat ſpatium P R, eodem tempore quo vi alterâ ſecundum rectam ipſi R K, parallelam impellente, percurrit ſpatium æquale rectæ R K, adeo ut eo tempore viribus conjunctis deſcribat diagonalem P K. Fingamus ſimiliter corpus p, de loco p ità projici, ut vi ſecundum directionem p C urgente percurrat p r = R R, eodem tempore quo corpus P, percurrit P R aut R K vel P K, & vi alterâ ſecundum directionem rectæ r m, parallelam impellente, corpus p, eodem tempore deſcribat ſpatium æquale rectæ r m, quæ eſt ad R K, in ratione velocitatis tranſverſæ corporis p, ad velocitatem tranſverſam corporis alterius P. His poſitis manifeſtum eſt corpora P & p, de locis P, & p, ſimul egreſſa, eodem temporis puncto reperiri in locis K, & m.

DE MOTU CORPORUM.

pleto illo tempore [d] reverâ reperietur in n; [e] ideoque vi majore urgetur quam corpus P, ſi modo angulus nCp angulo kCp major eſt, id eſt ſi orbis $v\,p\,k$ vel movetur in conſequentia, vel movetur in antecedentia majore celeritate quam ſit dupla ejus quâ linea CP in conſequentia fertur; & vi minore ſi orbis tardius movetur in antecedentia. Eſtque virium diffe-

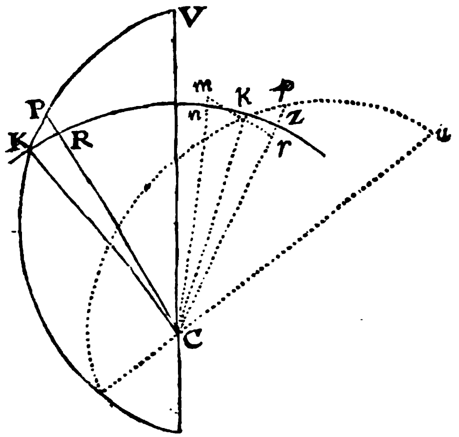


(d) * *Reverâ reperitur in puncto n.* Eſt enim angulus p C k = P C K (per hyp.) & ſi fuerit n locus corporis p, erit (per prop. 43.) angulus p C n, ad angulum P C k, ut angulus VCp, ad angulum VCP, & puncta C, n, m, jacent in unâ rectâ. Naſcentibus enim angulis p C n, P C K, perpendicula r m, R K, ſunt ut arcus circulares naſcentes radiis æqualibus C R, C r deſcripti, ſeu ut anguli m C r, K C R, (per Lem. 7.) Eſt ergò angulus m C p, ad angulum K C P, ſeu k C p, ut m r, ad K R, ſeu k r, hoc eſt, ut angulus V C p, ad angulum V C P, ſive, ut angulus p C n, ad angulum k C p, (per conſtr.) quare angulus m C p = p C n, & hinc puncta C, n, m, jacent in unâ rectâ.

(e) 444. *Ideoque vi majore urgetur, quam corpus P, ſi modò angulus* n C p, *angulo* k C p *major; vi minore*, ſi angulus m C p, angulo k C p minor; & vi æquali, ſi angulus m C p, angulo k C p æqualis. Nam in 1°. caſu linea Cm, major eſt quam C n, & punctum m extrà peripheriam

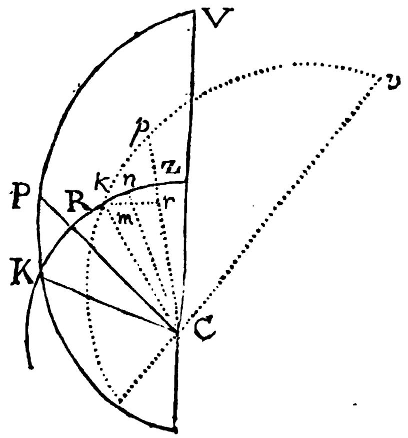
differentia ut locorum intervallum *mn*, per quod corpus illud *p* ipſius actione, dato illo temporis ſpatio, transferri debet. Centro *C* intervallo *Cn* vel *Ck* deſcribi intelligatur circulus ſecans lineas *mr*, *mn* productas in *s* & *t*, & (f) erit rectangulum $mn \times mt$ æquale rectangulo $mk \times ms$, ideoque *mn* æquale $\frac{mk \times ms}{mt}$. (g) Cum autem triangula *pCk*, *pCn* dato tempore den-

riam circuli radio Ck, vel Cn, deſcripti cadit, adeóque præter vim quâ corpus utrumque ad centrum urgetur, requiritur vis altera quâ corpus p, adhuc deſcribat mn. In 2° caſu Cm, minor eſt quam Cn, puncto m, cadente inter puncta k, & r, in lineâ kr. In 3°. caſu Cm = Cn, coincidentibus punctis m, n, k.



445. Porrò angulus mCp, angulo kCp, ſeu KCP major eſt, ſi orbis vpk, vel movetur in conſequentia (ut patet) vel movetur in antecedentia majore celeritate quam ſit dupla ejus quâ linea CP in conſequentia fertur. Nam in hoc caſu angulus vCV, eſt pluſquam duplo major angulo VCp, ſeu uCp, adeóque angulus VCp, major angulo VCP, ſeu vCp, & hinc angulus pCm, major angulo pCk, cum ſit angulus pCm, ad angulum pCk, ut VCp, ad VCP.

446. Si orbis upk, movetur in antecedentia cum celeritate duplâ ejus quâ linea CP, in conſequentia fertur, erit angulus VCp = VCP; cumque ſit etiam Cp = CP, corpus p deſcribet orbem immotum Vp, ſimilem & æqualem orbi VPK. In hoc caſu corpus p, non fertur ab V, versùs P, ſed in partem oppoſitam ut patet.



447. Si orbis vpk movetur in antecedentia minori celeritate quam ſit dupla ejus quâ linea CP in conſequentia fertur, erit angulus mCp, angulo kCp minor. In hoc enim caſu angulus VCv minor eſt duplo angulo VCP, vel vCp, adeóque angulus VCp, minor angulo VCP, vel vCp, & hinc angulus mCp, minor angulo kCp (per conſtr.)

(f) * *Erit rectangulum* $mn \times mt =$ *rectangulo* $mk \times ms$. Per prop. 35 vel 36. lib. 3. Elem.

(g) *Cum autem triangula* pCk, ſive PCK, *&* pCn, *dato tempore deſcribantur* (per hyp.) *dantur magnitudine* (per prop. 1.) Porrò triangulum $PCK = \frac{1}{2} PC \times KR$, & trian-

dentur magnitudine, ſunt kr & mr, earumque differentia mk & ſumma ms reciprocè ut altitudo pC, ideoque rectangulum $mk \times ms$ eſt reciprocè ut quadratum altitudinis pC. Eſt & mt directè ut $\frac{1}{2} mt$, id eſt, ut altitudo pC. Hæ ſunt primæ rationes linearum naſcentium; & hinc fit $\frac{mk \times ms}{mt}$, id eſt lineola naſcens mn, eique proportionalis virium differentia reciprocè ut cubus altitudinis pC. *Q. E. D.*

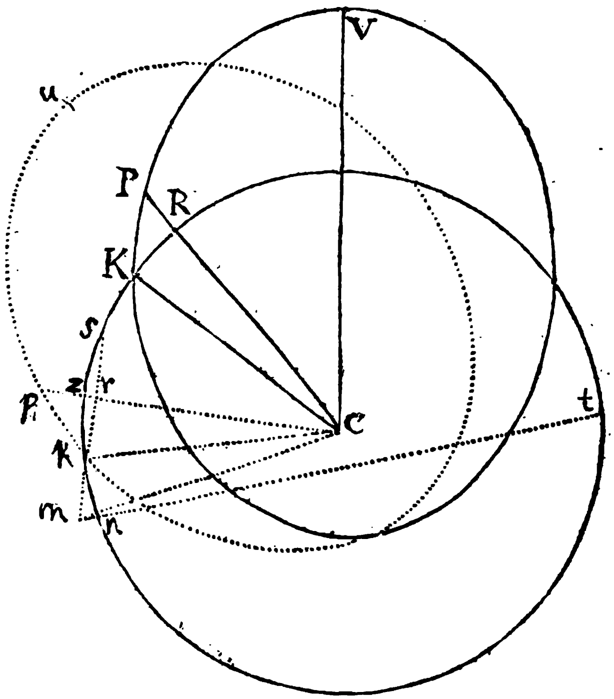
Corol. 1. Hinc differentia virium in locis P & p, vel K & k, eſt ad vim quâ corpus motu circulari revolvi poſſit ab R ad K eodem tempore quo corpus P in orbe immobili deſcribit arcum PK, ut lineola naſcens mn ad (h) ſinum verſum arcus naſcentis RK, id eſt ut $\frac{mk \times ms}{mt}$ ad $\frac{rkq}{2kC}$, vel ut $mk \times ms$ ad rk quadratum; hoc eſt, ſi capiantur datæ quantitates F, G in

triangulum $pCn = \frac{1}{2} pC \times mr$. Junctis enim pn, pm, erit triangulum naſcens pnC æquale naſcenti pmC, ob mn evaneſcentem reſpectu lineæ finitæ Cn, & triangulum $pmC = \frac{1}{2} pC \times mr$. Sunt ergò facta $pC \times kr$, & $pC \times mr$, conſtantia ſeu data & hinc kr, & mr, ſunt reciprocè ut altitudo pC, & propterea dividendo & componendo, earum differentia; mk, & ſumma ms, ſunt reciprocè ut eadem altitudo pC. Quod ut clariùs intelligatur, ſupponamus eſſe $kr = \frac{F}{pC}$, $mr = \frac{G}{pC}$, & F & G eſſe quantitates datas, erit $mr - kr = mk = \frac{G-F}{pC}$, $mr + kr = ms = \frac{G+F}{pC}$, hoc eſt, ob quantitates F, G, G−F, G+F, datas, erunt kr, mr, mk, ms, ut $\frac{1}{pC}$. Hinc rectangulum $mk \times ms$, $= \frac{GG-FF}{pC^2}$, eſt reciprocè ut quadratum altitudinis P C; Eſt & mt, directè ut $\frac{1}{2} mt = Cn = Ck = pC$, quarè $mn = \frac{mk \times ms}{mt} = \frac{GG-FF}{2pC^3}$, & ideò mn eſt reciprocè ut cubus altitudinis pC ob datam quantitatem $\frac{GG-FF}{2}$.

(h) * *Ad ſinum verſum arcûs naſcentis Rk*, ſeu Zk, hoc eſt, ad Zr, nam Zr & mn, ſunt ſpatia naſcentia eodem tempuſculo viribus illis deſcripta, & iiſdem proindè viribus proportionalia. Eſt autem $mn = \frac{mk \times ms}{mt}$ (ex Dem.) & $Zr = \frac{kr^2}{2kC}$. Nam, ex naturâ circuli $Zr : kr = kr : KC + rC$, hoc eſt, quia rC uſurpari poteſt pro ZC, & quia $ZC = kC$, $Zr : kr = kr : 2kC$, & $Zr = \frac{kr^2}{2kC}$; undè $mn : Zr = mk \times ms : kr^2$, ob $mt = 2kC$. Si verò capiantur duæ quantitates G, F, in eâ ratione ad invicem quam habet angulus VCp, ad angulum VCP, ſeu quam habet mr, ad kr, erit $mk \times ms : kr^2 = GG - FF : FF$; ut ex ſuprà demonſtratis liquet, ergò $mn : Zr = GG - FF : FF$.

* El

in eâ ratione ad invicem quam habet angulus *VCP* ad angulum *VCp*, ut GG−FF ad FF. Et ([i]) propterea, ſi centro *C* intervallo quovis *CP* vel *Cp* deſcribatur ſector circularis æqualis areæ toti *VPC*, quam corpus *P* tempore quovis in



orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto deſcripſit: differentia virium, quibus corpus *P* in orbe immobili & corpus *p* in orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam, quâ corpus aliquod, radio ad centrum ducto, ſectorem illum eodem tempore, quo deſcripta ſit area *VPC* uniformiter deſcribere po-

(i) * *Et propterea ſi centro C.* Corpus P, in orbitâ V P K revolvens dato tempore datum ſectorem P C K, radio ad centrum C ducto deſcribit (per prop. 1.) & corpus in circulo radio C K deſcripto uniformiter revolvens, & arcum R K, ſeu ſectorem C R K = C P K, deſcribens eodem tempore quo corpus P deſcribit arcum P K, ſeu ſectorem C P K, dato tempore datum quoque ſectorem deſcribit. Quare corpus P, in orbitâ V P K, & corpus in circulo prædicto revolventia, radiis ad centrum C ductis, ſectores æquales temporibus æqualibus deſcribunt. *Et propterea ſi centro C, intervallo CP, vel Cp, deſcribatur &c.*

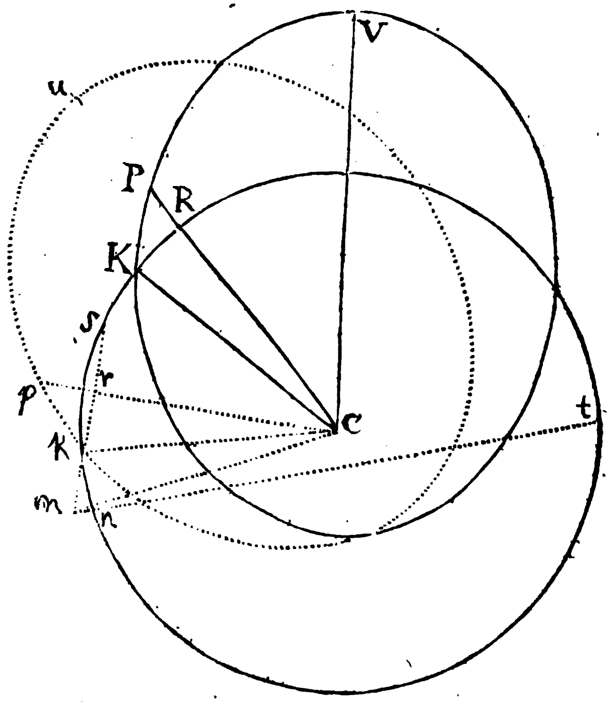
potuiſſet, ut GG−FF ad FF. Namque ſector ille & area *pCk* ſunt ad invicem ut tempora quibus deſcribuntur.

Corol. 2. Si orbis *VPK* ellipſis ſit umbilicum habens *C* & apſidem ſummam *V*; eique ſimilis & æqualis ponatur ellipſis *upk*, ita ut ſit ſemper *pC* æqualis *PC* & angulus *VCp* ſit ad angulum *VCP* in datâ ratione G ad F; pro altitudine autem *PC* vel *pC* ſcribatur A, & pro ellipſeos latere recto ponatur 2R: erit vis, quâ corpus in ellipſi mobili revolvi poteſt, ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$ & contra. Exponatur enim vis quâ corpus revolvatur in immotâ ellipſi per quantitatem $\frac{FF}{AA}$, & vis in *V* erit $\frac{FF}{CV\ quad.}$ (k) Vis autem quâ corpus in circulo ad diſtantiam *CV* eâ cum velocitate revolvi poſſet quam corpus in ellipſi revolvens habet in *V*, eſt ad vim quâ corpus in ellipſi revolvens urgetur in apſide *V*, ut dimidium lateris recti ellipſeos ad circuli ſemidiametrum *CV*, ideoque valet $\frac{RFF}{CV\ cub.}$: & vis, quæ ſit ad hanc ut GG−FF ad FF, valet

RGG

(k) * *Vis autem quâ corpus in circulo &c.* Demonſtratio Newtoniana ita procedit: Vis quâ corpus in Ellipſi circa ejus focum revolvitur, eſt ſemper æqualis cuidam quantitati conſtanti diviſæ per quadratum diſtantiæ à foco (per Prop. XI.) Sumatur ergo pro illâ quantitate conſtanti, quadratum *FF* cujus latus F eſt primà ex illis indeterminatis (ſed conſtantibus) quæ exprimunt rationem anguli V C P ad angulum V C p, erit vis in $V = \frac{FF}{VC^2}$. Sit Corpus circà centrum quodvis in circulo revolvens, ad diſtantiam CV, eâdem velocitate quâ Corpus in ellipſi revolvens urgetur in apſide V, ſumantur in Circulo & in Ellipſi arcus quamminimi eodem tempore deſcripti, illi arcus erunt inter ſe æquales, ob æquales velocitates (ex Hypoth.) & eorum ſagittæ erunt inter ſe ut vires Centrales (per Corol. 4. Prop.I.): in ellipſibus autem omnibus in quibus vis centripeta ad focum tendit (& iis annumeratur Circulus) latera recta ſunt inverse ut arcuum quamminimo tempore deſcriptorum ſagittæ & directè ut quadrata perpendiculi ducti ab extremitate eorum arcuum in lineam ad Centrum virium tendentem (per Corol. 2. Prop. XIII.) ſed in apſide Ellipſeos & Circulo, illa perpendicula ſunt ipſi arcûs, ideoque ſunt æqualia; Ergo latera recta hujus Ellipſis & hujus Circuli erunt inversè ut ſagittæ arcuum ſive inversè ut vires Centrales; Latus rectum circuli eſt ipſa diameter, ergo ſumendo dimidium utriuſque Lateris recti eſt *vis quâ Corpus in Ellipſi revolvens urgetur* &c. Reliqua demonſtratio eſt plana.

$\frac{RGG - RFF}{CV\ cub.}$: eſtque hæc vis (per hujus corol. 1.) differentia virium in *V* quibus corpus *P* in ellipſi immotâ *VPK*, & corpus *p* in ellipſi mobili *upk* revolvuntur. Unde cum (per hanc prop.) differentia illa in aliâ quâvis altitudine A ſit ad ſeipſam in altitudine *CV* ut $\frac{1}{A\ cub.}$ ad $\frac{1}{CV\ cub.}$, eadem differentia in omni altitudine A valebit $\frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$. Igitur ad vim $\frac{FF}{AA}$, quâ corpus revolvi poteſt in ellipſi immobili *VPK*, addatur exceſſus $\frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$; & componetur vis tota $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$ quâ corpus in ellipſi mobili *upk* iiſdem temporibus revolvi poſſit.



Co-

DE MOTU CORPORUM.

Corol. 3. (l) Ad eundem modum colligetur quod, ſi orbis immobilis *VPK* ellipſis ſit centrum habens in virium centro *C*; eique ſimilis, æqualis & concentrica ponatur ellipſis mobilis *upk*; ſitque 2 R ellipſeos hujus latus rectum principale, & 2 T latus tranſverſum ſive axis major, atque angulus *VCp* ſemper ſit ad angulum *VCP* ut G ad F; vires, quibus corpora in ellipſi immobili & mobili temporibus æqualibus revolvi poſſunt, erunt ut $\frac{\text{FFA}}{\text{T}\,cub.}$ & $\frac{\text{FFA}}{\text{T}\,cub.} + \frac{\text{RGG}-\text{RFF}}{\text{A}\,cub.}$ reſpectivè.

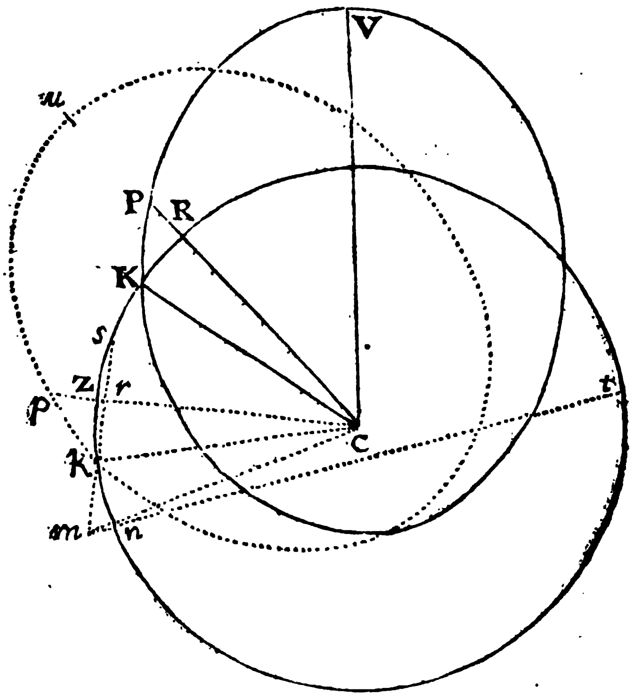
Corol. 4. Et univerſaliter, ſi corporis altitudo maxima *CV* nominetur T, & radius curvaturæ quam orbis *VPK* habet in

(l) *Ad eundem modum* &c. Si Corpus revolvatur in Ellipſi vi centripetâ tendente ad centrum Ellipſeos, vis centralis eſt directè ut diſtantia à Centro; ideoque erit æqualis quantitati conſtanti multiplicatæ per diſtantiam (per Prop. X.), poſito 2 *T* pro axe tranſverſo & 2 *R* pro latere recto, ſit ea quantitas conſtans $\frac{FF}{T^3}$, vis in V erit $\frac{\text{FF}\times\text{CV}}{\text{T}^3}$ vel quoniam CV $=T$, erit $\frac{FF}{TT}$ in aliis verò omnibus punctis erit $\frac{FF\times A}{T^3}$.

Sit Corpus in circulo revolvens circa centrum C ad diſtantiam CV, quâlibet vi centripetâ, ſed tali ut eâdem velocitate feratur quâ corpus in Ellipſi latum urgetur in extremitate axis tranſverſi, ſumantur in eo Circulo & in extremitate axis tranſverſi Ellipſeos arcus quamminimi eodem tempore deſcripti illi arcus erunt æquales, ob æquales velocitates, & eorum ſagittæ erunt ut vires Centrales quibus corpora in circulo & Ellipſi retinentur (per Cor. 4. Prop. I.); in Ellipſibus autem diverſis (& iis annumeratur Circulus) in quibus vis centripeta ad centrum tendit, in diſtantiis æqualibus à Centro, dupla quadrata facti axium ſunt inverſè ut ſagittæ quam minimo tempore deſcriptæ, & directè ut quadrata arearum dato tempore deſcriptarum (per conſtr. Prop. X.), cum ergo hic ſumantur arcus æquales & perpendiculares in lineam ad centrum ductam, & diſtantiæ à centro ſint æquales, illæ areæ utrinque ſunt æquales, ergo ſagittæ arcuum in Ellipſi & in circulo ſunt inversè ut ipſa quadrata facti axium, ſeu quia axis tranſverſus Ellipſeos & circuli diameter idem ſunt, ſagittæ arcuum in Ellipſi & circulo ſunt inversè ut quadratum axis conjugati ad quadratum tranſverſi, ſivè inverse ut Latus rectum ad Axem tranſverſum ergo 2 *T* : 2 *R* (ſive *T* : *R*) $= \frac{FF}{TT}$: ad vim in Circulo quæ itaque erit $\frac{R\times FF}{T^3}$ ſed hæc vis eſt ad differentiam virium in orbe mobili & immobili, ut *FF* ad GG−FF, ergo illa differentia eſt $\frac{RGG-RFF}{T^3}$, hæc autem differentia in V, eſt ad differentiam in alio quovis loco inversè ut cubi altitudinum ergo $\text{A}^3 : \text{CV}^3$ (ſive T^3) $= \frac{\text{RGG}-RFF}{\text{T}^3} : \frac{\text{RGG}-\text{RFF}}{\text{A}^3}$, cum ergo Vis in Orbe immobili ſit ut $\frac{FFA}{T^3}$ in orbe mobili erit $\frac{FFA}{T^3} + \frac{RGG-RFF}{A^3}$. Q. E. D.

* Et

in *V*, id eſt radius circuli æqualiter curvi, nominetur R, & vis centripeta, quâ corpus in trajectoriâ quâcunque immobili *VPK* revolvi poteſt in loco *V* dicatur $\frac{VFF}{TT}$, atque aliis in locis *P*

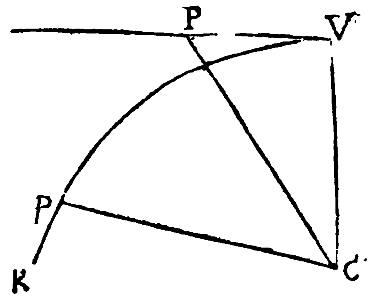


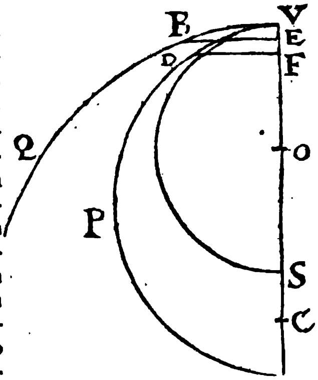
indefinitè dicatur X, altitudine *CP* nominatâ A, & capiatur G ad F in datâ ratione anguli *VCp* ad angulum *VCP*: erit (m) vis centripeta, quâ corpus idem eoſdem motus in eâdem trajectoriâ *upk* circulariter motâ temporibus iiſdem peragere poteſt, ut ſumma virium $X + \frac{VRGG - VRFF}{A\ cub.}$

Corol. 5. Dato igitur motu corporis in orbe quocunque immobili, augeri vel minui poteſt ejus motus angularis circa centrum virium in ratione datâ, & inde inveniri novi orbes immobiles in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

(m) * *Erit vis centripeta*, ut hæc commodè demonſtrentur adhibendum Lemma ſequens.

Corol. 6. Igitur ſi ad rectam *CV* poſitione datam erigatur perpendiculum *VP* longitudinis indeterminatæ, jungaturque *CP*, & ipſi æqualis agatur *Cp*, conſtituens angulum *VCp*, qui ſit ad angulum *VCP* in datâ ratione; vis quâ corpus gyrari poteſt in curva illa *Vpk* quam punctum *p* perpetuò tangit, erit reciprocè ut cu-





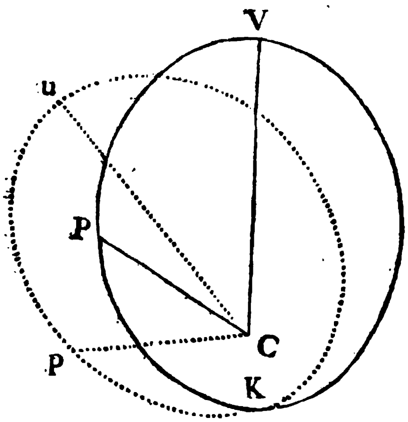
448. Lemma. Si corpus ad centrum virium C tendens deſcribat trajectoriam immotam VP, vis centripeta quâ in apſide V urgetur eſt ad vim centripetam corporis alterius in circulo VBQ, ad eandem diſtantiam CV, eâdem cum velocitate revolventis, ut diſtantia CV ad VO radium circuli VDS, trajectoriam VP oſculantis in V. Capiantur in circulo VBQ & in trajectoriâ VP arcus quam minimi & æquales VB, VD, & ex punctis B & D ad rectam CV demiſſa intelligantur perpendicula BE, DF; arcus evaneſcentes VB, VD eodem tempore à corporibus duobus percurrentur, ob utriuſque corporis velocitatem æqualem, eruntque perpendicula BE, DF æqualia (per Lem. VII). Quoniam autem arcus evaneſcens VD uſurpari poteſt pro arcu circuli curvam VP oſculantis in V, erit ex naturâ circuli $VF:DF=DF:VO+FO$, ſeu $2VO$, adeoque $DF^2=2VO\times VF$, & ſimiliter $BE^2=2VC\times VE=2VO\times VF$; undè $VF:VE=VC:VO$; ſed vis centripeta corporis arcum VD deſcribentis, eſt ad vim centripetam alterius corporis arcum VB deſcribentis ut VF ad VE, quæ ſunt ſpatia viribus illis urgentibus eodem tempuſculo deſcripta, quarè vis centripeta quâ corpus in apſide V urgetur, eſt ad vim centripetam alterius corporis in circulo ad eandem diſtantiam eâdem cum velocitate revolventis, ut diſtantia illa CV ad radium VO circuli oſculatoris in V. Q. E. D.

449. Cor. 1. Si radius VO circuli trajectoriam VP oſculantis in apſide V dicatur *R*, diſtantia CV, *T*, diſtantia CP, *A*, vis centripeta in V, $\frac{VFF}{TT}$, hæc erit ad vim centripetam in circulo VQ, ad eandem diſtantiam CV eâdem cum velocitate deſcripto ut *T* ad *R*, (448) hæc ergo erit $\frac{VRFF}{T^3}$, quæ erit ad differentiam virium centripetarum in apſidibus V & u, orbis immobilis VP, & orbis mobilis up, ut FF ad GG−FF (per Cor. I. Newt.) ideoque differentia illa erit $\frac{VRGG-VRFF}{T^3}$ quæ erit ad differentiam in aliis locis P ut A^3 ad T^3, ideoque in quibuſvis locis erit differentia virium in orbe mobili & immobili $\frac{VRGG-VRFF}{A^3}$. Quod aliâ ratione demonſtravit Hermannus prop. 25. Lib. 1. Phoronomiæ.

450. Coroll. 2. Hinc ſi vis centripeta in quovis puncto P, orbitæ immobilis VP, dicatur *X*, vis in puncto æquè alto p, orbitæ mobilis up erit $= X + \frac{VRGG-VRFF}{A^3}$ Q. E. D.

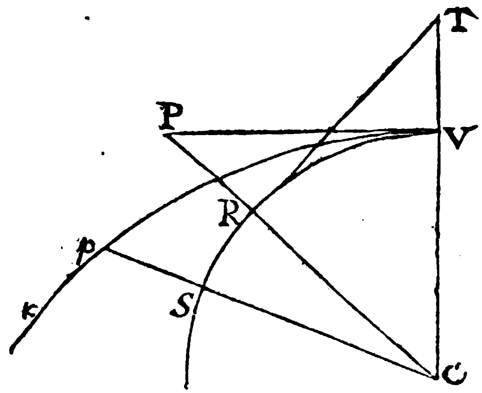
451. Cor. 3. Si orbitæ VP & up ſint ellipſes quarum umbilicus communis C, erit (240) radius oſculi *R* æqualis dimidio lateri recto ellipſeos VP, vel up: & (per prop.

bus altitudinis Cp. Nam ([n]) corpus P per vim inertiæ, nullâ aliâ vi urgente, uniformiter progredi poteſt in rectâ VP. Addatur vis in centrum C, cubo altitudinis CP vel Cp, reciprocè proportionalis, & (per jam demonſtrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam curvam Vpk. Eſt ([o]) autem hæc curva Vpk eadem cum curvâ illâ VPQ in corol. 3. prop. XLI. inventâ, in quâ ibi diximus corpora hujuſmodi viribus attracta obliquè aſcendere.



prop. XI) $X : \frac{VFF}{TT} = TT : AA$, adeoque $X = \frac{VFF}{AA}$, Ergo (450) vis in Orbitâ mobili erit $\frac{VFF}{AA} + \frac{VRGG - VRFF}{A^3}$, & diviſis omnibus terminis per V ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$; & ſi vis centralis ad centrum Ellipſeos dirigatur erit $X : \frac{VFF}{TT} = A : T$ & $X = \frac{VFF \times A}{T^3}$ & vis in Orbita mobili erit $\frac{VFF \times A}{T^3} + \frac{VRGG - VRFF}{A^3}$ & diviſis terminis per V erit $\frac{FF \times A}{T^3} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$; ſicut in Cor. 3. & 4. Newt. inventum fuerat.

(n) * *Nam corpus P.* Linea VP conſiderari poteſt tanquam trajectoria immota, in quâ vis centripeta X in loco quovis P nulla eſt, & radius oſculi R infinitus; erit igitur in hoc caſu (per cor. 4.) vis centripeta in loco p, trajectoriæ mobilis, æqualis $\frac{VRGG - VRFF}{A^3}$, adeóque ob datam quantitatem $VRGG - VRFF$ erit X, ſeu vis in p, ut $\frac{1}{A^3}$.

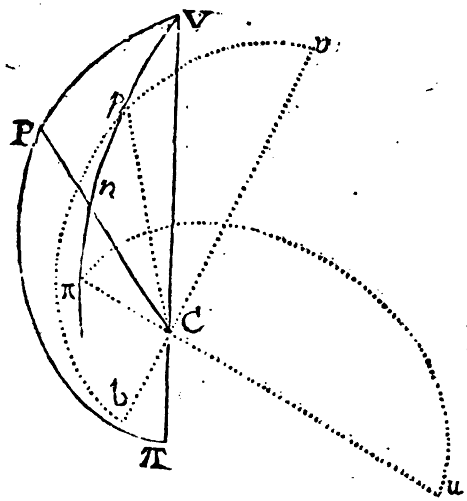


(o) * *Eſt autem hæc curva Vpk eadem &c.* Nam ſi centro C intervallo CV deſcribatur circulus VRS quem recta CP ſecat in R, recta Cp, in S, ſitque angulus SCV ad angulum RCV in datâ ratione, erit quoque ſector SVC ad ſectorem RVC in datâ illâ ratione, & ductâ per punctum R tangente RT, quæ radio CV producto occurrat in T, ejuſdem anguli RCV ſecantes CP, CT erunt æquales, atquè adeò curva Vpk, eadem cum curvâ VPQ, in coroll. 3°. prop. 41. inventâ, in quâ *recta Cp eſt ſemper æqualis abſciſſæ CT, & angulus VCp eſt ſemper ſectori VCR proportionalis.*

PROPOSITIO XLV. PROBLEMA XXXI.

(p) *Orbium qui ſunt circulis maxime finitimi requiruntur motus apſidum.*

(q) Problema ſolvitur arithmeticè faciendo ut orbis, quem corpus in ellipſi mobili (ut in propoſitionis ſuperioris corol. 2. vel 3.) revolvens deſcribit in plano immobili, accedat ad formam orbis cujus apſides requiruntur, & quærendo apſides orbis

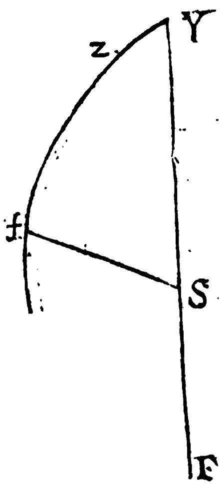


(p) * *Orbium qui ſunt &c.* Iiſdem poſitis quæ in propoſitione 44 & ejus corollariis 1. & 2. ſit V p n π orbis quem corpus p in ellipſi mobili u p b revolvens deſcribit in plano immobili, & V Π, v b, ellipſeon immobilis & mobilis axes tranſverſi, manifeſtum eſt punctum V eſſe apſidem ſummam tam in ellipſi immotâ V P Π, quam in orbe V p n π, & eſſe π apſidem imam in orbe V p n π ſi fuerit C π = C b = C Π, in quâ hypotheſi corpus p pervenit ad locum π, ubi corpus P, in ellipſi immotâ pervenit ad apſidem imam Π & in ellipſi revolvente corpus p pervenit ad b, ac in orbe V p n π, puncta p, b, π, coincidunt. Jam verò datâ vi centripetâ in orbe V p n π, quæritur motus apſidum, hoc eſt, motus axis u c b, ſeu quod idem eſt, quæritur ratio F, ad G, vel anguli V C P ad angulum V C p, aut anguli V C Π, 180°. ad angulum V C π; quod ſi ellipſis V P Π, ſit circulo maximè finitima, orbis V p n π ad circuli formam quam proximè accedet, nam ſi ellipſis V P Π, in circulum perfectum mutetur, orbis V p n π fit quoque circulus.

(q) * *Problema ſolvitur arithmeticè.* Revolvatur corpus Y in orbe immoto Y Z f vi centripetâ datâ tendente ad centrum S, ſitque punctum Y apſis ſumma, f apſis ima in illo orbe. Umbilico S, & axe tranſverſo Y S F = Y S + S f, deſcriptæ intelligantur ellipſes immobilis & mobilis, efficiendum eſt ut corpus Y orbem Y Z f deſcribens, ſimul revolvatur in hâc ellipſi mobili, dum corpus aliud ellipſim immotam deſcribit eâ ratione quam expoſuimus prop. 43. & inveniendus eſt apſidum motus. Id autem abſolvitur faciendo ut orbis V p n π (fig. ſuperiori) qui omnes orbes ut Y Z f quæcumque ſit in illis vis centripetæ lex generaliter exhibet accedat ad formam orbis Y Z f, ſive ei ſimilis & æqualis fiat, ac quærendo apſides V π, vel rationem angulorum V C P, V C p, in orbe illo V p n π. Porrò ſi ſupponamus orbem V p n π, ſimilem & æqualem factum eſſe orbi Y Z f, erit vis centripeta in ellipſi immotâ cujus umbilicus S. vel C ut $\frac{FF}{AA}$, & vis centripeta in loco quovis Z, orbis Y Z f, vel

bis quem corpus illud in plano immobili deſcribit. Orbes autem eandem acquirent formam, ſi vires centripetæ quibus deſcribuntur, inter ſe collatæ, in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum *V* apſis ſumma, & ſcribantur T pro altitudine maximâ *CV*, A pro altitudine quâvis aliâ *CP* vel *Cp*, & X pro altitudinum differentiâ *CV*−*CP*; & vis, quâ corpus in ellipſi circa umbilicum ſuum *C* (ut in corol. 2.) revolvente movetur, quæque in corol. 2. erat ut $\frac{FF}{AA}$ $+ \frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$, id eſt ut $\frac{FFA+RGG-RFF}{A\ cub.}$, ſubſtituendo T−X pro A, erit ut $\frac{RGG-RFF+TFF-FFX}{A\ cub.}$. Reducenda ſimiliter eſt vis alia quævis centripeta ad fractionem cujus denominator ſit A *cub.* & numeratores, factâ homologorum terminorum collatione, ſtatuendi ſunt analogi. Res exemplis patebit.

Exem-



vel in loco P, orbis Vpnπ, ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG-RFF}{A^3} = \frac{FFA+RGG-RFF}{A^3} = \frac{RGG-RFF+TFF-FFX}{A^3} = \frac{P}{A^3}$, ſubſtituendo *T*−*X* pro *A* in numeratore, & *P* pro numeratore toto. Unde ſi quantitas $\frac{Q}{A^3}$ vim centripetam in loco quovis Z orbis YZf exponat, eaque ſit data, erit $\frac{P}{A^3}$ ad $\frac{Q}{A^3}$ in datâ ratione. Sit illa ratio 1 ad *B*, & erit $\frac{PB}{A^3} = \frac{Q}{A^3}$, & $PB-Q=0$. Loco *A*, in quantitate *Q*, ſubſtituatur *T*−*X*, & æqualitatis $PB-Q=0$, termini omnes analogi ſe mutuo deſtruere debent, hoc eſt, termini omnes dati ſeu in quibus non reperitur quantitas variabilis *X* erunt ſimul nihilo æquales, & termini non dati, ſeu in quibus variabilis *X* invenitur, erunt etiam ſimul nihilo æquales, atque inde determinabitur ratio G ad F ſeu anguli VCP ad angulum VCp, faciendo ut ſint termini dati in quantitate *P* ad terminos non datos ejuſdem quantitatis, ita termini dati in quantitate *Q*, ad terminos non datos ejuſdem quantitatis. Quod exemplis patebit.

(r) *Exempl.* 1. Ponamus vim centripetam uniformem eſſe, ideoque ut $\frac{A\ cub.}{A\ cub.}$, ſive (ſcribendo $T-X$ pro A in numeratore) ut $\frac{T\ cub. - 3TTX + 3TXX - X\ cub.}{A\ cub.}$; & collatis numeratorum terminis correſpondentibus; nimirum datis cum datis, & non datis cum non datis, fiet $RGG - RFF + TFF$ ad $T\ cub.$ ut $-FFX$ ad $-3TTX + 3TXX - X\ cub.$ ſive ut $-FF$ ad $-3TT + 3TX - XX$. Jam cum orbis ponatur circulo quam maximè finitimus, coeat orbis cum circulo; & ob factas R, T æquales, atque X in infinitum diminutam, rationes ultimæ erunt RGG ad $T\ cub.$ ut $-FF$ ad $3TT$, ſeu GG ad TT ut FF ad $3TT$, & viciſſim GG ad FF ut TT ad $3TT$, id eſt, ut 1 ad 3; ideoque G ad F, hoc eſt angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{3}$. Ergo cum corpus in ellipſi immobili, ab apſide ſummâ ad apſidem imam deſcendendo conficiat angulum VCP (ut ita dicam) graduum 180; corpus aliud in ellipſi mobili, atque ideo in orbe immobili de quo agimus, ab apſide ſummâ ad apſidem imam deſcendendo conficiet angulum VCp graduum $\frac{180}{\sqrt{3}}$: id ideo ob ſimilitudinem orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripetâ deſcribit, & orbis illius quem corpus in

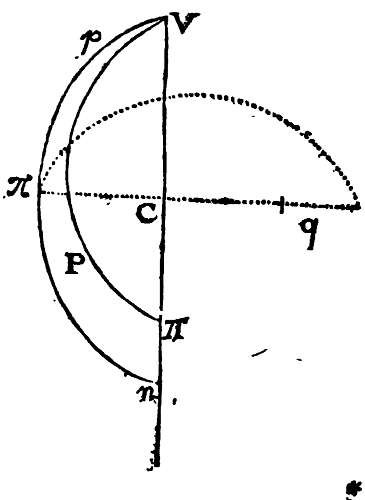
(r) * *Exemplum* 1um. *Ponamus vim centripetam* in orbe Y Z f *uniformem* ſeu conſtantem *eſſe, ideóque ut* 1, ſeu ut $\frac{A^3}{A^3}$, erit $Q = A^3 = T^3 - 3TTX + 3TXX - X^3$, & $PB = BRGG - BRFF + BTFF - BFFX$ atque adeò $BRGG - BRFF + BTFF - BFFX - T^3 + 3TTX - 3TXX + X^3 = 0$, & termini dati $BRGG - BRFF + BTFF - T^3 = 0$, ſeu $BRGG - BRFF + BTFF = T^3$, & termini non dati $-BFFX + 3TTX - 3TXX + X^3 = 0$, ſeu $BFF = 3TT - 3TX + X^2$; undè hæc proportio deducitur $BRGG - BRFF + BTFF : BFF = T^3 : 3TT - 3TX + X^2 = RGG - RFF + TFF : FF$. Jam cum orbis YZf, ponatur circulo quam maximè finitimus, coeat orbis cum circulo & ob factas R & T æquales, atquè $X = 0$, erit $X^2 = 0$, $3TX = 0$, $RFF = TFF$, & hinc $T^3 : 3TT = RGG : FF : = TGG : FF$, & $T^2 : 3T^2 = 1 : 3 = GG : FF$, adeóque $G : F = 1 : \sqrt{3}$, hoc eſt, angulus VCp, eſt ad angulum VCP, ut 1, ad $\sqrt{3}$. Ergò cum corpus in ellipſi immobili VPΠ, ab apſide ſummâ V ad apſidem imam Π deſcendendo, conficiat angulum VCΠ grad. 180. corpus aliud in ellipſi mobili upb, atque adeò in orbe immobili Vpnπ, ſeu YZf, ab apſide ſummâ V vel Y, ad apſidem imam π vel f, deſcendendo conficiet angulum VCπ, vel YSf grad. $\frac{180}{\sqrt{3}}$.

in ellipſi revolvente gyros peragens deſcribit in plano quieſcente. Per ſuperiorem terminorum collationem ſimiles redduntur hi orbes, non univerſaliter ſed tunc cum ad formam circularem quam maximè appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripetâ in orbe propemodum circulari revolvens, inter apſidem ſummam & apſidem imam conficiet ſemper angulum $\frac{180}{\sqrt{3}}$ graduum, ſeu 103 *gr.* 55 *m.* 23 *ſec.* ad centrum; perveniens ab apſide ſummâ ad apſidem imam ubi ſemel confecit hunc angulum, & inde ad apſidem ſummam rediens ubi iterum confecit eundem angulum; & ſic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam eſſe ut altitudinis A dignitas quælibet A^{n-3} ſeu $\frac{A^n}{A^3}$: ubi $n-3$ & n ſignificant dignitatum indices quoſcunque integros vel fractos, rationales vel irrationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n ſeu $\overline{T-X}|^n$ in ſeriem indeterminatam per (f) methodum noſtram ſerierum convergentium reducta, evadit $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2} XXT^{n-2}$ &c. Et collatis hujus terminis cum terminis numeratoris alterius $RGG-RFF+TFF-FFX$, fit $RGG-RFF+TFF$ ad T^n ut $-FF$ ad $-nT^{n-1}+\frac{nn-n}{2}XT^{n-2}$ &c.

(f) * *Per methodum noſtram.* Vide fragmentum Epiſtolæ Newtoni ad Oldenburgium & theorematis ibi propoſiti demonſtrationem requiras ex elementis algebræ clariſſimorum virorum Wolfii, Abbatis de Molieres, vel ex analyſi demonſtratâ Patris Reyneau, aut ex aliis paſſim authoribus. Interim cum hic ſatis ſit duos priores terminos dignitatis $\overline{T-X}^n$ reperire ob evaneſcentes terminos in quibus reperitur ipſius X dignitas primâ altior, facilè demonſtratur ex dignitatum per continuam radicis multiplicationem formatione duos illos priores terminos eſſe $T^n - n \times XT^{n-1}$. Ut ſi fuerit $n=2$, duo priores termini dignitatis $\overline{T-X}^2$; erunt $T^2 - 2 \times TX$; ſi $n=3$, erunt $T^3 - 3 \times XT^2$, & ità porrò; atque hinc patet quam compendioſa ſit Newtoniana methodus motum apſidum determinandi, nam prætterquam quod ſufficit duos dignitatum terminos invenire, poſſunt quoque termini æquales RFF, TFF, in formulâ $RGG-RFF+TFF-FFX$, deleri; undè tantummodò conferendus terminus datus RGG cum aliis terminis datis, & terminus non datus $-FFX$ cum aliis non datis.

Et ſumendo rationes ultimas ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit RGG ad T^n ut $-FF$ ad $-nT^{n-1}$, ſeu GG ad T^{n-1} ut FF ad nT^{n-1}, & viciſſim GG ad FF ut T^{n-1} ad nT^{n-1} id eſt ut 1 ad n; ideoque G ad F, id eſt angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{n}$. Quare cum angulus VCP, in deſcenſu corporis ab apſide ſummâ ad apſidem imam in ellipſi confectus, ſit graduum 180; conficietur angulus VCp, in deſcenſu corporis ab apſide ſummâ ad apſidem imam, in orbe propemodum circulari quem corpus quodvis vi centripetâ dignitati A^{n-3} proportionali deſcribit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{\sqrt{n}}$; & hoc angulo repetito angulus redibit ab apſide imâ ad apſidem ſummam, & ſic deinceps in infinitum. Ut ſi vis centripeta ſit ut diſtantia corporis à centro, id eſt, ut A ſeu $\frac{A^4}{A^3}$, erit n æqualis 4 & $\sqrt{n}$ æqualis 2; ideoque angulus inter apſidem ſummam & apſidem imam æqualis $\frac{180}{2}$ *gr.* ſeu 90 *gr.* Completâ igitur quartâ parte revolutionis unius corpus perveniet ad apſidem imam, & completâ aliâ quartâ parte ad apſidem ſummam, & ſic deinceps per vices in infinitum. Id (t)



(t) * Id *quod etiam ex prop.* 10. *&c.* Nam corpus urgente hâc vi centripetâ revolvetur in ellipſi immobili $Vp\pi n$, cujus centrum eſt in centro virium C, axis tranſverſus Vn, axis conjugatus πq, apſides ſummæ duæ V, n, imæ π, q; ellipſeos autem mobilis $VP\Pi$, umbilicus erit C, axis tranſverſus $V\Pi = VC + C\pi$.

quod etiam ex propoſitione x. manifeſtum eſt. Nam corpus urgente hâc vi centripetâ revolvetur in ellipſi immobili, cujus centrum eſt in centro virium. Quod ſi vis centripeta ſit reciprocè ut diſtantia, id eſt directè ut $\frac{1}{A}$ ſeu $\frac{A^2}{A^3}$, erit n æqualis 2, ideoque inter apſidem ſummam & imam angulus erit graduum $\frac{180}{\sqrt{2}}$ ſeu 127 *gr.* 16 *m.* 45 *ſec.* & propterea corpus tali vi revolvens, perpetuâ anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab apſide ſummâ ad imam & ab imâ ad ſummam perveniet in æternum. Porro ſi vis centripeta ſit reciprocè ut latus quadrato-quadratum undecimæ dignitatis altitudinis, id eſt reciprocè ut $A^{\frac{11}{4}}$, (u) ideoque directè ut $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$ ſeu ut $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$ erit n æqualis $\frac{1}{4}$, & $\frac{180}{\sqrt{n}}$ *gr.* æqualis 360 *gr.* & propterea corpus de apſide ſummâ diſcedens & ſubinde perpetuò deſcendens, perveniet ad apſidem imam ubi complevit revolutionem integram, dein perpetuo aſcenſu complendo aliam revolutionem integram, redibit ad apſidem ſummam: & ſic per vices in æternum.

Exempl. 3. Aſſumentes m & n pro quibuſvis indicibus dignitatum altitudinis, & b, c pro numeris quibuſvis datis, ponamus vim centripetam eſſe ut $\frac{bA^m + cA^n}{A\ cub.}$, id eſt, ut $\frac{b \text{ in } \overline{T-X}|^m + c \text{ in } \overline{T-X}|^n}{A\ cub.}$ ſeu (x) (per eandem methodum noſtram ſerierum convergentium) ut

bT

(u) * *Ideoque directè ut* $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$, *ſeu ut* $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$, cum ſit $A^3 = A^{\frac{12}{4}}$, & proindè eſt $\frac{A^3}{A^{\frac{11}{4}}} = A^{\frac{1}{4}}$, atquè ità $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}} = \frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$.

(x) * *Seu per eandem methodum.* Etenim dignitas $\overline{T-X}^m$, evoluta, eſt $T^m - mXT^{m-1}$ &c. adeóque $b \times \overline{T-X}^m = bT^m - mbXT^{m-1}$ &c. & ſimiliter $c \times \overline{T-X}^n = cT^n - ncXT^{n-1}$ &c. undè $b \times \overline{T-X}^m + c \times \overline{T-X}^n = bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1}$ &c.

De Motu Corporum.

$$\frac{bT^{m}+cT^{n}-mbXT^{m-1}-ncXT^{n-1}+\frac{mm-m}{2}bXXT^{m-2}}{A\ cub.}$$

$$+\frac{\frac{nn-n}{2}cXXT^{n-2}\ \&c.}{A\ cub.}$$ & collatis numeratorum terminis, fiet $RGG-RFF+TFF$ ad $bT^{m}+cT^{n}$, ut $-FF$ ad $-mbT^{m-1}-ncT^{n-1}+\frac{mm-m}{2}bXT^{m-2}+\frac{nn-n}{2}cXT^{n-2}$ &c. Et ſumendo rationes ultimas quæ prodeunt ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit GG ad $bT^{m-1}+cT^{n-1}$, ut FF ad $mbT^{m-1}+ncT^{n-1}$, & viciſſim GG ad FF ut $bT^{m-1}+cT^{n-1}$ ad $mbT^{m-1}+ncT^{n-1}$. Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam CV ſeu T arithmeticè per unitatem, fit GG ad FF ut $b+c$ ad $mb+nc$, ideoque ut 1 ad $\frac{mb+nc}{b+c}$. Unde eſt G ad F, id eſt angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. Et propterea cum angulus VCP inter apſidem ſummam & apſidem imam in ellipſi immobili ſit 180 *gr.* erit angulus VCp inter eaſdem apſides, in orbe quem corpus vi centripetâ quantitati $\frac{bA^{m}+cA^{n}}{A\ cub.}$ proportionali deſcribit, æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Et (y) eodem argumento ſi vis centripeta ſit ut $\frac{bA^{m}-cA^{n}}{A\ cub.}$, angulus

(y) * *Et eodem argumento.* Si vis centripeta ſit ut $\frac{bA^{m}-cA^{n}}{A^{3}}$, id eſt ut $b\times\overline{T-X}^{m}-c\times\overline{T-X}^{n}$, ſeu ut $\frac{bT^{m}-cT^{n}-mbXT^{m-1}+ncXT^{n-1}\ \&c.}{A^{3}}$ collatis terminis fiet RGG, hoc eſt TGG ad $bT^{m}-cT^{n}$, ut $-FF$ ad $-mbT^{m-1}+ncT^{n-1}$, adeóque GG ad $bT^{m-1}-cT^{n-1}$, ut FF ad $mbT^{m-1}-ncT^{n-1}$, & ponendo $T=1$, erit $GG:FF=b-c:mb-nc=1:\frac{mb-nc}{b-c}$, & $G:F=1:\sqrt{\frac{mb-nc}{b-c}}$.

gulus inter apſides invenietur graduum $180\sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$. Nec ſecus reſolvetur problema in caſibus difficilioribus. Quantitas, cui vis centripeta proportionalis eſt, reſolvi ſemper debet in ſeries convergentes denominatorem habentes A *cub.* Dein pars data numeratoris qui ex illâ operatione provenit ad ipſius partem alteram non datam, & pars data numeratoris hujus RGG − RFF + TFF − FFX ad ipſius partem alteram non datam in eâdem ratione ponendæ ſunt: Et quantitates ſuperfluas delendo, ſcribendoque unitatem pro T, obtinebitur proportio G ad F.

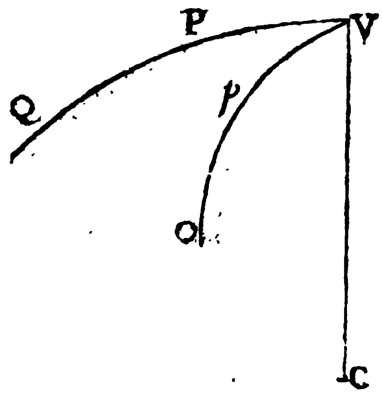
Corol. 1. Hinc ſi vis centripeta ſit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri poteſt dignitas illa ex motu apſidum; & contra. Nimirum ſi motus totus angularis, quo corpus redit ad apſidem eandem, ſit ad motum angularem revolutionis unius, ſeu graduum 360, ut numerus aliquis *m* ad numerum alium *n*, & altitudo nominetur A: erit vis ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{nn}{mm}-3}$, cujus index eſt $\frac{nn}{mm}-3$. Id (z) quod per exempla ſecunda manifeſtum eſt. (a) Unde liquet vim illam in majore quam triplicatâ altitudinis ratione, in receſſu à centro, decreſcere

(z) 452. * *Id quod per exempla ſecunda manifeſtum eſt.* Si in exemplo ſecundo loco indicis n, ad confuſionem tollendam ſcribatur p, erit vis centripeta, ut A^{p-3}, & angulus confectus in deſcenſu ab apſide ſummâ ad apſidem imam æqualis angulo $\frac{180°}{\sqrt{p}}$, adeóque duplus ille angulus ſeu motus totus angularis quo corpus ab apſide ſummâ redit ad eandem erit $\frac{360}{\sqrt{p}}$ in exemplo ſecundo. Eſt autem in caſu corollarii hujus, motus totus angularis quo corpus redit ad apſidem eandem æqualis angulo $\frac{360\,m}{n}$, ergò $\frac{360}{\sqrt{p}} = \frac{360\,m}{n}$, & $\frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{m}{n}$, & $\frac{1}{p} = \frac{mm}{nn}$, & $\frac{nn}{mm} = p$; quare $A^{p-3} = A^{\frac{nn}{mm}-3}$.

(a) 453. *Undè liquet vim illam.* Nam ſi vis eſſet ut $\frac{1}{A^{3+q}}$, ſeu ut A^{-3-q}, ſitque $+q$ quantitas poſitiva, eſſet $\frac{nn}{mm} - 3 = -3 - q$, & $\frac{nn}{mm} = -q$, hoc eſt, quadratum quantitatis $\frac{n}{m}$ negativum quod abſurdum eſt: non poteſt igitur vis in majore quam in triplicatâ altitudinis ratione ſeu in ratione $\frac{1}{A^{3+q}}$, in receſſu à centro decreſcere.

De Motu Corporum.

cere non poſſe: (b) Corpus tali vi revolvens deque apſide diſcedens, ſi cœperit deſcendere nunquam perveniet ad apſidem imam ſeu altitudinem minimam, ſed deſcendet uſque ad centrum, deſcribens curvam illam lineam de quâ egimus in corol. 3. prop. xli. Sin cœperit illud, de apſide diſcedens, vel minimum aſcendere; aſcendet in infinitum, neque unquam perveniet ad apſidem ſummam. Deſcribet enim curvam illam lineam de quâ actum eſt in eodem corol. & in corol. vi. prop. xliv. Sic (c) & ubi vis, in receſſu à centro, decreſcit in majore quam triplicatâ ratione altitudinis, corpus de apſide diſcedens, perinde ut cœperit deſcendere vel aſcendere, vel deſcendet ad centrum.



(b) * *Corpus tali vi revolvens*, hoc eſt vi quæ in receſſu à centro decreſcat in ratione altitudinis triplicatâ deque apſide diſcedens &c. Sint enim ut in coroll. 3°. prop. 41. duæ curvæ VpO, VPQ, quas corpora duo de loco V, ſecundum directionem ad CV perpendicularem egreſſa, vi centripetâ ad C tendente, & in triplicatâ altitudinis ratione decreſcente in receſſu à centro deſcribunt, & corpus in curva VpO, latum ad centrum ſemper accedat, corpus verò in curvâ VPQ, motum à centro ſemper recedat ut in eodem cor. 3°. prop. 41. manifeſtum eſt punctum V eſſe apſidem ſummam in curvâ VpO, & eſſe apſidem imam in curvâ VPQ; Quarè cum in curva VpO, corpus ad centrum ſemper accedat, nunquam pervenire poteſt ad apſidem imam, ſeu altitudinem minimam quæ nulla eſt, ſed gyris infinitis deſcendit uſque ad centrum; in curvâ verò VPQ de apſide imâ deſcedens corpus aſcendit in infinitum, neque unquam pervenit ad apſidem ſummam quæ nulla eſt. Hæc demonſtrari etiam poſſunt hâc ratione; Si fuerit vis ut $\frac{1}{A^3}$, ſeu ut A^{-3}, erit $\frac{nn}{mm} - 3 = -3$, & $\frac{nn}{mm} = 0 = p$ (452) & motus totus angularis ab apſide ad eandem apſidem erit $\frac{360^{\circ}}{\sqrt{p}} = \frac{360}{0}$; motus verò angularis ab apſide ſummâ ad imam, vel ab imâ ad ſummam erit $\frac{180^{\circ}}{0}$ quæ eſt quantitas infinita, undè liquet in noſtrâ Hypotheſi corpus ab apſide imâ ad ſummam aut à ſummâ ad imam nunquam pervenire poſſe.

(c) * *Sic & ubi vis in receſſu à centro.* Si vis fuerit ut $\frac{1}{A^{3+q}}$, & q, quantitas poſitiva, erit (453) $\frac{nn}{mm} = -q = p$, & (452) motus totus angularis ab apſide ad apſidem eandem erit $\frac{360^{\circ}}{\sqrt{-q}}$, & ab apſide unâ ad alteram erit $\frac{180^{\circ}}{\sqrt{-q}}$: quarè ob imagi-

trum uſque vel aſcendet in infinitum. At (d) ſi vis, in receſſu à centro, vel decreſcat in minore quam triplicatâ ratione altitudinis, vel creſcat in altitudinis ratione quâcunque; corpus nunquam deſcendet ad centrum uſque, ſed ad apſidem imam aliquando perveniet: & (e) contra, ſi corpus de apſide ad apſidem alternis vicibus deſcendens & aſcendens nunquam appellat ad centrum; vis in receſſu à centro aut augebitur, aut in minore quam triplicatâ altitudinis ratione decreſcet: & quo citius corpus de apſide ad apſidem redierit, eo longius ratio virium recedet à ratione illâ triplicatâ. Ut ſi corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ de apſide ſummâ ad apſidem ſummam alterno deſcenſu & aſcenſu redierit; hoc eſt, ſi fuerit m ad n ut 8 vel 4 vel

ginariam quantitatem $\sqrt{-q}$, impoſſibile eſt ut corpus de apſide ſummâ diſcedens, adeóque ad centrum accedens, ad apſidem imam unquam perveniat, & ut de apſide imâ diſcedens ac proindè à centro recedens unquam perveniat ad apſidem ſummam.

(d) * *At ſi vis in receſſu à centro.* Sit vis ut $\frac{1}{A^{3-q}}$, & q, quantitas poſitiva erit $\frac{nn}{mm} - 3 = -3 + q$, & $\frac{nn}{mm} = q = p$ (452). Undè motus totus angularis ab apſide ad eandem erit $\frac{360°}{\sqrt{p}} = \frac{360\,m}{n}$, motus angularis ab apſide unâ ad alteram $= \frac{180}{\sqrt{p}} = \frac{180\,m}{n}$; quæ ſunt quantitates reales & poſitivæ, quarè in hâc Hypotheſi corpus ab apſide ad apſidem eandem redire & ab apſide ſummâ ad imam atque ab imâ ad ſummam pervenire poterit. Eſt autem $\frac{1}{A^{3-q}}$, altitudinis A dignitas, ſi fuerit q major quam 3, è contrà $\frac{1}{A^{3-q}}$ eſt dignitas quantitatis $\frac{1}{A}$, ſi fuerit q minor quam 3. Liquet igitur, ſi vis in receſſu à centro vel decreſcat in minore quam triplicatâ ratione altitudinis, (quod fit ubi q minor quam 3) vel creſcat in altitudinis ratione quâcumque (quod fit ubi q, major quam 3) corpus nunquam deſcendere ad centrum uſque, ſed ad apſidem imam aliquandò pervenire.

(e) * *Et contra ſi corpus de apſide ad apſidem &c.* Nam ſi vis in receſſu à centro non augeatur, nec etiam minuatur in minore quam triplicatâ altitudinis ratione, neceſſariò decreſcet vel in triplicatâ vel in majore quam triplicatâ altitudinis ratione, ſed ſupra demonſtratum eſt in his duobus caſibus corpus non poſſe ab apſide ad apſidem alternis vicibus deſcendere & aſcendere, ergò ſi corpus de apſide ad apſidem alternis vicibus deſcendens & aſcendens nunquam appellat ad centrum, vis in receſſu à centro augebitur, aut in minore quam triplicatâ altitudinis ratione decreſcet, & quo citiùs corpus de apſide ad apſidem redierit, eò longiùs ratio virium recedet à ratione illâ triplicatâ. Quo enim citiùs corpus de apſide ad apſidem redierit, eò minor erit quantitas $\frac{360\,m}{n}$, aut quantitas $\frac{m}{n}$, adeoque eò major erit quantitas $\frac{n}{m}$, ejuſque quadratum $\frac{nn}{mm} = p = q$, & hinc eò longiùs quantitas $\frac{1}{A^{3-q}}$ à quantitate $\frac{1}{A^3}$ recedet.

DE MOTU CORPORUM.

4 vel 2. vel $1\frac{1}{2}$ ad 1, ideoque $\frac{nn}{mm}-3$ valeat $\frac{1}{64}-3$ vel $\frac{1}{16}-3$ vel $\frac{1}{4}-3$ vel $\frac{4}{9}-3$: erit vis ut $A^{\frac{1}{64}-3}$ vel $A^{\frac{1}{16}-3}$ vel $A^{\frac{1}{4}-3}$ vel $A^{\frac{4}{9}-3}$, id eſt, reciprocè ut $A^{3-\frac{1}{64}}$ vel $A^{3-\frac{1}{16}}$ vel $A^{3-\frac{1}{4}}$ vel $A^{3-\frac{4}{9}}$. Si corpus ſingulis revolutionibus redierit ad apſidem eandem immotam; erit m ad n ut 1 ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis A^{-2} ſeu $\frac{1}{AA}$; & propterea decrementum virium in ratione duplicatâ altitudinis, ut (f) in præcedentibus demonſtratum eſt. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel unâ tertiâ, vel unâ quartâ, ad apſidem eandem redierit; erit m ad n ut $\frac{3}{4}$ vel $\frac{2}{3}$ vel $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis $A^{\frac{16}{9}-3}$ vel $A^{\frac{9}{4}-3}$ vel A^{9-3} vel A^{16-3}; & (g) propterea vis aut reciprocè ut $A^{\frac{11}{9}}$ vel $A^{\frac{3}{4}}$, aut directè ut A^{6} vel A^{13}. Denique ſi corpus pergendo ab apſide ſummâ ad apſidem ſummam confecerit revolutionem integram, & præterea gradus tres, ideoque apſis illa ſingulis corporis revolutionibus confecerit in conſequentia gradus tres; erit m ad n ut 363 *gr.* ad 360 *gr.* ſive ut 121 ad 120, (h) ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ erit

(f) * *Ut in præcedentibus demonſtratum eſt.* In hoc enim caſu corpus deſcribit ellipſim immotam circulo finitimam (per cor. 1. prop. XIII) intereadum æqualiter movetur in ellipſi ſimili & æquali circa umbilicum revolvente cum celeritate duplâ ejus quâ corpus idem in eâdem ellipſi mobili fertur (446).

(g) * *Et propterea vis aut reciprocè. Ut $A^{\frac{11}{9}}$, vel $A^{\frac{3}{4}}$, aut directè ut A^{6}, vel A^{13}.* Eſt enim $A^{\frac{16}{9}-3}=A^{-\frac{11}{9}}=\frac{1}{A^{\frac{11}{9}}}$, & $A^{\frac{9}{4}-3}=\frac{1}{A^{\frac{3}{4}}}$ & $A^{9-3}=A^{6}$ & $A^{16-3}=A^{13}$.

(h) * *Ideóque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ erit æquale $A^{-\frac{29523}{14641}}$.* Erit enim in hâc hypotheſi $\frac{nn}{mm}=\frac{14400}{14641}$, & $\frac{nn}{mm}-3=\frac{14400}{14641}-3=\frac{29523}{14641}$. Eſt autem $\frac{29523}{14641}=2+\frac{241}{14641}=2+\frac{4}{243}$, proximè; nam $241\times243=58563$, & $4\times14641=58564$; decreſcit igitur vis centripeta in ratione paulò majore quam duplicatâ, ſed quæ vicibus $59\frac{3}{4}$, propiùs ad duplicatam quam ad triplicatam accedit,

erit æquale $A^{-\frac{29523}{14641}}$; & propterea vis centripeta reciprocè ut $A^{\frac{29523}{14641}}$ ſeu reciprocè ut $A^{2\frac{4}{243}}$ proximè. Decreſcit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicatâ, ſed quæ vicibus $59\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

Corol. 2. Hinc etiam ſi corpus, vi centripetâ quæ ſit reciprocè ut quadratum altitudinis, revolvatur in ellipſi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognoſci poteſt (per exempla tertia) motus apſidum qui ex vi illâ extraneâ orietur: & contra. Ut ſi vis quâ corpus revolvitur in ellipſi ſit ut $\frac{1}{AA}$; & vis extranea ablata ut cA, ideoque vis reliqua ut $\frac{A - cA^4}{A\ cub.}$; erit (in exemplis tertiis) b æqualis 1, m æqualis 1, & n æqualis 4, ideoque angulus revolutionis inter apſides æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. (i) Ponamus vim illam extraneam eſſe 357.45 partibus minorem quam vis altera quâ corpus revolvitur

dit, differentia enim inter 2, & $2 + \frac{4}{243}$, eſt $\frac{4}{243}$, differentia verò inter 3 & $2 + \frac{4}{243}$ eſt $1 - \frac{4}{243} = \frac{239}{243}$. Porrò $\frac{239}{243}$ eſt ad $\frac{4}{243}$ ſeu 239 ad 4 ut $59\frac{3}{4}$ ad 1.

(i) * *Ponamus eſſe* $c \times A$ ad $\frac{1}{AA}$, hoc eſt, ponendo A vel T = 1, c ad 1, ut 100 ad 35745, id eſt, ut 1 ad 357, 45, & erit $c = \frac{100}{35745}$, $1 - c = \frac{35645}{35745}$, $1 - 4c = \frac{35345}{35745}$; undè $\frac{1-c}{1-4c} = \frac{35645}{35345}$, & hinc $180 \times \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}} = 180 \times \sqrt{\frac{35645}{35345}}$ &c.

454. Scholium. Hermannus in ſcholio ad prop. 25. lib. 1. Phoronomiæ formulam invenit quâ ex datâ vi centripetâ motus apſidum determinatur, & contrà; hanc ipſam ex priùs oſtenſis hic demonſtrabimus. Iiſdem igitur poſitis quæ in not. 449, ſit vis centripeta in ellipſeos mobilis loco quovis p, ſeu (451) vis $\frac{VFFA + VRGG - VRFF}{A^3} = \frac{y}{A^3} = \frac{y}{z^3}$, ponendo altitudinem $A = z$, & erit (450) $y = VFFz + VRGG - VRFF$; capiantur utrinque fluxiones & invenietur $dy = VFFdz$, & faciendo $Qdz = dy$, erit $Q = VFF$. Loco VFF, ipſius valor Q ſubſtituatur in ſuperiori æquatione, & erit $y = Qz + \frac{QRGG - QRFF}{FF} = Qz - QR + \frac{QRGG}{FF}$

DE MOTU CORPORUM.

vitur in ellipſi, id eſt c eſſe $\frac{100}{35745}$, exiſtente A vel T æquali 1, & $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ evadet $180\sqrt{\frac{35645}{35345}}$, ſeu 180. 7623, id eſt, 180 *gr.* 45 *m.* 44 *ſ.* Igitur corpus de apſide ſummâ diſcedens, motu angulari 180 *gr.* 45 *m.* 44 *ſ.* perveniet ad apſidem imam, & hoc motu duplicato ad apſidem ſummam redibit: ideoque apſis ſumma ſingulis revolutionibus progrediendo conficiet 1 *gr.* 31 *m.* 28 *ſec.* Apſis lunæ eſt duplo velocior circiter.

Hactenus de motu corporum in orbibus quorum plana per centrum virium tranſeunt. Supereſt ut motus etiam determinemus in planis excentricis. Nam ſcriptores qui motum gravium tractant, conſiderare ſolent aſcenſus & deſcenſus ponderum, tam obliquos in planis quibuſcunque datis, quam perpendiculares: & pari jure motus corporum viribus quibuſcunque centra petentium, & planis excentricis innitentium hic conſiderandus venit. Plana autem ſupponimus eſſe politiſſima & abſolutè lubrica ne corpora retardent. Quinimo, in his demonſtrationibus, vice planorum quibus corpora incumbunt quæque tangunt incumbendo, uſurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur & orbitas movendo deſcribunt. Et eâdem lege motus corporum in ſuperficiebus curvis peractos ſubinde determinamus.

SEC-

Jam cum orbis ponatur circulo quam maximè finitimus, erit $z = R = T$, & proindè $y = \frac{QTGG}{FF}$ & hinc $GG : FF = y : QT$, ac $G : F = \sqrt{y} : \sqrt{QT}$ quæ eſt formula generalis quæſita. Nam ſit exempli causâ, vis centripeta ut $\frac{bz^m + cz^n}{z^3}$ hoc eſt $y = bz^m + cz^n$, erit $dy = Qdz = mbz^{m-1}dz + ncz^{n-1}dz$; unde $Q = mbz^{m-1} + ncz^{n-1}$, atque ità per formulam inventam $GG : FF = bz^m + cz^n : Tmbz^{m-1} + Tncz^{n-1}$, & ponendo $z = T = 1$, $GG : FF = b + c : mb + nc$, ut in exemplis tertiis Newtonus invenit.

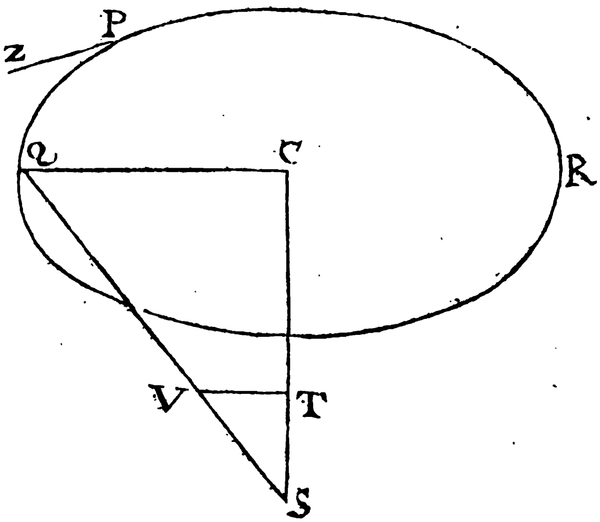
Sit nunc data ratio G ad F, nempe m ad n, & vis centripeta ſit ut dignitas aliqua non data altitudinis z, illius dignitatis index dicatur p, ſitque adeò vis centripeta ut z^p, & erit $\frac{y}{z^3} = z^p$, ac $y = z^{p+3}$, $dy = Qdz = \overline{p+3} \times z^{p+2}dz$, $Q = \overline{p+3} \times z^{p+2}$. Hinc $G^2 : F^2 = m^2 : n^2 = z^{p+3} : \overline{p+3} \times Tz^{p+2}$, hoc eſt, ponendo $z = T = 1$, $mm : nn = 1 : p+3$, atquè ità $\frac{nn}{mm} = p+3$, & $\frac{nn}{mm} - 3 = p$, ut in cor. 1. repertum eſt.

SECTIO X.

De motu corporum in ſuperficiebus datis, deque funipendulorum motu reciproco.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA XXXII.

Poſitâ cujuſcunque generis vi centripetâ, datoque tum virium centro tum plano quocunque in quo corpus revolvitur, & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis: requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, ſecundum rectam in plano illo datam egreſſi.



Sit S centrum virium, SC diſtantia minima centri hujus à plano dato, P corpus de loco P ſecundum rectam PZ egrediens, Q corpus idem in trajectoriâ ſuâ revolvens, & PQR trajectoria illa, in plano dato deſcripta, quam invenire oportet. Jungantur CQ, QS, & ſi in QS capiatur SV proportionalis vi centripetæ quâ corpus trahitur verſus centrum S, & agatur VT quæ ſit parallela CQ & occurrat SC in T: Vis SV reſolvetur (per legum corol. 2.) in vires ST, TV; quarum ST trahendo corpus ſecundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera TV, agendo ſecundum poſitionem plani, trahit corpus directè verſus punctum C in plano datum, ideoque efficit, ut corpus illud in hoc plano perinde moveatur, ac ſi vis ST tolleretur, & corpus vi ſolâ TV revolveretur circa (k) centrum C in ſpatio libero. Datâ autem vi centripetâ TV quâ corpus Q in ſpatio

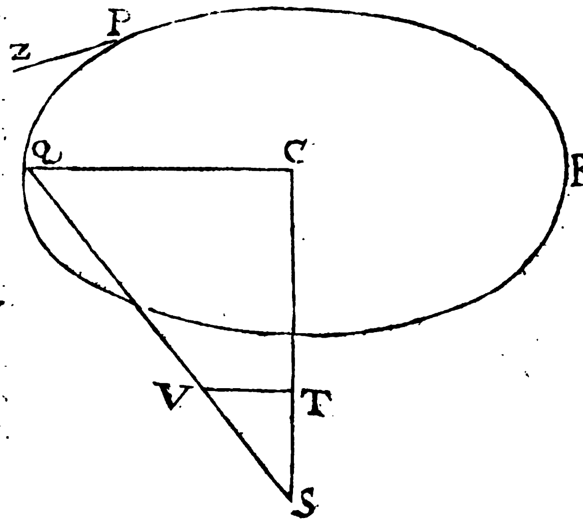
(k) * 455. *Circà centrum C in ſpatio libero.* Vis centripeta S V, ad S tendens in loco quovis Q, dicatur Q, & erit ob triangula S V T, S Q C ſimilia. S Q : Q C

De Motu Corporum.

libero circa centrum datum C revolvitur, datur (per prop. XLII.) tum trajectoria PQR, quam corpus deſcribit, tum locus Q, in quo corpus ad datum quodvis tempus verſabitur, tum denique velocitas corporis in loco illo Q; & contra. *Q. E. I.*

PROPOSITIO XLVII. THEOREMA XV.

Poſito quod vis centripeta proportionalis ſit diſtantiæ corporis à centro; corpora omnia in planis quibuſcunque revolventia deſcribent ellipſes, & revolutiones temporibus æqualibus peragent; quæque moventur in lineis rectis, ultrò citróque diſcurrendo, ſingulas eundi & redeundi periodos iiſdem temporibus abſolvent.



Nam, ſtantibus quæ in ſuperiore propoſitione, vis SV, quâ corpus Q in plano quovis PQR revolvens trahitur verſus centrum S, eſt ut diſtantia SQ; atque ideo ob proportionales SV & SQ, TV & CQ, vis TV, quâ corpus trahitur verſus punctum C in orbis plano datum, eſt ut diſtantia CQ. Vires igitur, quibus corpora in plano PQR verſantia trahuntur ver-

$QC = SV$ ſeu $Q : VT = \frac{Q \times QC}{SQ}$. Sed ob angulum QCS rectum $SQ^2 = QC^2 + SC^2$, ergò VT, ſeu vis ad C tendens in loco Q, ſive $\frac{Q \times QC}{SQ}$ erit æqualis $\frac{Q \times QC}{\sqrt{QC^2 + SC^2}}$. Cum igitur data ſit SC diſtantia minima centri S à plano QPC poſitione dato, ſi loco SQ in quantitate Q, ſcribatur $\sqrt{QC^2 + SC^2}$, obtinebitur valor vis ad C tendentis in loco Q ex ſolâ diſtantiâ QC & quantitatibus datis compoſitus. Exempli causâ, ſi vis SV, ad S tendens in loco Q ſit ut diſtantia SQ, erit VT, ſeu vis ad C tendens in eodem loco Q, ut $\frac{SQ \times QC}{SQ}$ hoc eſt, ut QC. Si vis SV fuerit ut $\frac{1}{SQ^2}$, erit VT, ut $\frac{QC}{SQ^3}$, hoc eſt, ut $\frac{QC}{\overline{QC^2 + SC^2} \times \sqrt{QC^2 + SC^2}}$, & ita de cæteris ſuppoſitionibus.

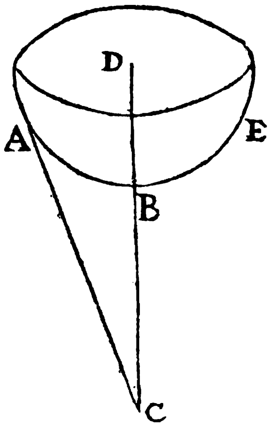
ſus punctum *C*, ſunt (l) pro ratione diſtantiarum æquales viribus quibus corpora undiquaque trahuntur verſus centrum *S*; & propterea corpora movebuntur iiſdem temporibus, in iiſdem figuris, in plano quovis *PQR* circa punctum *C*, atque in ſpatiis liberis circa centrum *S*; ideoque (per corol. 2. prop. x. & corol. 2. prop. XXXVIII.) temporibus ſemper æqualibus, vel deſcribent ellipſes in plano illo circa centrum *C*, vel periodos movendi ultrò citròque in lineis rectis per centrum *C* in plano illo ductis, complebunt. *Q. E. D.*

Scholium.

His affines ſunt aſcenſus ac deſcenſus corporum in ſuperficiebus curvis. (m) Concipe lineas curvas in plano deſcribi, dein circum axes quoſvis datos per centrum virium tranſeuntes revolvi, & eâ revolutione ſuperficies curvas deſcribere; tum corpora ita moveri ut eorum centra in his ſuperficiebus perpetuo reperiantur. Si corpora illa obliquè aſcendendo & deſcendendo currant ultrò citròque; peragentur eorum motus in planis per axem tranſeuntibus, atque ideo in lineis curvis, quarum revolutione curvæ illæ ſuperficies genitæ ſunt. Iſtis igitur in caſi-

(l) * *Sunt pro ratione diſtantiarum &c.* Hoc eſt *vires abſolutæ ad S & C tendentes ſunt æquales, ita ut ſi alicubi* fuerit PC=QS, vis in loco P ad C tendens æqualis erit vi in loco Q ad S tendenti. Nam vis quâ corpus in loco Q ad C trahitur, eſt ad vim quâ versùs S urgetur, ut QC ad QS, & vis in loco Q ad C tendens eſt etiam ad vim in loco P ad idem centrum C urgentem ut QC ad PC ſeu QS; quarè vis in loco Q ad S tendens æqualis eſt vi ad C tendenti in loco P; Corpora verò quæ moventur viribus centripetis quæ ſunt ut diſtantiæ, temporibus ſemper æqualibus ellipſes quaſvis, utut inæquales, deſcribent circà ſua centrà (per Prop. X). Si autem ellipſeos PQR quam corpus in plano deſcribit, latitudo in infinitum minuatur, deſcribet corpus rectam aliquam QCR, motu accelerato ad centrum C accedens, & motu retardato ab ipſo recedens uſque ad R, deindè rursùs ex loco R, ad centrum C recidens, & ità circà centrum C, ultrò citróque oſcillabitur.

(m) * *Concipe lineam curvam* AB in plano ACED deſcriptam, circà axem datum DBC per centrum virium C tranſeuntem revolvi & eâ revolutione ſuperficiem curvam AEB deſcribi, tùm corpus aliquod A ità moveri, ut illius centrum in hâc ſuperficie perpetuò reperiatur. Si corpus illud obliquè deſcendendo & aſcendendo per ABE, EBA currat ultrò citroque peragetur illius motus in plano ACED per axem CD tranſeunte, atque adeò in lineâ curvâ ABE, cum (ex hyp.) nulla adſit vis quæ corpus à plano illo cogat deflectere; ſuperficies AEB perfectè terſa ac polita ſupponitur.



DE MOTU CORPORUM.

bus ſufficit motum in his lineis curvis conſiderare.

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XVI.

Si rota globo extrinſecus ad angulos (n) *rectos inſiſtat, & more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei, quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, (quodque cycloidem vel epicycloidem nominare licet) erit ad duplicatum ſinum verſum arcus dimidii qui globum ex eo tempore inter eundum tetigit, ut ſumma diametrorum globi & rotæ ad ſemidiametrum globi.*

PROPOSITIO XLIX. THEOREMA XVII.

Si rota globo concavo ad rectos angulos intrinſecus inſiſtat & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum ſinum verſum arcus dimidii qui globum toto hoc tempore inter eundum tetigit, ut differentia diametrorum globi & rotæ ad ſemidiametrum globi.

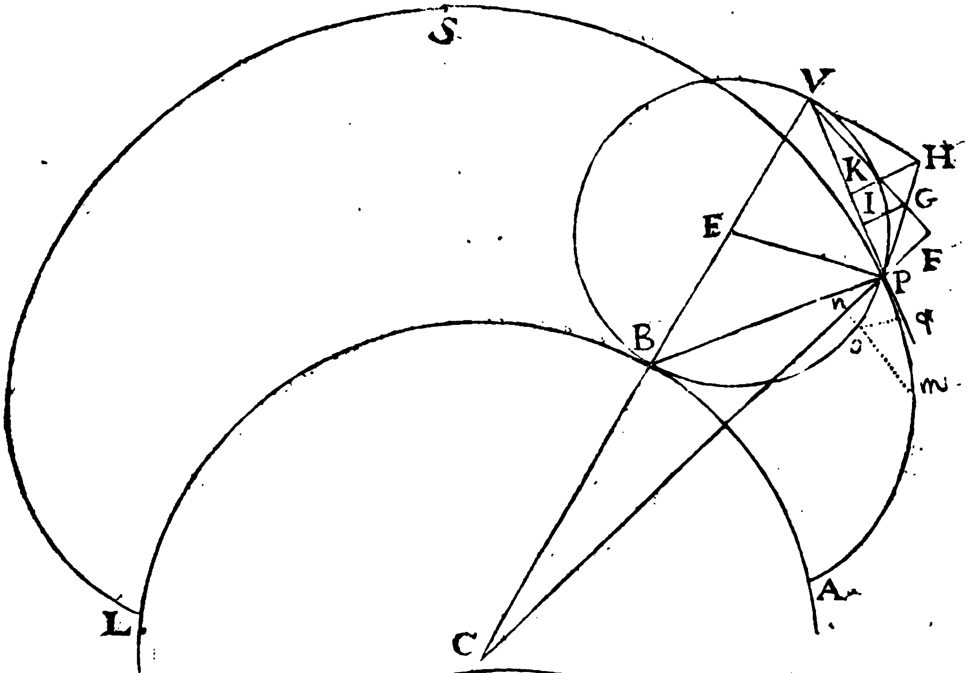
Sit *ABL* globus, *C* centrum ejus, *BPV* rota ei inſiſtens, *E* centrum rotæ, *B* punctum contactus, & *P* punctum datum in perimetro rotæ. Concipe hanc rotam pergere in circulo maximo *ABL* ab *A* per *B* verſus *L*, & inter eundum ita revolvi ut arcus *AB*, *PB* ſibi invicem ſemper æquentur, atque punctum illud *P* in perimetro rotæ datum interea deſcribere viam curvilineam *AP*. Sit autem *AP* via tota curvilinea deſcripta ex quo rota globum tetigit in *A*, & erit viæ hujus longitudo *AP* ad duplum ſinum verſum arcus $\frac{1}{2}$ *PB*, ut 2 *CE* (o) ad *CB*. Nam recta *CE* (ſi opus eſt producta) occurrat rotæ in *V*, junganturque *CP*, *BP*, *EP*, *VP*, & in *CP* productam demittatur normalis *VF*. Tangant *PH*, *VH* circulum in *P* & *V* concurrentes in *H*; ſecetque *PH*, ipſam *VF* in *G*, & ad *VP* demittantur normales *GI*, *HK*. Centro item *C* & intervallo quovis deſcribatur circulus *nom* ſecans rectam *CP* in *n*, rotæ peri-

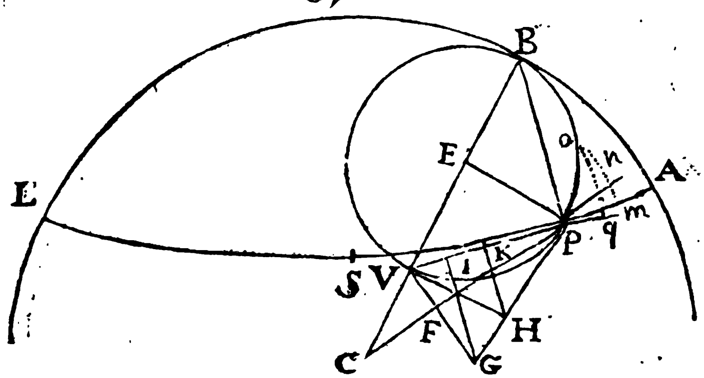
(n) * *Ad angulos rectos*, id eſt, ità ut planum rotæ productum per centrum globi tranſeat, illudque proindè in duo hæmiſpheria dividat ac circulum maximum in ejus ſuperficie ſignet.

(o) * *Ut* 2 CE *ad* CB. Hoc eſt, ob 2 CE = 2 CB + 2 BE, vel 2 CE = 2 CB − 2 BE, ut ſumma vel differentia diametrorum globi & rotæ ad ſemidiametrum globi.

metrum *B P* in *o*, & viam curvilineam *A P* in *m*; centroque *V* & intervallo *V o* deſcribatur circulus ſecans *V P* productam in *q*.

LIBER PRIMUS. PROP. XLIX. THEOR. XVII.



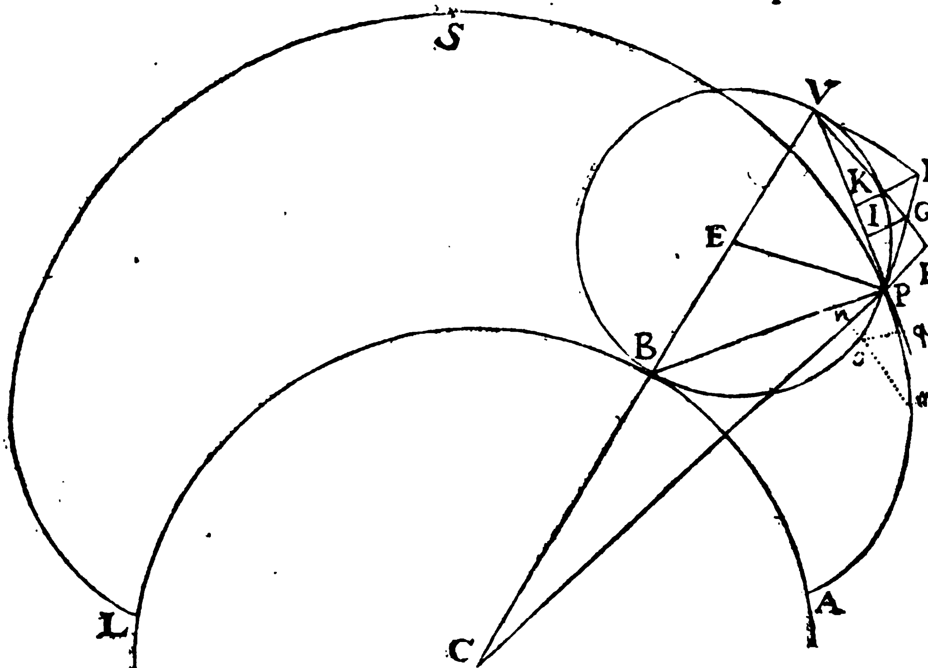


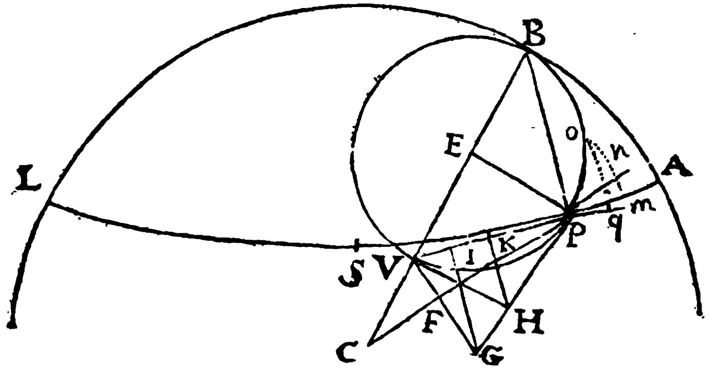
Quoniam rota eundo ſemper revolvitur circa punctum contactus *B*, (p) manifeſtum eſt quod recta *B P* perpendicularis eſt ad

(p) * *Manifeſtum eſt quod recta B P &c.* Nam evidens eſt in circuli B P V revolutione, centro B radio B P ſingulis tempuſculis deſcribi arcum circuli ſeu incrementum naſcens curvæ A P, ad quod proindè radius B P perpendicularis eſt, ſed ob angulum V P B in ſemicirculo rectum, linea V P in eum radium B P eſt perpendicularis, ergo linea VP eſt Tangens ejus arcus naſcentis ſeu incrementi curvæ A P, ideoque ipſius curvæ AP.

De Motu Corporum.

lineam illam curvam *AP* quam rotæ punctum *P* deſcribit, atque ideo quod recta *VP* tanget hanc curvam in puncto *P*.





Circuli *n o m* radius ſenſim auctus vel diminutus æquetur tandem diſtantiæ *CP*; &, ob (q) ſimilitudinem figuræ evaneſcen-

(q) * *Et ob ſimilitudinem figuræ evaneſcentis.* Hâc figurâ evaneſcente arcus P o, P q, conſiderari poſſunt tanquam lineæ rectæ, ſeu partes tangentium H P, V P productarum, & arcus m n, o q, tanquam rectæ lineis P n, P q, perpendiculares; Hinc verò anguli ad verticem oppoſiti n P o & G P F, O P m & G P I, erunt æquales, atque adeò ob angulos o n P & G F P, o q P & G I P, rectos, proindèque æquales, figura evaneſcens P n o m q, ſimilis erit figuræ P F G V I.

tis *Pnomq* & figuræ *PFGVI*, ratio ultima lineolarum evaneſcentium *Pm*, *Pn*, *Po*, *Pq*, id (r) eſt, ratio mutationum momentanearum curvæ *AP*, rectæ *CP*, arcus circularis *BP*, ac rectæ *VP*, eadem erit quæ linearum *PV*, *PF*, *PG*, *PI* reſpectivè. Cum autem *VF* ad *CF* & *VH* ad *CV* perpendiculares ſint, angulique (ſ) *HVG*, *VCF* propterea æquales; & (t) angulus *VHG* (ob angulos quadrilateri *HVEP* ad *V* & *P* rectos) angulo *CEP* æqualis eſt, ſimilia erunt triangula *VHG*, *CEP*; & inde fiet ut *EP* ad *CE* ita *HG* ad *HV* (u) ſeu *HP* & ita (x) *KI* ad *KP*, & (y) compoſitè vel diviſim ut *CB* ad *CE* ita *PI* ad *PK*, & duplicatis conſequentibus ut *CB* ad 2*CE* ita (z) *PI* ad *PV*, atque ita *Pq* ad *Pm*. Eſt (a) igitur decrementum lineæ *VP*, id eſt, incrementum lineæ *BV*−*VP* ad incrementum lineæ curvæ *AP* in datâ ratione *CB* ad 2*CE*, & propterea (per corol. lem. IV.) longitudines *BV*−*VP* & *AP*, incrementis (b) illis

(r) * *Id eſt ratio mutationum momentanearum*, ſeu incrementorum vel decrementorum naſcentium *curvæ AP*, quæ ex A m fit A P, *rectæ CP*, quæ ex C m fit C P, *arcus circularis BP*, qui ex B o fit B P, *ac rectæ VP*, quæ ex V q, fit V P.

(ſ) * *Angulique HVG*, *VCF*, *propterea æquales*. Ob angulum V F C rectum, ſumma angulorum F C V, C V F æqualis eſt angulo recto C V H, quare detracto communi angulo C V F, fit angulus F C V = F V H ſive H V G.

(t) * *Et angulus VHG &c.* Tangentes H V, H P cum radiis E V, E P angulos rectos conſtituunt, adeóque quadrilateri H V E P, anguli duo reliqui V H P ſive V H G & V E P, ſunt ſimul æquales duobus rectis, quarè cum ſint quoque anguli V E P, C E P ſimul duobus rectis æquales, liquet angulum C E P, æqualem eſſe angulo V H G, & in ſecunda figura cum anguli quadrilateri V H P E in V & P ſint recti, reliqui anguli V H P, V E P æquales ſunt duobus rectis, ſed etiam VHP & VHG ſunt æquales duobus rectis, ergo detracto communi V H P, V E P ſive CEP eſt æqualis V H G.

(u) * *Ad HV, ſeu HP.* Nam circuli tangentes H V, H P ſunt æquales.

(x) * *Et ità KI ad KP.* Etenim ob parallelas H K, G I, eſt H G : H P = K I : K P.

(y) * *Et compoſitè vel diviſim.* Cum ſit E P, ſeu B E : C E = K I : K P, ſi rota globo intrinſecus inſiſtat, erit compoſitè B E + C E, ſeu C B : C E = K I + K P, ſeu P I : P K. Si verò rota globo extrinſecus inſiſtat, erit diviſim C E − B E, ſeu C B : C E = K P − K I, ſeu P I : P K.

(z) * *Ità PI ad PV.* Nam in triangulo P H V iſoſcele, eſt P K = K V, adeóque 2 P K = P V.

(a) * *Eſt igitur decrementum lineæ VP &c.* Dum arcus A m creſcit fitque AP, recta V q decreſcit & fit V P; quare eſt P m incrementum curvæ A m ſeu A P, & Pq decrementum rectæ V P. Cum autem ſit B V circuli diameter conſtans, quantùm decreſcit V P, tantùm creſcit differentia B V − V P, undè decrementum lineæ VP, æquale eſt incremento lineæ B V − V P. *Eſt igitur incrementum lineæ BV−VP, ad incrementum lineæ curvæ AP &c.*

(b) * *Incrementis illis genitæ &c.* Cum punctum P eſt in A, punctum B eſt etiam in A, fitque V P = V B, adeóque B V − V P = o. Simul ergò creſcere incipiunt lineæ B V − V P & A P; & quoniam in datâ ratione creſcunt, erit ſemper BV−VP ad A P in datâ illâ ratione C B ad 2 C E.

genitæ, ſunt in eâdem ratione. Sed, (c) exiſtente BV radio, eſt VP coſinus anguli BVP ſeu $\frac{1}{2}$ BEP, ideoque $BV-VP$ ſinus verſus eſt ejuſdem anguli; & propterea in hâc rotâ, cujus radius eſt $\frac{1}{2}$ BV, erit $BV-VP$ duplus ſinus verſus arcus $\frac{1}{2}$ BP. Ergo AP eſt ad duplum ſinum verſum arcus $\frac{1}{2}$ BP ut $2\,CE$ ad CB. *Q. E. D.*

Lineam autem *AP* in propoſitione priore cycloïdem extra globum, alteram in poſteriore cycloidem intra globum diſtinctionis gratiâ nominabimus.

Corol. 1. Hinc ſi (d) deſcribatur cyclois integra *ASL* & biſecetur ea in *S*, erit longitudo partis *PS* ad longitudinem *VP* (quæ duplus eſt ſinus anguli *VBP*, exiſtente *EB* radio) ut $2CE$ ad *CB*, atque ideo in ratione datâ.

Corol. 2. Et (e) longitudo ſemiperimetri cycloidis *AS* æquabitur lineæ rectæ, quæ eſt ad rotæ diametrum *BV* ut $2CE$ ad *CB*.

456. (c) *Sed exiſtente BV radio &c.* Ob angulum BPV rectum, eſt BV ad VP ut ſinus totus ad ſinum anguli VBP qui complementum eſt anguli BVP ad rectum. Quare exiſtente BV radio, eſt VP coſinus anguli BVP æqualis dimidio angulo ad centrum BEP. Eſt autem cujuſvis anguli ſinus verſus æqualis differentiæ inter radium & coſinum ejuſdem anguli, ergò exiſtente BV radio, erit BV—VP ſinus verſus anguli $\frac{1}{2}$ BEP; & quoniam in diverſis circulis æqualium angulorum ſinus omnes ſunt ut circulorum radii, in hâc rotâ cujus radius eſt $\frac{1}{2}$ BV, erit BV—VP, duplus ſinus verſus arcûs $\frac{1}{2}$ BP,

(d) 457. *Hinc ſi deſcribatur &c.* Ubi punctum P pervenit ad S, arcus BP ſemicirculo, arcus $\frac{1}{2}$ BP quadranti, & ſinus verſus arcûs $\frac{1}{2}$ BP radio, æquales fiunt. Quarè in hoc caſu curva AS, eſt ad diametrum BV, ut 2CE, ad CB; cumque in loco quovis P, ſit etiam curva AP, ad duplum ſinum verſum $\frac{1}{2}$ BP, ſeu ad BV —VP (456) ut 2CE ad CB, erit $AS:BV::=AP:BV-VP$, & hinc AS—AP, ſeu $PS:BV-BV+VP$, ſeu $VP=AS:BV=2CE:CB$.

(e) * *Et longitudo ſemiperimetri.* Patet per notam ſuperiorem.

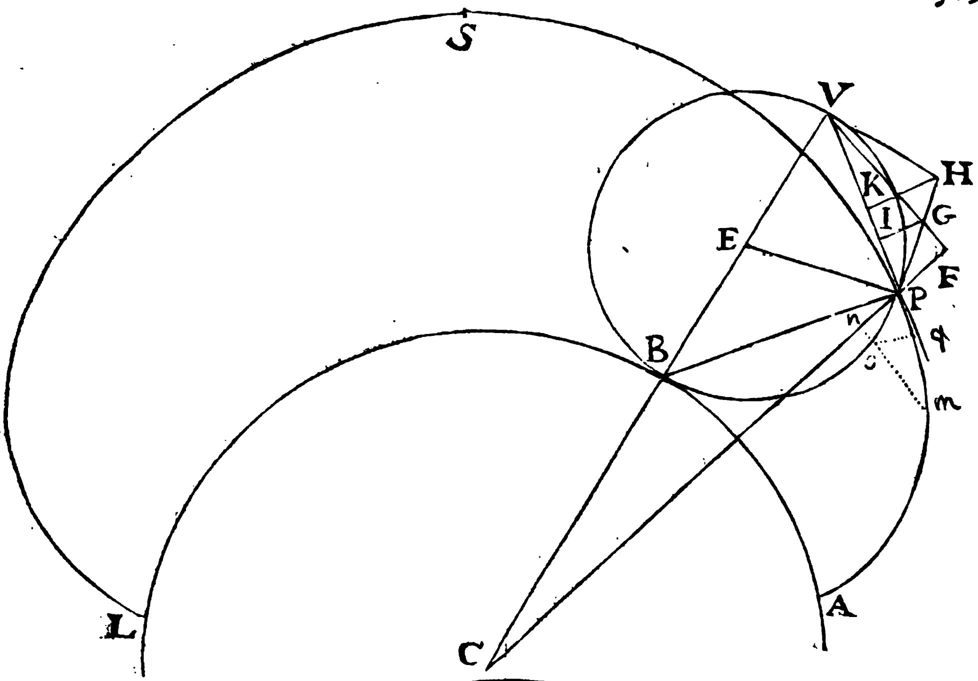
458. Coroll. 3. Recta CS cycloidi perpendicularis eſt, & recta CA eam tangit in A. Eſt enim BP ad cycloidem perpendicularis, & VP tangens ejus in P, at ubi punctum P pervenit in S, BP fit BS, ſeu BV, & ubi punctum B eſt in A, VP coincidit cum VB.

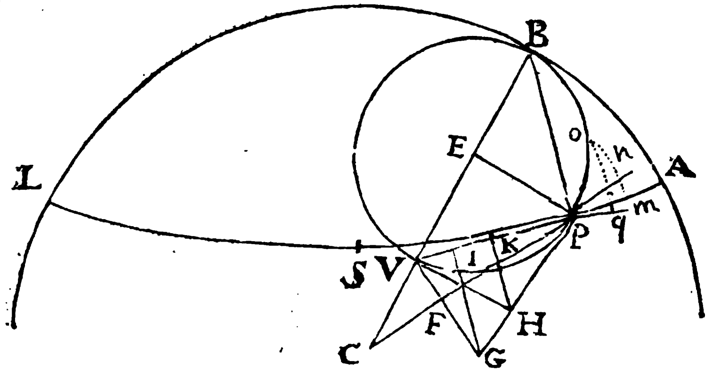
459. Coroll. 4. Si per punctum quodvis P agatur PV cycloidem tangens in P, & ad eam erigatur perpendiculum PB globo occurrens in B, jungaturque CB tangentem ſecans in V, erit BV rotæ diameter.

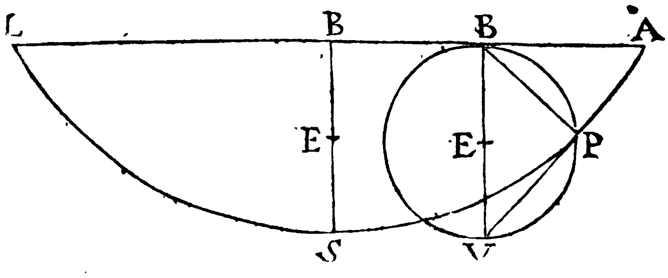
460. Coroll. 5. Ex geneſi cycloidis liquet arcum globi AB, æqualem eſſe arcui rotæ BP.

461. Coroll. 6. Si rotæ diameter VB æqualis conſtituatur ſemidiametro globi CB, cyclois intrà globum evadet linea recta per centrum globi C tranſiens. Nam in hoc caſu $CS=0$, & $2CE=CB$; undè punctum cycloidis medium S, cum centro coincidit, & quia (457) $AS:BV=2CE:CB$, erit $AS=BV=CB$ atque adeò eſt AS linea recta per centrum C tranſiens, nam ſi curva eſſet, major foret ſemidiametro CB.

LIBER PRIMUS. PROP. XLIX. THEOR. XVII.







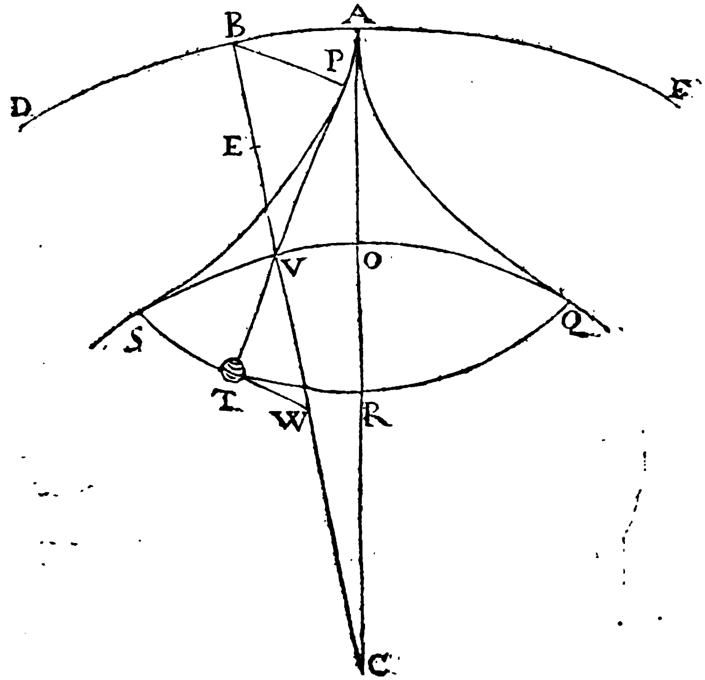
462. Coroll. 7. Si globi diameter augeatur in infinitum, mutabitur ejus ſuperficies ſphærica in planum, fietque A B L linea recta, & B E finitâ manente ſeu nullâ reſpectu infinitæ lineæ C B, erit C E = C B, adeóque cyclois tam intrà quam extrà globum abibit in cycloidem vulgarem, quæ deſcribitur revolutione rotæ in lineâ rectâ progredientis, cumque ſit ſemper (457) $AP : BV - VP = 2\,CE : CB = 2 : 1$, erit $AP = 2 \times (BV - VP)$, ſed $BV - VP$, eſt duplus ſinus verſus arcûs $\frac{1}{2}$ B P, exiſtente B E radio (456). Ergò in cycloide vulgari A P æquatur quadruplicato ſinui verſo dimidii arcûs B P, inter planum A B L & punctum deſcribens P intercepti; Hinc etiam erit $AS = 4\,BE = 2\,BS = 2\,BV$; Eſt enim B E ſinus verſus quadrantis.

DE MOTU CORPORUM.

PROPOSITIO L. PROBLEMA XXXIII.

Facere ut corpus pendulum oſcilletur in cycloide datâ.

Intra globum *QVS*, centro *C* deſcriptum, detur cyclois *QRS* biſecta in *R* & punctis ſuis extremis *Q* & *S* ſuperficiei globi hinc inde occurrens. Agatur *CR* biſecans arcum *QS*



in *O*, & producatur ea ad *A*, ut ſit *CA* ad *CO* ut *CO* ad *CR*. Centro *C* intervallo *CA* deſcribatur globus exterior *DAF*, & intra hunc globum à rotâ, cujus diameter ſit *AO*, deſcribantur duæ ſemicycloides *AQ*, *AS*, quæ (f) globum in-

(f) * *Quæ globum interiorem tangant in Q & S, & globo exteriori occurrant in A.* Probandum ſemicycloides deſcriptas per motum rotæ (cujus diameter eſt AO) ex A proficiſcentis terminari ad ſuperficiem globi interioris in punctis extremis Q & S cycloidis QRS datæ. Producantur itaque lineæ CQ, CS ad F & D, eritque FQ = DS = AO, & ſuper Diametros FQ, DS intelligantur deſcriptæ rotæ quarum motu fiunt ſemicycloides, dicaturque P punctum rotæ ſemicy-

teriorem tangant in Q & S & globo exteriori occurrant in A. A puncto illo A, filo APT longitudinem AR æquante, pendeat corpus T, & ita intra ſemicycloides AQ, AS oſcilletur, ut quoties pendulum digreditur à perpendiculo AR, filum parte ſui ſuperiore AP applicetur ad ſemicycloidem illam APS verſus quam peragitur motus, & circum eam [illegible]ceu obſtaculum flectatur, parteque reliquâ PT cui ſemicycloi[illegible]dum objicitur, protendatur in lineam rectam; & pond[illegible]illabitur in cycloide datâ QRS. *Q. E. F.*

LIBER PRIMUS. PROP. L. PROBL. XXXIII.

Occurrat enim filum PT tum cycloidi QRS in T, tum circulo QOS in V, agaturque CV; & ad fili partem rectam PT, è punctis extremis P ac T, erigantur perpendicula BP, TW, occurrentia rectæ CV in B & W. Patet, (g) ex conſtructione & geneſi ſimilium figurarum AS, SR, (h) perpendicula illa PB, TW abſcindere de CV longitudines VB, VW rotarum

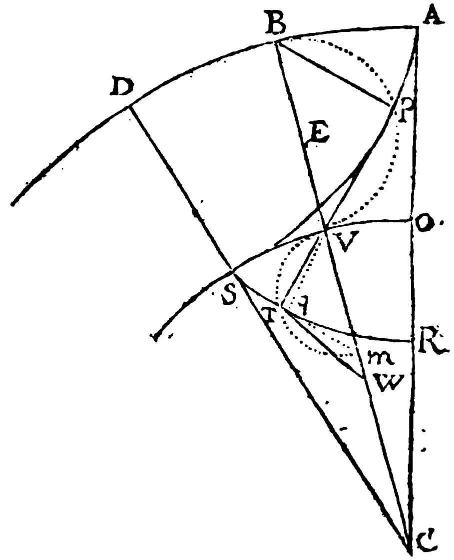
cycloides deſcribens; Liquet arcûs OQ & AF, OS & AD eſſe proportionales radiis CO, CA ſive (per conſt.) radiis CR, CO & diviſim rotarum Diametris OR, AO, ideoque (per nat. circuli) ſemicircumferentiis rotarum ſuper has Diametros deſcriptarum; Sed cum Q & S ſint puncta extrema cycloidis datæ QRS & CO arcum QS biſecet, erunt arcus OQ & OS æquales ſemicircumferentiæ rotæ ſuper Diametrum OR deſcriptæ (460) ergò etiam arcus AF & AD æquales erunt ſemicircumferentiæ rotæ ſuper Diametrum AO deſcriptæ, ſed arcus FP aut DP eſt ſemper æqualis arcui AF aut AD (460); erunt ergo arcus FP & DP ſemicirculi, & P cadet in extremitatibus Q & S Diametrorum FQ, DS, ſed ubi P ſemicircumferentiam rotæ percurrit ſemicyclois eſt deſcripta, ergo ſemicycloides deſcriptæ per motum rotæ ex A proficiſcentis terminantur in Q & S. Q.E.D.

(g) 463. *Patet ex conſtructione & geneſi ſimilium figurarum AS, SR;* Figuræ illæ dicuntur ſimiles quia AO diameter rotæ quâ deſcribuntur ſemicycloides AS, AQ eſt ad globi DAF radium AC ut diameter OR rotæ quâ deſcribitur cyclois QRS ad globi QOS radium OC, (per conſtr.) unde manifeſtum quod cycloides AS, AQ, QR, quæ eodem modo deſcribuntur ac determinantur ſunt inter ſe ſimiles.

(h) * *Perpendicula illa* &c. 1°. Probandum quod *perpendiculum PB abſcindat de CV longitudinem VB rotæ Diametro OA æqualem.* Fingatur rotam ita poſitam ut ejus punctum Cycloidem deſcribens ſit in P, liquet, ex conſtructione, eam hujus rotæ Diametrum quæ in hoc caſu globo eſt perpendicularis & quæ, ſi producatur, tranſire debet per centrum C, utrinque terminari debere in ſuperficie globorum; Jam verò (per Demonſt. Prop. XLVIII. XLIX.) Tangens Cycloidis tranſit ſemper per unam extremitatem ejus Diametri rotæ quæ globo eſt perpendicularis & perpendiculum in Tangentem è puncto contactus erectum tranſit per alteram ejuſdem Diametri extremitatem, ergo, cum ſit (ex conſt.) filum PT Tangens Cycloidis in puncto P, & PB perpendiculum in illud, interſectiones V & B linearum PT & PB cum globis QOS & DAF erunt extremitates ejus Diametri rotæ quæ ſi producatur tranſit per centrum C, ergo ducta CV, per-

De Motu Corporum.

tarum diametris OA, OR æquales. Eſt (i) igitur TP ad VP (duplum ſinum anguli VBP exiſtente $\frac{1}{2}$ BV radio) ut



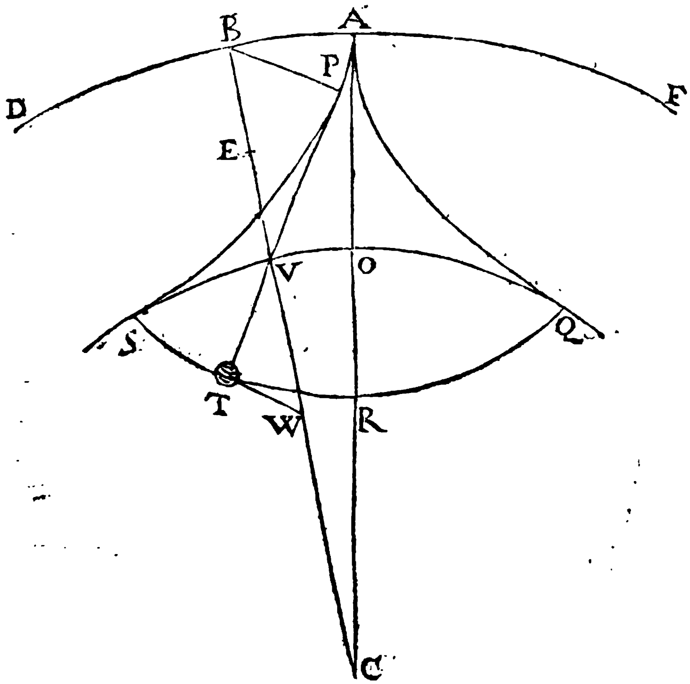
perpendiculum PB abſcindet de CV longitudinem VB rotæ Diametro OA æqualem. Q. E. 1°. D.

2°. *Perpendiculum TW abſcindit de CV longitudinem VW rotæ diametro OR æqualem.* Fingatur rota Cycloidem SRQ deſcribens ita poſita, ut ejus Diameter globo SOQ inſiſtens ſit in lineâ CV, globumque tangat in V, dicatur m altera extremitas ejus Diametri, & dicatur q punctum illius rotæ Cycloidem deſcribens: Arcus VS erit æqualis arcui Vq, (460) utque totus arcus SO eſt æqualis arcui Vm, erit VO = qm, & qm eſt menſura dupli anguli CVq; Sit verò rota deſcribens cycloidem APS poſita ſicut in priore caſu, hoc eſt, ejus Diameter globo DAF inſiſtens ſit in productione lineæ CV, erit arcus BA æqualis arcui BP (460) & eſt BP menſura dupli anguli BVP; Eſt autem arcus VO ſive qm ad BA ſive BP, ut CO ad CA ideoque ut Diametri rotarum OR ad AO (ex conſt.), arcûs verò diverſorum circulorum qui ſunt inter ſe ut ſuorum circulorum Diametri, ſunt ſimiles ideoque ejuſdem numeri graduum, ergo angulus CVq eſt æqualis angulo BVP quoniam arcus qui ſunt menſura eorum dupli, ſunt ejuſdem numeri graduum, ideoque illi anguli CVq, BVP ſunt per verticem oppoſiti & PVq eſt linea recta; itaque, filum PV productum ad T tranſit tàm per extremitatem V Diametri rotæ globo inſiſtentis quàm per ejus rotæ punctum q Cycloidem deſcribens; Ergo (per Dem. Prop. XLVIII. XLIX.) filum PT eſt perpendiculare in Tangentem Cycloidis in puncto illo q ſive T, ideoque ex conſtructione linea TW erit ea ipſa Tangens, & (per Dem. Prop. XLVIII. XLIX.) tranſibit per extremitatem m Diametri rotæ quæ globo inſiſtit, hoc eſt Diametri jacentis in linea CV, *ergo TW abſcindet de CV longitudinem rotæ Diametro OR æqualem.* Q. E. 2°. D.

* *Idem aliter.* Ex puncto V ducatur ad ſemicycloidem SR perpendicularis Vq, & qm tangens in q radio CV occurrens in m, erit (459) $Vm = OR$. Deſcriptis rotis BPV, Vqm, erit angulus BVP, æqualis arcui BP, ad diametrum BV, applicato ſeu $= \frac{BP}{BV}$, hoc eſt, ob arcum $BA = BP$ (460) & $BV = AO$, angulus $BVP = \frac{BA}{AO}$. Simili ratione, cum ſit arcus Vq æqualis arcui SV, & ſemirota Vqm æqualis arcui SO, erit arcus $qm = VO$, adeóque angulus $qVm = \frac{VO}{OR}$. Quarè angulus $BVP : qVm = \frac{BA}{AO} : \frac{VO}{OR} = OR \times BA : AO \times VO$; ſed $BA : VO = CA : CO = AO : OR$ (per conſtr.) adeóque $OR \times BA = AO \times VO$, Ergò angulus $BVP = qVm$. Cum igitur anguli BVP, TVW ad verticem oppoſiti ſint etiam æquales, perpendicularis Vq coincidit cum VT, tangens qm cum TW, & Vm cum VW, undè tandem eſt $Vm = OR = VW$.

(i) * *Eſt igitur &c.* Ob triangula VPB, VTW ſimilia $TV : VP = VW : VB$, & componendo $TP : VP = BW : BV$.

BW ad *BV*, ſeu *AO*+*OR* ad *AO*, id eſt (cum ſint *CA* ad *CO*, *CO* ad *CR* & diviſim *AO* ad *OR* proportionales) ut *CA*+*CO* ad *CA*, vel, ſi biſecetur *BV* in *E*, ut 2*CE* ad *CB*. Proinde (per corol. 1. prop. XLIX.) longitudo partis rectæ fili *PT* æquatur ſemper cycloidis arcui *PS*, & filum totum *APT* æquatur ſemper cycloidis arcui dimidio *APS*, hoc eſt



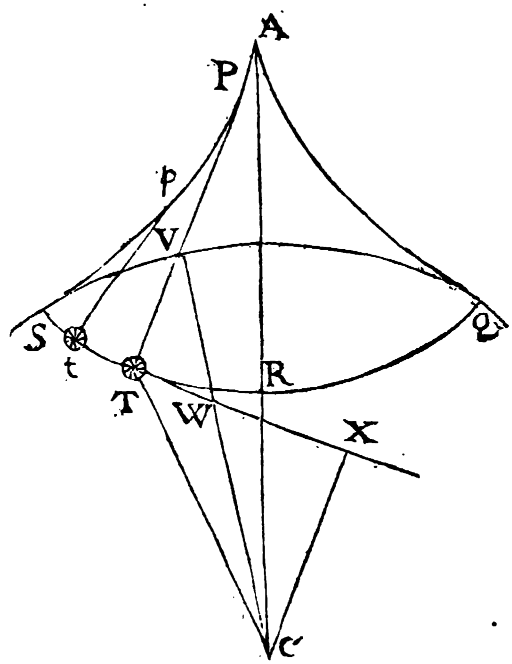
(per corol. 2. prop. XLIX.) longitudini *AR*. Et propterea viciſſim ſi filum manet ſemper æquale longitudini *AR* movebitur punctum *T* in cycloide data *QRS*. *Q. E. D.*

Corol. Filum *AR* æquatur ſemicycloidi *AS*, ideoque ad globi exterioris ſemidiametrum *AC* eandem habet rationem quam ſimilis illi ſemicyclois *SR* habet ad globi interioris ſemidiametrum *CO*.

DE MOTU CORPORUM.

PROPOSITIO LI. THEOREMA XVIII.

Si vis centripeta tendens undique ad globi centrum C *ſit in locis ſingulis ut diſtantia loci cujuſque à centro, & hâc ſolâ vi agente corpus* T *oſcilletur (modo jam deſcripto) in perimetro cycloidis* QRS: *dico quod oſcillationum utcunque inæqualium æqualia erunt tempora.*



Nam in cycloidis tangentem *TW* infinitè productam cadat perpendiculum *CX* & jungatur *CT*. Quoniam vis centripeta quâ corpus *T* impellitur verſus *C* eſt ut diſtantia *CT*, atque hæc (per legum corol. 2.) reſolvitur in partes *CX*, *TX*, quarum *CX* impellendo corpus directè à *P* diſtendit filum *PT* & per ejus reſiſtentiam tota ceſſat, nullum alium edens effectum, pars autem altera *TX*, urgendo corpus tranſverſim ſeu verſus *X* directè accelerat motum ejus in cycloide; manifeſtum eſt quod corporis acceleratio, huic vi acceleratrici proportionalis, ſit ſingulis momentis ut longitudo *TX*, id ([l]) eſt, ob datas *CV*, *WV* iiſque proportionales *TX*, *TW*, ut longitudo *TW*, hoc eſt (per corol. 1. prop. XLIX.) ut longitudo arcus cycloidis *TR*. Pendulis igitur duobus *APT*, *Apt* de perpendiculo *AR* inæqualiter deductis & ſimul dimiſſis, accelerationes eorum ſemper erunt ut arcus deſcribendi *TR*, *tR*. Sunt ([m]) autem partes ſub

(l) * *Id eſt ob datas.* Ob triangula WXC, WTV ſimilia, eſt CW : WV = WX : TW, & componendo CV : WV = TX : TW; quare ob datas CV, WV, data eſt ratio TX ad TW, id eſt TX eſt ut TW.

(m) 464. *Sunt autem* arcuum tR, TR partes ſub initio eodem tempuſculo deſcriptæ ut accelerationes, hoc eſt, ut toti arcus tR, TR ſub initio deſcribendi & propterea diviſim, partes arcuum

initio deſcriptæ ut accelerationes, hoc eſt, ut totæ ſub initio deſcribendæ, & propterea partes quæ manent deſcribendæ & accelerationes ſubſequentes, his partibus proportionales, ſunt etiam ut totæ; & ſic deinceps. Sunt igitur accelerationes, atque ideo velocitates genitæ & partes his velocitatibus deſcriptæ parteſque deſcribendæ, ſemper ut totæ; & propterea partes deſcribendæ datam ſervantes rationem ad invicem ſimul evaneſcent, id eſt, corpora duo oſcillantia ſimul pervenient ad perpendiculum *AR*. Cumque viciſſim aſcenſus perpendiculorum de loco infimo *R*, per eoſdem arcus cycloidales motu retrogrado facti, retardentur in locis ſingulis à viribus iiſdem à quibus deſcenſus accelerabantur, patet velocitates aſcenſuum ac deſcenſuum per eoſdem arcus factorum æquales eſſe, atque ideo temporibus æqualibus fieri; & propterea, cum cycloidis partes duæ *RS* & *RQ* ad utrumque perpendiculi latus jacentes ſint ſimiles & æquales, pendula duo oſcillationes ſuas tam totas quam dimidias iiſdem temporibus ſemper peragent. *Q. E. D.*

Corol. Vis (n) quâ corpus *T* in loco quovis *T* acceleratur vel retardatur in cycloide, eſt ad totum corporis ejuſdem pondus in loco

cuum tR, TR quæ manent deſcribendæ & accelerationes ſubſequentes his partibus proportionales ſunt etiam ut toti arcus tR, TR, & ſic deinceps. Quoniam autem velocitates dato tempore genitæ ſunt ut accelerationum ſummæ, quæ ob datam accelerationum rationem ſunt in eâdem ratione datâ arcuum tR, TR, liquet accelerationes atque ideò velocitates genitas & partes his velocitatibus deſcriptas, parteſque deſcribendas ſemper eſſe ut ſunt toti arcus tR, TR, & propterea ſi pars arcûs TR deſcribenda evaneſcat, quod fit dum corpus pendulum T pervenit ad R, pars arcûs tR, ſimul evaneſcet, ob datam harum partium rationem. Undè corpora duo oſcillantia t & T ex punctis t & T ſimul demiſſa, ſimul pervenient in R.

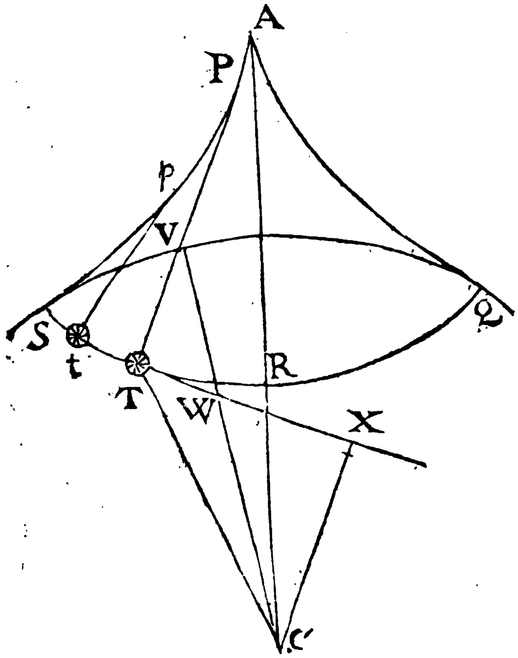
(n) * *Vis quâ corpus T* in loco quovis T acceleratur vel retardatur in cycloide, eſt ad vim quâ in loco altiſſimo S, vel Q acceleratur vel retardatur in cycloide, ut arcus TR, ad arcum SR, (ex demonſtr. prop. 51.) ſed vis quâ corpus in loco S vel Q acceleratur vel retardatur in cycloide, eſt vis tota quâ ad centrum C, perpendiculariter urgetur; radius enim CS cycloidem SR tangit in S, (458) adeóque directio vis in loco S in cycloide coincidit cum directione vis rectâ trahentis ad centrum C.

465. Coroll. 1. Si centro A radio AR circulus deſcribatur, cycloidis SRQ arcus naſcens in loco infimo R cum circuli illius arcu naſcente coincidit. Quarè ſi longitudo penduli AR magna ſit, eodem propè modo in exiguis circuli arcubus

De Motu Corporum.

loco altiſſimo *S* vel *Q*, ut cycloidis arcus *TR* ad ejuſdem arcum *SR* vel *QR*.

PRO-

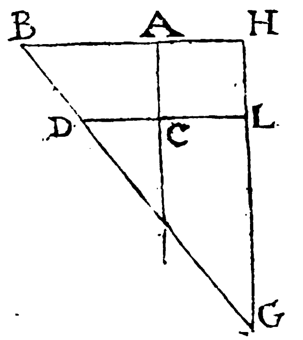


cubus oſcillabitur corpus quo in cycloide, & quò major eſt longitudo penduli minorque circuli arcus in quem excurrit, eò major erit motuum in circulo & in cycloide conſonantia, atque hinc, non abludente experientiâ, oſcillationes in exiguis circuli arcubus ſunt ad ſenſum iſochronæ.

466. Coroll. 2. Ex his deducitur quænam ſit æquatio ad hanc Cycloidem intrà globum deſcriptam pertinens, ſive, invenietur æquatio exprimens rationem diſtantiæ cujuſvis puncti T à centro ad perpendiculum in Tangentem ex eo puncto ductam demiſſum: Dicatur enim globi radius CV, a, Diameter rotæ VW, $a-c$, erit diſtantia CR ſive CW, c; Ducatur ex puncto quovis T linea TC ad centrum quæ dicatur x, ducatur Tangens TX ex eo puncto T & ex centro demittatur in eam Tangentem perpendiculum CX, ſit $TX = z$ & $CX = p$. Erit ubique $pp = \frac{aacc - ccxx}{aa - cc}$; Nam ob ſimilia Triangula VTW, WCX eſt

CW (c) : VW $(a-c)$ = CX (p) : TV $= \frac{p}{c} \times a-c$ & CV (a) : WV $(a-c)$ = TX (z) : TW $= \frac{z}{a} \times a-c$; eſt itaque $TV^2 + TW^2 = \frac{p^2}{c^2} \times \overline{a-c}^2 + \frac{z^2}{a^2} \times \overline{a-c}^2$. Sed $TV^2 + TW^2 = VW^2 = \overline{a-c}^2$, ergo $\frac{p^2}{c^2} \times \overline{a-c}^2 + \frac{z^2}{a^2} \times \overline{a-c}^2 = \overline{a-c}^2$ & dividendo utrumque membrum æquationis per $\overline{a-c}^2$ erit $\frac{p^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2}$ $\left(\text{ſive } \frac{a^2p^2 + c^2z^2}{a^2c^2}\right)$ $= 1$, & multiplicato utroque membro æq. per a^2c^2 eſt $a^2p^2 + c^2z^2 = a^2c^2$, ſed eſt $z^2 = x^2 - p^2$ (per conſt.) Ergo $a^2p^2 + c^2x^2 - c^2p^2 = a^2c^2$ & factâ tranſpoſitione $a^2p^2 - c^2p^2 = a^2c^2 - c^2x^2$, ideoque $p^2 = \frac{a^2c^2 - c^2x^2}{a^2 - c^2}$. Q. E. D.

Simili ratiocinio invenietur æquatio ad epicycloidem ſive cycloidem extra globum deſcriptam inverſis ſolummodo terminis & ſignis ut ſit $pp = \frac{c^2x^2 - a^2c^2}{c^2 - a^2}$.



467. Lemma. Ad punctum G tendat vis centripeta diſtantiæ ab illo puncto proportionalis quam in locis H, L exhibeant lineæ HB, LD rectæ GH perpendiculares, ſitque recta GDB locus punctorum B, D, capiatur HA ad HB ut vis centripeta conſtans ad vim variabilem in lo-

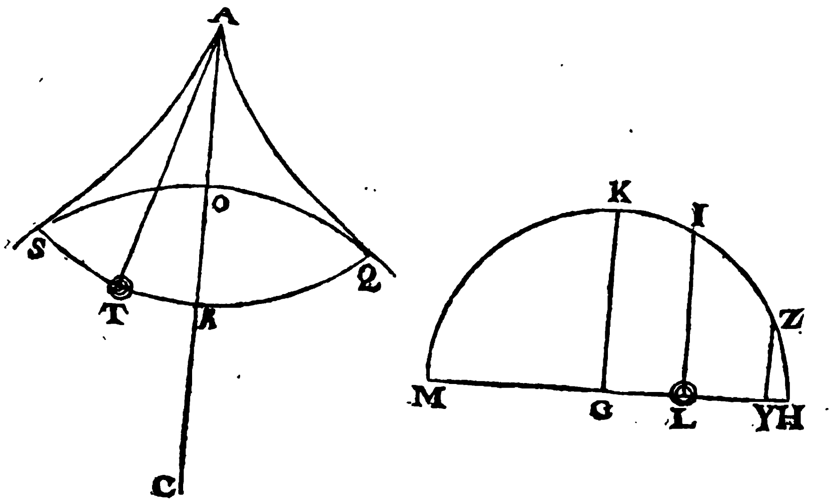
co

PROPOSITIO LII. PROBLEMA XXXIV.

LIBER PRIMUS. PROP. LII. PROBL. XXXIV.

Definire & velocitates pendulorum in locis ſingulis, & tempora quibus tum oſcillationes totæ, tum ſingulæ oſcillationum partes peraguntur.

Centro quovis G, intervallo GH cycloidis arcum RS æquan-



te, deſcribe ſemicirculum HKM ſemidiametro GK biſectum. Et ſi vis centripeta, diſtantiis locorum à centro proportionalis, tendat ad centrum G, ſitque ea in perimetro HIK æqualis vi centripetæ in perimetro globi QOS ad ipſius centrum tendenti; & (o) eodem tempore quo pendulum T dimittitur è loco

co dato H, & agatur AC rectæ HG parallela lineam LD ſecans in C, de loco H cadant corpora duo, quorum alterum vi conſtante HA, alterum vi variabili HB vel LD urgeatur, ſintque illorum velocitates in eodem loco L, V, v, & erit V^2 ad v^2, ut area HACL ad aream HBDL, (per prop. 39. & not. 408.) id eſt $V^2 : v^2 = HL \times HA : HL \times \frac{BH + DL}{2} = 2HA : BH + DL$. Et quoniam in centro G evaneſcit DL erit in illo centro $V^2 : v^2 = 2HA : BH$, & $V : v = \sqrt{2HA} : \sqrt{BH}$. Quarè datis in loco H viribus HA, HB, & velocitate in loco quovis L vel G vi conſtante acquiſitâ, datur velocitas vi variabili in eodem loco acquiſita.

(o) * *Et eodem tempore.* Id eſt, ſimul demittantur ex locis S & H corpora T & L.

DE MOTU CORPORUM.

loco ſupremo S, cadat corpus aliquod L ab H ad G: quoniam vires quibus corpora urgentur ſunt æquales ſub initio & ſpatiis deſcribendis TR, LG ſemper proportionales, atque ideo, ſi æquantur TR & LG, æquales in locis T & L; patet corpora illa deſcribere ſpatia ST, HL æqualia ſub initio, (p) ideoque ſubinde pergere æqualiter urgeri, & æqualia ſpatia deſcribere. Quare (per prop. XXXVIII.) tempus quo corpus deſcribit arcum ST eſt ad tempus oſcillationis unius, ut arcus HI, tempus quo corpus H perveniet ad L, ad ſemiperipheriam HKM, tempus quo corpus H perveniet ad M. Et velocitas corporis penduli in loco T eſt ad velocitatem ipſius in loco infimo R, (hoc eſt, velocitas corporis H in loco L ad velocitatem ejus in loco G, ſeu (q) incrementum momentaneum lineæ HL ad incrementum momentaneum lineæ HG, arcubus HI, HK æquabili fluxu creſcentibus) ut ordinatim applicata LI ad radium GK, ſive ut (r) $\sqrt{SRq.-TRq.}$ ad SR. Unde (ſ) cum, in oſcillationibus inæqualibus, deſcribantur æqualibus temporibus

(p) * *Ideóque ſubindè pergere æqualiter urgeri & æqualia ſpatia* iiſdem nempe temporibus *deſcribere.*

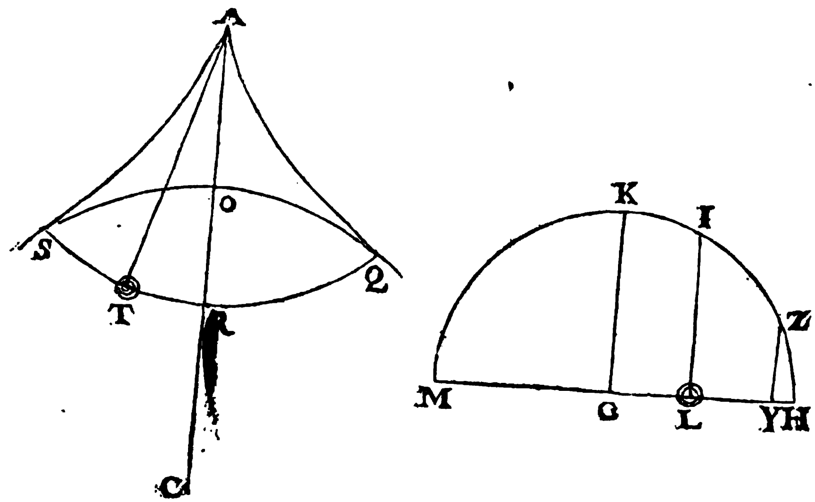
(q) * *Seu incrementum momentaneum &c.* Nam incrementa illa ſunt ſpatia eodem tempuſculo uniformiter deſcripta, quæ proindè ſunt ut velocitates in locis L & G, quibus deſcribuntur, arcus autem HI, HK, quæ tempora exhibent, creſcunt ut tempora, hoc eſt, æquabili fluxu.

(r) *Sivè ut* $\sqrt{SR^2-TR^2}$ *ad* SR. Eſt enim, ex naturâ circuli $LI^2=ML\times LH=GH^2-GL^2=SR^2-TR^2$, adeóque $LI=\sqrt{SR^2-TR^2}$; & $LI:GK=\sqrt{SR^2-TR^2}:GK$, ſeu SR.

(ſ) 468. *Undè cum &c.* Datâ vi centripetâ in perimetro globi QOS vel in H datur tum velocitas quâ corpus hâc vi ſollicitatum deſcribit circulum HKM, tum tempus quo ſemiperipheriam HKM percurrit (201) hoc eſt, tempus unius oſcillationis integræ; & contrà, Dato tempore unius oſcillationis integræ, datur vis centripeta in H vel S (202). Porrò dato arcu ST, vel rectâ æquali HL, datur LI ſinus arcus HI, & hinc datur hic arcus, adeóque & ratio HI, ad HKM, id eſt, ratio temporis quo percurritur HL vel ST ad tempus datum oſcillationis integræ. Et contrà dato tempore quo deſcribitur HL vel ST, datur arcus HI, & hinc datur illius ſinus rectus LI ſinuſque verſus HL vel arcus ST. Datâ vi centripetâ in S vel H, datur velocitas corporis de loco S vel H in R vel G pervenientis (467); hinc verò datur velocitas corporis in loco quovis dato T vel L; cum (ex demonſtr.) velocitas in R vel G, ſit ad velocitatem in T vel L, ut GK ad LI, ſeu ut SR ad $\sqrt{SR^2-TR^2}$. Dato tempore quo deſcribitur ST vel HL, datur arcus HI, & illius ſinus rectus LI, adeóque & velocitas in L & contrà.

Si

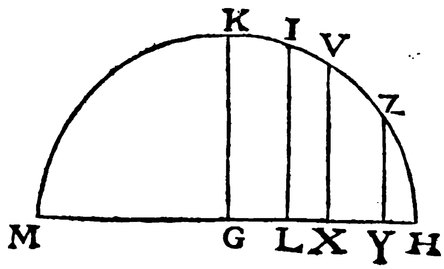
bus arcus totis oſcillationum arcubus proportionales; habentur, ex datis temporibus, & velocitates & arcus deſcripti in oſcilla-



tionibus univerſis. Quæ erant primò invenienda.

Oſcillentur jam funipendula corpora in cycloidibus diverſis intra

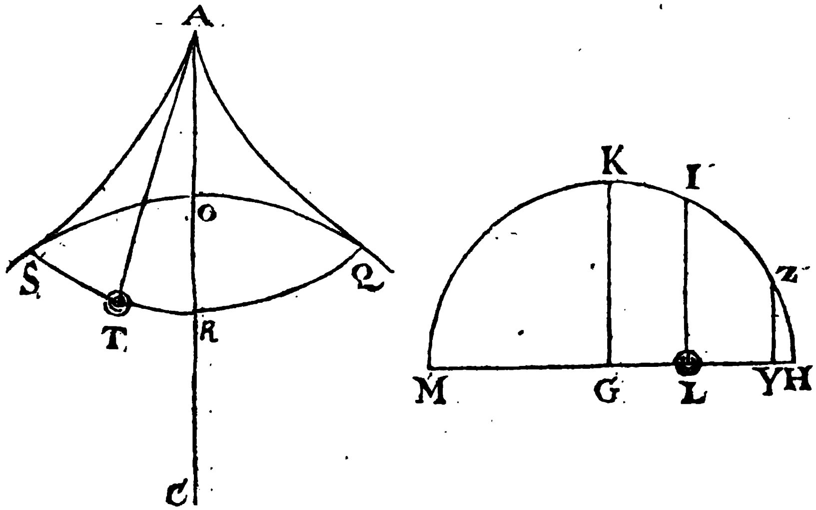
Si corpus non ex ſummo loco S, vel H, ſed ex alio quovis t, (vid. fig. prop. 51.) vel Y, demittatur, erit tempus quo ex loco t pervenit ad R, vel ex Y ad G, æquale tempori dato dimidiæ oſcillationis. Hinc dato arcu T t, vel rectâ æquali YL, dabitur & tempus quo deſcribitur & velocitas in T vel L, ac contrà. Nam cum ſint arcus ſeu ſpatia quævis æqualibus temporibus deſcripta in oſcillationibus inæqualibus, ut arcus vel ſpatia integris oſcillationibus percurſa (464), dato arcu T t, vel ſpatio YL, dabitur ſpatium HX, quod corpus de loco H demiſſum deſcribit eodem tempore quo aliud corpus percurrit T t vel YL; dato ſpatio H X, datur arcus H V & illius ſinus rectus X V, & hinc datur tempus quo deſcribitur H X & Y L, & velocitas in X; cumque ſit velocitas in



X, in corpore de loco H, cadente ad velocitatem in L, in corpore de loco Y cadente ut H G, ad Y G (464) dabitur velocitas in L, vel T; Et contrà.

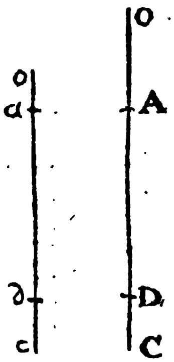
DE MOTU CORPORUM.

intra globos diverſos, quorum (t) diverſæ ſunt etiam vires abſolutæ, deſcriptis: &, ſi vis abſoluta globi cujuſvis *QOS* dicatur V, vis acceleratrix quâ pendulum urgetur in circumferentiâ hujus globi, ubi incipit directè versùs centrum ejus moveri, erit ut diſtantia corporis penduli à centro illo & vis ab-



ſoluta globi conjunctim, hoc eſt, ut $CO \times V$. Itaque (u) lineola *HY*, quæ ſit ut hæc vis acceleratrix $CO \times V$, deſcribetur dato tempore; &, ſi (x) erigatur normalis *YZ* circumferen-

(t) 469. *Quorum diverſæ ſunt &c.* Ex centris C, c, per omne circumquaque ſpatium diffundi intelligantur vires centripetæ in ratione diſtantiarum à ſuis reſpectivè centris creſcentes, vires acceleratrices in locis datis æquè altis A, a, dicantur A, a; in aliis locis æquè altis D, d, dicantur V, u, & erit (ex hyp.) $V : A = CD : CA = cd : ca = v : a$, adeóque $V : v = A : a$, ſed evaneſcentibus diſtantiis, CD, cd, ſunt V, v, vires abſolutæ (per definitionem VI. Newt.) quarè vires abſolutæ ſunt in ratione virium acceleratricium in locis æquè altis. Jam verò vires acceleratrices in locis quibuſlibet O, o, dicantur B, b, erit (ex Dem.)



$$V : v = A : a$$

$$\text{Et per hyp. } CO : CA = B : A$$

$$CA \text{ vel } ca : Co = a : b$$

Ergò ex æquo $V \times CO : v \times Co = B : b$, id eſt, vis acceleratrix in loco quovis O, eſt ut diſtantia à centro & vis abſoluta conjunctim.

(u) * *Itaque lineola naſcens HY, quæ ſit ut hæc vis acceleratrix CO×V, deſcribetur dato tempore.* Nam quadratum temporis quo deſcribitur naſcens HY, eſt ut $\frac{HY}{CO \times V}$ (per cor. V. lem. X.). Undè cum data ſit ratio HY ad $CO \times V$ (ex hyp.), quadratum temporis adeóque & tempus ipſum quo deſcribitur HY datum erit.

(x) * *Et ſi erigatur normalis &c.* Arcus HZ erit ad ſemiperipheriam HKM, ut tempus datum quo deſcribitur HY, ad tempus unius oſcillationis (prop. 38.) quod proindè erit ut ſemiperipheria HKM, ſeu ut radius GH directè, & arcus HZ inversè. Eſt autem arcus naſcens HZ æqualis chordæ HZ (per Lem. 7.) adeóque (ex naturâ circuli) $HZ^2 = HY \times MH = 2GH \times HY$; Quare cum ſit HY ut

tiæ occurrens in Z, arcus naſcens HZ denotabit datum illud tempus. Eſt autem arcus hic naſcens HZ in ſubduplicatâ ratione rectanguli GHY, ideoque ut $\sqrt{GH \times CO \times V}$. Unde tempus oſcillationis integræ in cycloide QRS (cum ſit ut ſemiperipheria HKM, quæ oſcillationem illam integram denotat, directè; utque arcus HZ, qui datum tempus ſimiliter denotat, inversè) fiet ut GH directè & $\sqrt{GH \times CO \times V}$ inversè, hoc eſt, ob æquales GH & SR, ut $\sqrt{\frac{SR}{CO \times V}}$, ſive (per corol. prop. L.) ut $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. Itaque oſcillationes in globis & cycloidibus omnibus, quibuſcunque cum viribus abſolutis factæ, ſunt in ratione quæ componitur ex ſubduplicatâ ratione longitudinis fili directè, & ſubduplicatâ ratione diſtantiæ inter punctum ſuſpenſionis & centrum globi inversè, & ſubduplicatâ ratione vis abſolutæ globi etiam inversè. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc etiam oſcillantium, cadentium & revolventium corporum tempora poſſunt inter ſe conferri. Nam ſi rotæ, quâ cyclois intra globum deſcribitur, diameter conſtituatur æqualis ſemidiametro globi, cycloìs (y) evadet linea recta per centrum globi tranſiens, & oſcillatio jam erit deſcenſus & ſubſequens aſcenſus in hâc rectâ. Unde datur tum tempus deſcenſus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale quo corpus uniformiter circa centrum globi ad diſtantiam quamvis revolvendo arcum quadrantalem deſcribit. Eſt (z) enim hoc tempus (per caſum ſecundum) ad tempus ſemioſcillationis in cycloide quâvis QRS ut 1 ad $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

Co-

$CO \times V$, erit HZ^2 ut $2GH \times CO \times V$, ſeu, ut $GH \times CO \times V$, & hinc tempus unius oſcillationis ut $\frac{GH}{\sqrt{GH \times CO \times V}} = \sqrt{\frac{GH}{CO \times V}} = \sqrt{\frac{SR}{CO \times V}} = \sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$ ob $GH = SR$, & $\frac{AR}{AC} = \frac{SR}{CO}$, (per cor. prop. 50.)

(y) * *Cyclois evadet linea recta* (461).

(z) * *Eſt enim hoc tempus &c.* Quoniam cycloide QRS in rectam mutatâ fit AR = AC, erit (per caſ. 2.) tum tempus deſcenſus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale (prop. 38.) per circuli quadrantem ut $\sqrt{\frac{1}{V}}$. Undè erit hoc

DE MOTU CORPORUM.

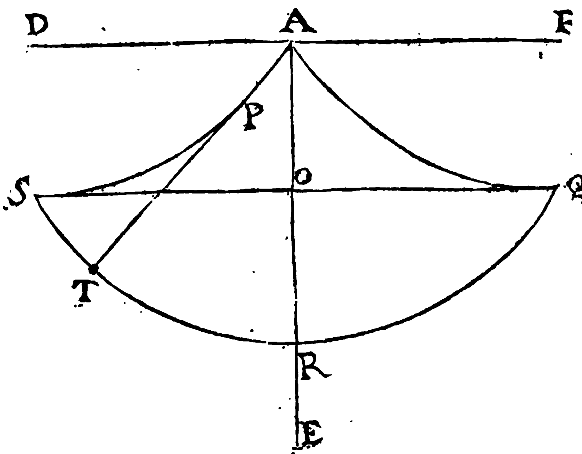
Corol. 2. Hinc etiam conſectantur quæ *Wrennus* & *Hugenius* de cycloide vulgari adinvenerunt. Nam (a) ſi globi diameter augeatur in infinitum: mutabitur ejus ſuperficies ſphærica in planum, viſque (b) centripeta aget uniformiter ſecundum lineas huic plano perpendiculares, & cyclois noſtra abibit in cycloidem vulgi. Iſto (c) autem in caſu longitudo arcus cycloidis, inter planum illud & punctum deſcribens, æqualis evadet quadruplicato ſinui verſo dimidii arcus rotæ inter idem inter planum & punctum deſcribens; ut invenit *Wrennus*: Et (d) pendulum inter duas ejuſmodi cycloides in ſimili & æquali cycloide temporibus

hoc tempus ad tempus ſemioſcillationis in cycloide quâvis Q R S in rectam non mutatâ ut $\surd\frac{1}{V}$ ad $\surd\frac{AR}{AC\times V}$, hoc eſt, ob datam V, ut 1 ad $\surd\frac{AR}{AC}$. Quare dato tempore unius oſcillationis in cycloide quâvis Q R S circa centrum C, dabitur tempus deſcenſus de loco quovis ad idem centrum, & tempus huic æquale per quadrantem circuli ad quamvis diſtantiam deſcripti.

(a) * *Nam ſi globi diameter augeatur* (462).

(b) * *Viſque centripeta* diſtantiæ infinitæ (quæ proinde non mutatur) proportionalis non mutabitur, & quoniam centro in infinitum abeunte, radii qui antè erant ad ſuperficiem ſphæricam perpendiculares fiunt paralleli; vis centripeta aget uniformiter ſecundùm lineas huic ſuperficiei in planum mutatæ perpendiculares.

(c) * *Iſto autem in caſu* (462).



(d) * *Et pendulum inter duas &c.* Erit enim in hoc caſu diameter rotæ O R quâ deſcribitur cyclois Q R S, æqualis diametro AO rotæ quâ deſcribitur cyclois A P S (462.), quare ſemicycloides S R, A S ſimiles erunt & æquales.

ribus æqualibus oſcillabitur, ut demonſtravit *Hugenius*. Sed (e) & deſcenſus gravium, tempore oſcillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit.

LIBER PRIMUS. PROP. LII. PROBL. XXXIV.

Aptantur autem propoſitiones à nobis demonſtratæ ad veram conſtitutionem terræ, quâtenus rotæ eundo in ejus circulis maximis deſcribunt motu clavorum, perimetris ſuis infixorum, cycloides extra globum; & pendula inferius in fodinis & cavernis terræ ſuſpenſa, in cycloidibus intra globos oſcillari debent, ut oſcillationes omnes evadant iſochronæ. Nam gravitas (ut in libro tertio docebitur) decreſcit in progreſſu à ſuperficie terræ, ſurſum quidem in duplicatâ ratione diſtantiarum à centro ejus, deorſum vero in ratione ſimplici.

PRO-

470. (e) * *Sed & deſcenſus &c.* Erit in hoc caſu tempus unius oſcillationis ad tempus deſcensûs perpendicularis per diametrum rotæ A O vel O R, ſeu per dimidiam penduli longitudinem ut peripheria circuli ad ejus diametrum. Nam iiſdem poſitis quæ (in prop. 52. & ejus cor. 2°.) erit tempus unius oſcillationis æquale tempori ſemirevolutionis in circulo HKM (prop. 38.). Eſt autem (200.) tempus ſemirevolutionis in circulo HKM, ad tempus deſcenſus uniformiter accelerati per dimidium radium H G, ut peripheria circuli ad diametrum. Quarè cum ſit $\frac{1}{2}$ HG $=\frac{1}{2}$ SR $=\frac{1}{2}$ AR $=$ OR (462.) erit tempus unius oſcillationis ad tempus deſcenſus perpendicularis per dimidiam penduli longitudinem ut circuli peripheria ad diametrum.

471. Corol. Dimidia penduli longitudo A O, eſt ad ſpatium A E deſcenſu perpendiculari deſcriptum unius oſcillationis tempore in duplicatâ ratione diametri ad peripheriam circuli. Sit enim tempus unius oſcillationis t, diameter circuli ad peripheriam, ut d, ad p, & erit (469) tempus deſcenſus perpendicularis per ſpatium $AO = \frac{dt}{p}$; ſed (27) $\frac{ddtt}{pp} : tt = AO : AE$, ergò $AO : AE = dd : pp$. Hugenius cui pendulorum theoria debetur prop. 25. part. 4. horologii oſcillatorii, longitudinem penduli ſingulas oſcillationes uno minuto ſecundo abſolventis invenit pedum Pariſ. 3. & linearum 8 $\frac{1}{2}$, hoc eſt, linearum $\frac{881}{2}$, & hinc dimidia penduli longitudo erat linearum $\frac{881}{4} = 220.25$. Eſt autem diameter circuli ad peripheriam ut 113, ad 355, quam proximè, & proindè quadratum diametri ad quadratum peripheriæ ut 12769. ad 126025; quarè ſpatium uno minuto ſecundo deſcriptum à corpore gravi perpendiculariter cadente, eſt pedum Pariſ. 15 $\frac{1}{12}$, quam proximè.

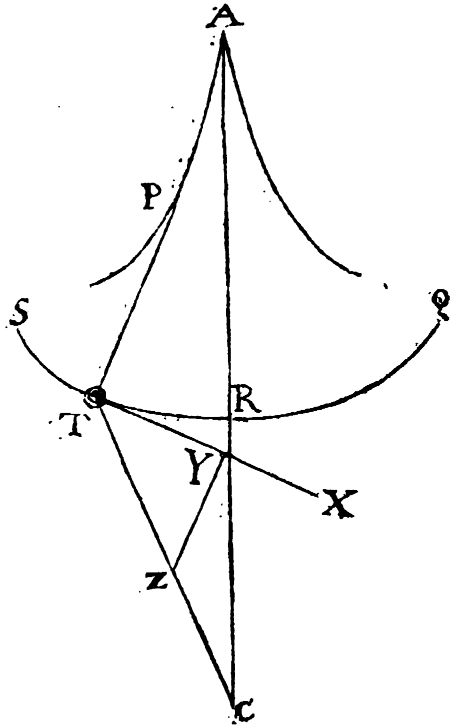
472. Coroll. Quoniam propè telluris ſuperficiem gravium directio horizonti ad ſenſum perpendicularis eſt gravitaſque conſtans, atque adeò V gravitas abſoluta, & A C diſtantia à centro telluris datæ ſunt, in pendulis in cycloidem vulgarem aut etiam in exiguos arcus circuli (465) excurrentibus, tempus unius oſcillationis (per caſ. 2. prop. 52.) erit ut $\sqrt{AR}$, id eſt, in ratione ſubduplicatâ longitudinis penduli & proindè longitudo penduli in ratione duplicatâ temporis unius oſcillationis.

473.

DE MOTU CORPORUM.

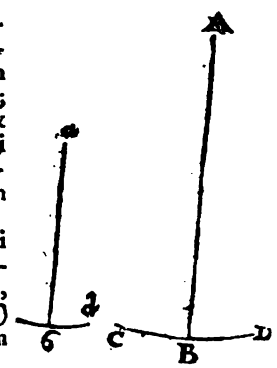
PROPOSITIO LIII. PROBLEMA XXXV.

Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire vires quibus corpora in datis curvis lineis oſcillationes ſemper iſochronas peragent.



Oſcilletur corpus *T* in curvâ quâvis lineâ *STRQ*, cujus axis ſit *AR* tranſiens per virium centrum *C*. Agatur *TX* quæ curvam illam in corporis loco T quovis contingat, inque hâc tangente *TX* capiatur *TY* æqualis arcui *TR*. Nam (f) longitudo arcus illius ex figurarum quadraturis, per methodos vulgares, innoteſcit. De puncto *Y* educatur recta *YZ* tangenti perpendicularis. Agatur *CT* perpendiculari illi occurrens in *Z*, & erit vis centripeta proportionalis rectæ *TZ*. *Q. E. I.*

Nam ſi vis, quâ corpus trahitur de *T* verſus *C*, exponatur



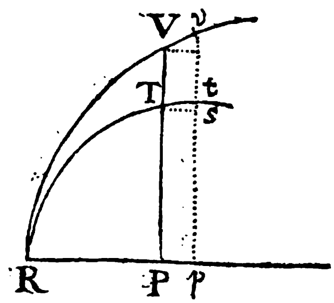
473. Corol. Numeri oſcillationum iſochronarum à duobus pendulis AB, ab, eodem tempore confectarum ſunt reciprocè ut tempora quibus ſingulæ oſcillationes fiunt. Nam ſi pendulum ab, bis oſcilletur eo tempore quo AB ſemel; ab, quatuor oſcillationes abſolvet, dum AB duas conficit, & ità porrò in aliis ſuppoſitionibus, ut patet. Quarè numeri oſcillationum iſochronarum eodem tempore à duobus pendulis confectarum ſunt in ratione ſubduplicatâ longitudinum pendulorum inversè (472).

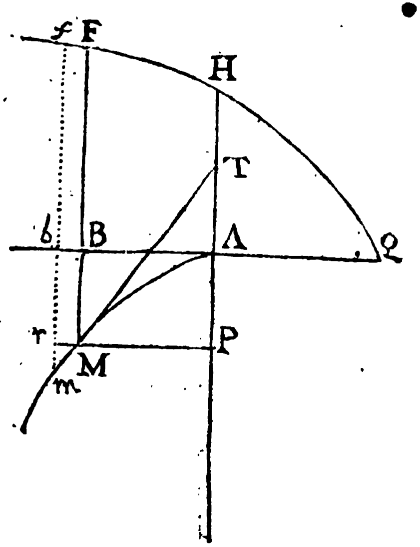
474. Coroll. Hinc ſi tempus unius oſcillationis penduli AB, ſit T, tempus unius oſcillationis penduli ab, ſit t, numeri oſcillationum eodem tempore confectarum N, n, erit T : t = n : N (473), & TT : tt = AB : ab (472) ac propterea nn : NN = AB : ab. Datis igitur tribus harum proportionum terminis quartus datus eſt.

(f) 476. *Nam longitudo arcus &c.* Curvæ RTt ſit axis RP, vertex R, ad axem ordinatim applicatæ TP, tp, infinitè propinquæ Ts axi parallela & ordinatæ tp occur-

per rectam TZ captam ipſi proportionalem, reſolvetur hæc in vires TY, YZ; quarum YZ trahendo corpus ſecundum longitudinem fili PT, motum ejus nil mutat, vis autem altera TY motum ejus in curvâ $STRQ$ directè accelerat vel directè retardat. (g) Proinde cum hæc ſit ut via deſcribenda TR, accelerationes corporis vel retardationes in oſcillationum duarum (ma-

LIBER PRIMUS. PROP. LIII. PROBL. XXXV.



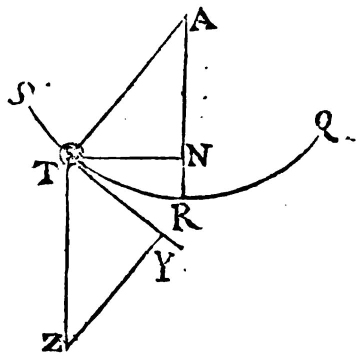


occurrens in s. Sit $RP = x$, $PT = y$, & erit $Pp = Ts = dx$, $ts = dy$, $Tt^2 = dx^2 + dy^2$, $Tt = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; quarè RT, fluens ipſius Tt, æqualis erit fluenti quantitatis $\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Ex æquatione ad curvam RT, quæratur valor ipſius dy per dx & alias quantitates, ſitque $dy = Qdx$, Q vero quantitas quælibet conſtans aut variabilis, erit $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + QQ}$. In perpendiculo PT, capiatur $PV = A \times \sqrt{1 + QQ}$, ſitque A quantitas data, & curva RV locus punctorum V, erit areæ RVP elementum $Pp \times PV = Adx\sqrt{1 + QQ}$, undè $Tt = dx\sqrt{1+QQ} = \frac{Pp \times PV}{A}$, & capiendo utrinque fluentes $RT =$ areæ $\frac{RVP}{A}$, curvæ igitur RT rectificatio ad quadraturam figuræ RVP reducta eſt.

476. Idem alia methodo fieri poteſt. Sit curvæ hujus rectificandæ AMm, axis AP, & vertex A. Per punctum quodvis M agatur tangens MT axi occurrens in T, & MF axi parallela rectam AB axi normalem ſecans in B; capiatur ſemper AB ad MT ſicut conſtans quævis A ad BF, & punctum F curvam FHQ perpetuò tangat, erit ſpatium curvilineum $BFHA$ æquale rectangulo ſub arcu AM & conſtanti A comprehenſo, adeóque arcus $AM = \frac{BFHA}{A}$. Nam ductâ mf priori MF parallelâ & infinitè propinquâ, demiſſoque ad axem AP perpendiculo MP, quod rectam mf, ſecat in r; erit ob triangula MPT, Mrm ſimilia $Mr : Mm = MP$, vel $BA : MT = A : BF$ (per conſtr.) Ergò $BF \times Mr$, id eſt, elementum $BbfF = Mm \times A$, ac proindè ſpatium fluens $AHFB$ æquale fluenti $AM \times A$.

(g) * *Proindè &c.* Quæ ſequuntur manifeſta ſunt (ex dem. prop. 51.)

(majoris & minoris) partibus proportionalibus deſcribendis, erunt ſemper ut partes illæ, & propterea facient ut partes illæ ſimul deſcribantur. Corpora autem quæ partes totis ſemper proportionales ſimul deſcribunt, ſimul deſcribent totas. *Q. E. D.* (h).



Corol. 1. Hinc ſi corpus T, filo rectilineo AT à centro A pendens, deſcribat arcum circularem $STRQ$, & interea (i) urgeatur ſecundum lineas parallelas deorſum à vi aliquâ, quæ ſit ad vim uniformem gravitatis, ut arcus TR ad ejus ſinum TN: æqualia erunt oſcillationum ſingularum tempora. Etenim ob parallelas TZ, AR, ſimilia erunt triangula ATN, ZTY; & propterea TZ erit ad AT ut TY ad TN; hoc eſt, ſi gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam AT; vis TZ, quâ oſcillationes evadent iſochronæ, erit ad vim gravitatis AT, ut arcus TR ipſi TY æqualis ad arcûs illius ſinum TN.

Corol. 2. Et propterea in horologiis, ſi vires à machinâ in pendulum ad motum conſervandum impreſſæ ita cum vi gravitatis componi poſſint, ut vis tota deorſum ſemper ſit ut linea quæ oritur applicando rectangulum ſub arcu TR & radio AR

(h) 477. *Q. E. D.* Datâ vi centripetâ TZ quâ corpus in datâ curvâ SRQ oſcillationes ſemper iſochronas peragit, velocitates illius corporis in locis ſingulis & tempora quibus tum oſcillationes totæ, tum ſingulæ oſcillationum partes peraguntur eodem modo definiuntur ac in caſ. 1°. prop. 52. Ductâ enim ex centro virium C rectâ quæ curvam tangat in puncto aliquo S, erit in hoc puncto TZ=TY, hoc eſt, vis centripeta in curvâ STR æqualis vi centripetæ ad C perpendiculariter tendenti in S; quarè manente conſtructione caſ. 1. prop. 52. & ſupponendo vim centripetam in H, (vid. fig. ibid.) quâ deſcribitur circulus HKM, æqualem vi centripetæ in S, tempus unius oſcillationis & ſingulæ oſcillationum partes, & velocitates in locis ſingulis invenientur prorſus (ut in not. 468.) iiſdemque ratiociniis res omnis demonſtrabitur.

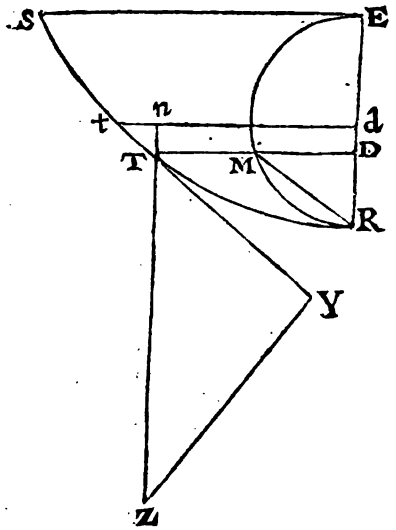
(i) * *Intereà urgeatur ſecundum lineas parallelas &c.* Centro C figuræ ſuperioris in infinitum abeunte.

AR ad ſinum *TN*, oſcillationes (k) omnes erunt iſochronæ.

LIBER PRIMUS. PROP. LIII. PROBL. XXXV.

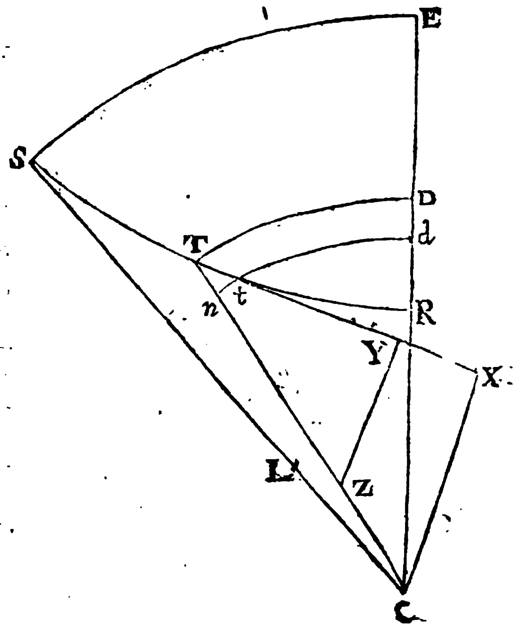
(k) * *Oſcillationes omnes erunt iſochronæ.* Cum enim vis tota TZ quâ oſcillationes redduntur iſochronæ ſit (per cor. 1.) ad vim gravitatis AT ſeu AR, ut TR ad TN, erit $TZ = \frac{AR \times TR}{TN}$, adeóque vis tota TZ, ut $\frac{AR \times TR}{TN}$.

478. Ex demonſtratis ſolvi poteſt hoc problema: Datâ lege vis centripetæ, invenire curvam tautochronam STR, in quâ nimirum, corpus oſcillationes ſemper iſochronas peragat.



Caſus 1us. Vis gravitatis directio TZ ſemper ſit parallela axi ER curvæ STR, ſint SE, td, TD ad axem RE ordinatim applicatæ, punctum E datum, puncta D, d infinitè propinqua, tangens TY æqualis arcui TR, YZ ad TY perpendicularis ſecet TZ in Z, & ZT producta ſecet td in n. Dicantur $RE = a$, vis gravitatis in E vel $S = g$, in D vel $T = v$, pars lineæ verticalis per S ductæ determinata ad modum verticalis TZ, ſit $= b$, $RD = x$, $DT = y$, $TR = TY = s$. Ob triangula Tnt, TYZ ſimilia, Tn (dx) : Tt (ds) $=$ TY (s) : $TZ = \frac{sds}{dx}$; ob angulum Tnt rectum $ds^2 = dx^2 + dy^2$; & (per prop. 53.) $g : v = b : TZ \left(\frac{sds}{dx}\right)$, ideoque $sds = \frac{b}{g} v dx$, & ſumptis fluentibus $\frac{1}{2} ss = \frac{b}{g}$ S. vdx; fluens autem S. vdx ita ſumi debet, ut evaneſcente x, ea fluens evaneſcat. Erit igitur $ss = \frac{2b}{g}$ S. vdx, $s = \sqrt{\frac{2b}{g} \text{S.}\, vdx}$, & ſumptis fluxionibus $ds = \frac{bvdx}{\sqrt{2bg\, \text{S.}\, vdx}}$, proindeque $ds^2 = \frac{bbvvdx^2}{2bg\, \text{S.}\, vdx} = dx^2 + dy^2$, & hinc $dx \sqrt{\frac{bvv - 2g\, \text{S.}\, vdx}{2g\, \text{S.}\, vdx}} = dy$ æquatio ad curvam tautochronam STR, in quâ datâ lege vis gravitatis exterminabitur v.

Exemplum. Sit gravitas conſtans, ſeu $v = g$, & erit $vdx = gdx$, S. $vdx = gx$, quæ evaneſcit, ubi $x = 0$. Quare æquatio ad curvam SR fiet $dx \sqrt{\frac{b - 2x}{2x}} = dy$. Quoniam vero $ss = \frac{2b}{g}$ S. $vdx = 2bx$, ſi ponatur $b = SR$, ut verticalis per S ducta curvam tangat in S, & loco s ſcribatur b, ac loco x ſcribatur a, erit $bb = 2ba$, & proinde $b = 2a$, atque $ss = 4ax$, hoc eſt, $SR = 2RE$, & $TR^2 = 4RE \times RD$; porrò ſi diametro RE deſcribatur circulus EMR ſecans DT in M, erit $MR^2 = RE \times RD$, $4MR^2 = 4RE \times RD$, ideoque $TR^2 = 4MR^2$, & $TR = 2MR$, quæ eſt proprietas cycloidis vulgaris circulo genitore EMR deſcriptæ.



Caſus 2. Tendat vis centripeta ad punctum datum C. Centro C, radiis CE, CD, Cd deſcripti ſint arcus circulares ES, DT, dtn, curvæ SR occurrentes in S, T, t, & rectæ CT in n, ſintque E punctum in axe CE datum; D, d puncta infinitè propinqua, tangentis TX per T ductæ pars TY æqualis arcui TR, & ZY, CX ad tangentem perpendiculares. Dicantur $CE=a$, $CR=c$, SL pars radii CS eodem modo determinata ac TZ pars radii CT ſit $=b$, vis centripeta in E vel $S=g$, in D vel $T=v$, CD vel $CT=x$, TR vel $TY=s$, $CX=p$. Ob ſimilitudinem triangulorum Tnt, TYZ, TXC, eſt $Tn\ (dx) : Tt\ (ds) = TY\ (s) : TZ = \frac{sds}{dx}$ & $TC(x) : CX(p) = Tt\ (ds) : tn = \frac{pds}{x}$, ideoque ob angulum Tnt rectum $ds^2 = dx^2 + \frac{ppds^2}{xx}$, & proinde $ds^2 = \frac{xxdx^2}{xx-pp}$.

Verum per prop. 53. $g:v=b:TZ$ $\left(\frac{sds}{dx}\right)$, unde $sds = \frac{b}{g}vdx$, & ſumptis fluentibus $\frac{1}{2}ss = \frac{b}{g}S.\ vdx$. Quoniam autem evaneſcente s, fit $x=c$, fluens $S.\ vdx$ ita accipi debet, ut, poſitâ $x=c$, evaneſcat. Erit igitur $ss = \frac{2b}{g}S.\ vdx$, $s=\sqrt{\frac{2b}{g}S.\ vdx}$, & ſumptis fluxionibus $ds = \frac{bvdx}{\sqrt{2bg S.\ vdx}}$, unde $ds^2 = \frac{bvvdx^2}{2gS.\ vdx} = \frac{xxdx^2}{xx-pp}$, atque adeo $\frac{bvv}{2gS.\ vdx} = \frac{x^2}{xx-pp}$ æquatio ad tautochronam STR, in quâ datâ lege vis centripetæ delebitur v.

Exemplum. Vis centripeta ſit ut diſtantia à centro C, hoc eſt, $g:v=a:x$, adeoque $v=\frac{gx}{a}$, $vdx = \frac{gxdx}{a}$, $S.\ vdx = \frac{gxx}{2a} + Q$ (conſtantem) & quoniam poſitâ $x=c$, evaneſcit $S.\ vdx$, erit $Q = \frac{-gcc}{2a}$, atque ita $S.\ vdx = \frac{gxx-gcc}{2a}$. Quare erit $ss = \frac{2b}{g}S.\ vdx = \frac{bxx-bcc}{a}$, & æquatio ad tautochronam evadet $\frac{bxx}{axx-acc} = \frac{xx}{xx-pp}$, ſeu $pp = \frac{bxx-axx+acc}{b}$.

Jam ſi in hac æquatione ponatur $b=a$, erit $p=c$, & $ss=xx=cc$, ideoque tautochrona SR linea recta ad CR perpendicularis in R.

Si ponatur b major quam a, & $c=o$, erit $p=x\sqrt{\frac{b-a}{b}}$, adeoque p ad x in ratione datâ, cumque ſit p ſeu CX ſinus anguli CTX, exiſtente radio x ſeu CT, erit angulus CTX conſtans, & proinde tautochrona SR ſpiralis logarithmica.

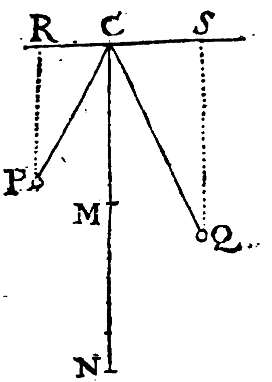
Si fuerit b minor quam a, & recta CS curvam SR tangat in S, erit $b=SR$; cumque ſit $ss = \frac{bxx-bcc}{a}$, ſi ponatur $s=SR=b$, & proinde $x=a$ fiet $bb=$

baa

LIBER PRIMUS. PROP. LIII. PROBL. XXXV.

$\frac{baa - bcc}{a}$, & $b = \frac{aa - cc}{a}$. Jam ſi in æquatione ad curvam SR loco b ſcribatur $\frac{aa - cc}{a}$, erit $pp = \frac{aacc - cc \cdot xx}{aa - cc}$ æquatio ad cycloïdem, quæ deſcribitur rotatione circuli cujus diameter eſt RE ſeu $a - c$ ſuper concavam peripheriam circuli centro C radio CE ſeu a deſcripti, ut liquet per n. 466.

Schol. In ſuperioribus de pendulorum motu propoſitionibus corporis penduli gravitatem in centro ceu puncto coactam & filum gravitatis expers ſuppoſuimus, quæ pendulum ſimplex conſtituunt. Quamobrem ne demonſtratæ oſcillationum leges in experimentis valde perturbentur, filum uſurpandum eſt tenue cum globo exiguo & ex materiâ graviſſimâ conflato. Si verò filum aut virga è quâ globus pendet gravis fuerit & globus major, pendulum non amplius ſimplex eſt, ſed compoſitum, quod pluribus ponderibus inter ſe connexis inſtructum eſt.



Pendulum compoſitum CPQ, onuſtum quotcumque ponduſculis P, Q, &c. quorum commune gravitatis centrum M circà punctum ſuſpenſionis C oſcilletur. Recta CM per punctum ſuſpenſionis C & commune gravitatis centrum M ducta vocatur axis penduli compoſiti PCQ, recta verò RCS in puncto ſuſpenſionis C ad axem penduli CM perpendicularis dicitur axis oſcillationis. Si in axe penduli compoſiti CM, capiatur CN æqualis longitudini penduli ſimplicis ſuas oſcillationes in circulo eodem tempore quo pendulum compoſitum CPQ ſemper abſolventis, pendulum illud ſimplex compoſito CPQ ſynchronum vel etiam iſochronum dicitur, & punctum N centrum oſcillationis penduli compoſiti CPQ appellatur. Porrò ſi ſingulorum ponduſculorum P, Q &c. gravitas in punctis P, Q &c. collecta intelligatur, & lineæ PC, QC &c. gravitatis expertes ſupponantur, ſitque M ſumma ponduſculorum omnium P, Q, &c. atque ex punctis P, Q &c. ad axem oſcillationis RCS demittantur perpendicula PR, QS &c. erit $CN = \frac{P \times PR^2 + Q \times QS^2}{M \times MC}$ + &c. id eſt, ſi pondera ſingula penduli compoſiti ducantur in quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe oſcillationis, & ſumma productorum dividatur per id quod fit ducendo ponderum ſummam in diſtantiam centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oſcillationis, orietur longitudo penduli ſimplicis compoſito iſochroni, ſive diſtantia inter axem & centrum oſcillationis ipſius penduli compoſiti. Hoc pulcherrimum theorema quo linearum ac figurarum omnium oſcillantium centrum oſcillationis determinatur, primus in horologio oſcillatorio invenit ac demonſtravit Hugenius. Idem theorema ſuo quiſque modo poſtea demonſtrarunt fratres celeberrimi Jacobus & Joannes Bernoulli, ille in actis Lipſienſibus an. 1691. & commentariis Pariſ. an. 1703. Hinc verò in actis Lipſienſibus & commentariis Paris. an. 1714., quorum demonſtrationes expoſuit clariſſ. Wolfius in elementis Mechanices. Hermannus quoque lib. 1°. Phoron. cap. 5°. & initio tomi 3i. Acad. Petropol. duas ejuſdem theorematis demonſtrationes edidit.

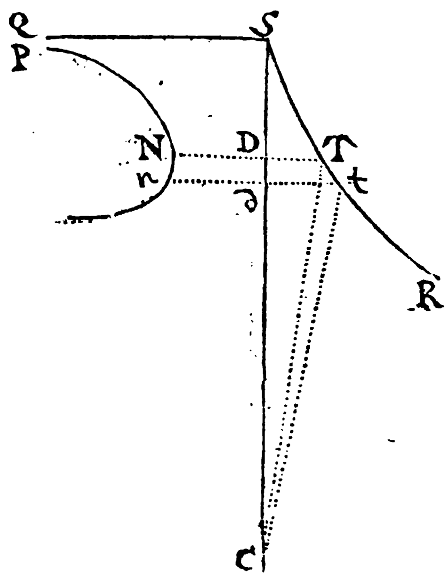
Hugenius horologii oſcillatorii parte 4ª. prop. 22. diſtantiam centri oſcillationis à puncto ſuſpenſionis in ſphærâ filo tenui ſuſpenſâ æqualem eſſe invenit longitudini fili cum radio ſphæræ atque duabus quintis partibus tertiæ proportionalis ad lineam compoſitam ex radio ſphæræ ac longitudine fili & radium ipſum, hoc eſt, ſi filum dicatur L, radius ſphæræ R, diſtantia centri oſcillationis à puncto ſuſpenſionis D, erit $D = L + R + \frac{2RR}{5(L+R)}$. Sed hæc omnia indicare, non verò demonſtrare nobis licet, cum his Propoſitionibus non utatur autor noſter.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO LIV. PROBLEMA XXXVI.

Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire tempora, quibus corpora vi quâlibet centripetâ in lineis quibuſcunque curvis, in plano per centrum virium tranſeunte deſcriptis, deſcendent & aſcendent.

Deſcendat corpus de loco quovis *S*, per lineam quamvis curvam *STtR* in plano per virium centrum *C* tranſeunte datam. Jungatur *CS* & dividatur eadem in partes innumeras æquales, ſitque *Dd* partium illarum aliqua. Centro *C* intervallis *CD*, *Cd* deſcribantur circuli *DT*, *dt*, lineæ curvæ *STtR* occurrentes in *T* & *t*. Et ex datâ tum lege vis centripetæ, tum altitudine *CS* de quâ corpus cecidit; dabitur velocitas corporis in aliâ quâvis altitudine *CT* (per prop. XXXIX.) (1) Tempus autem, quo corpus deſcribit lineolam *Tt*, eſt ut lineolæ hujus longitudo, id eſt, ut ſecans anguli *tTC* directè; & velocitas inversè. Tempori huic proportionalis ſit ordinatim applicata *DN* ad rectam *CS* per punctum *D* perpendicularis, & ob datam *Dd* erit rectangulum

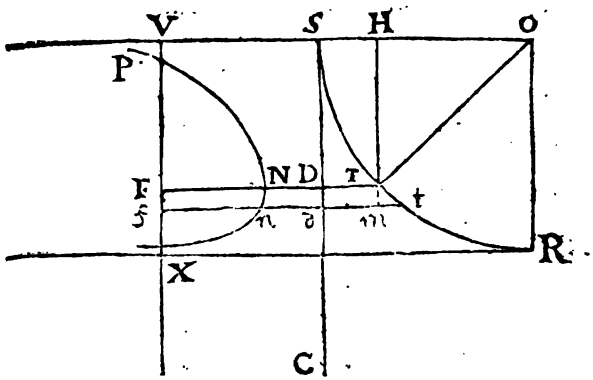


Dd

(1) * *Tempus autem quo corpus &c.* Nam, Tt, eſt ſpatium naſcens velocitate uniformi deſcriptum, eſt autem tempus quo ſpatium aliquod æquabiliter deſcribitur ut ſpatium illud directè & velocitas inversè (5). Porrò ſi centro T radio dato Dd, æquali differentiæ rectarum TC, tC circulus deſcribi intelligatur, erit Tt ſecans anguli tTC, quarè ob datum radium Dd erit ſemper Tt ut ſecans anguli tTC, atque adeò tempus quo deſcribitur Tt erit ut illa ſecans directè & velocitas inversè. Sed datâ tangente curvæ STR in puncto T datur anguli CTt ſecans; unde dabitur DN proportionalis tempori quo deſcribitur Tt.

$Dd \times DN$, hoc eſt area $DNnd$, eidem tempori proportionale. Ergo ſi PNn ſit curva illa linea quam punctum N perpetuo tangit, ejuſque aſymptotos ſit recta SQ rectæ CS perpendiculariter inſiſtens: erit area $SQPND$ proportionalis tempori quo corpus deſcendendo deſcripſit lineam ST; proindeque ex inventâ illâ areâ dabitur tempus. *Q. E. I.*

PRO-



479. Exemplum. Centrum virium C, in infinitum abeat, ut ſit vis centripeta conſtans, illiuſque directio rectæ SDC ſemper parallela, & arcus DT, dt, in rectas lineas ad SD normales mutentur. Sit curva STR circuli quadrans cujus centrum O & radius OS ad SD perpendicularis; producantur perpendicula TD, OS ad F & V, & DF conſtans gravitatem exhibeat in loco D, punctum F perpetuò tanget rectam VF lineæ SD parallelam, eritque (408) velocitas in D vel $T = \sqrt{2 SD \times FD}$. Ex puncto T ad SO demittatur perpendiculum TH rectam dt ſecans in m, ſitque $SO = a$, $SV = FD = b$, $SD = TH = x$ & ob triangula TOH, tTm, ſimilia, erit $HO (\sqrt{aa - xx}) : TO (a) = Tm (dx) : Tt = \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$, velocitas in $T = \sqrt{2 SD \times DF} = \sqrt{2bx}$. Quarè tempus per arcum naſcentem $Tt = \frac{Tt}{\sqrt{2bx}} (5) = \frac{adx}{\sqrt{2aabx - 2bx^3}}$ undè, $DN = \frac{a}{\sqrt{2baax - 2bx^3}}$. Si ND dicatur y, erit $yy = \frac{aa}{2baax - 2bx^3}$ æquatio ad curvam PNn, in quâ ſi ponatur $x = o$ vel $x = a$ erit y infinita, & proindè rectæ OV, RX ad SD perpendiculares ſunt hujus curvæ aſymptoti.

Similiter ſi corpus de loco R aſcendat in ſemicirculo RTS, ſitque ejus velocitas in R illa quâ poſſit ad altitudinem verticalem e aſcendere, dicanturque XV ſeu $RO = a$, $FX = x$, ideoque velocitas in $T = \sqrt{2be - 2bx}$, & $Tt = \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$; erit tempus per $Tt = \frac{adx}{\sqrt{2be - 2bx \times aa - xx}}$ & $DN = y = \frac{a}{\sqrt{2be - 2bx \times (aa - xx)}}$, ubi DN per unitatis quadratum, ut ſervetur homogeneitas, diviſa intelligitur.

Scho-

PROPOSITIO LV. THEOREMA XIX.

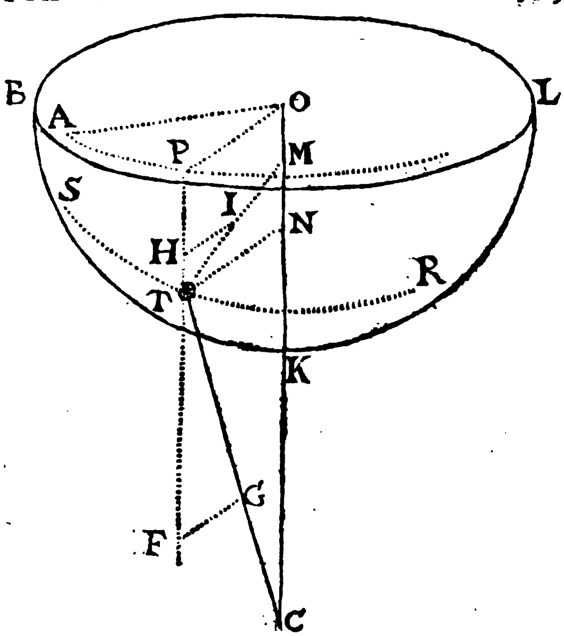
Si corpus movetur in ſuperficie quâcunque curvâ, cujus axis per centrum virium tranſit, & à corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela & æqualis ab axis puncto quovis dato ducatur: dico quod parallela illa aream tempori proportionalem deſcribet.

Sit *BKL* ſuperficies curva, *T* corpus in eâ revolvens, *STR* trajectoria, quam corpus in eâdem deſcribit, *S* initium trajectoriæ, *OMK* axis ſuperficiei curvæ, *TN* recta à corpore in axem perpendicularis, *OP* huic parallela & æqualis à puncto *O*, quod in axe datur, educta; *AP* (m) veſtigium trajectoriæ à puncto *P* in lineæ volubilis *OP* plano *AOP* deſcriptum; *A* veſtigii initium puncto *S* reſpondens; *TC* recta à corpore ad centrum ducta; *TG* pars ejus vi centripetæ quâ corpus urgetur in centrum *C*, pro-

Scholium. Si ex his tribus, vi centripetâ in ſingulis locis, curvâ in quâ corpus aſcendit vel deſcendit, & tempore quo ſinguli curvæ arcus percurruntur, duo data fuerint, tertium dabitur. Sit enim (in ſuperioribus figuris) D d $= dx$, T t $= ds$, t m $= dy$, velocitas in T $= c$, & erit $ds^2 = dx^2 + dy^2$, & (5) $c\,dt = ds$, ideoque $cc\,dt^2 = dx^2 + dy^2$. Quare ſi, datâ vi centripetâ, ſeu (per prop. 39.) æquatione inter c & x, detur etiam æquatio inter t & x vel y, dabitur æquatio inter x & y, hoc eſt, æquatio ad curvam STt, & vice verſâ. Exempli cauſâ, poſitâ vi centripetâ conſtante & ad diſtantiam infinitam tendente, corpus ita deſcendat in curva STt, ut tempus per arcum quemvis ST proportionale ſit altitudini correſpondenti Sd, dicanturque Sd $= x$, DT $= y$, tempus per ST $= t$, velocitas in T $= c$; & erit dt ut dx, & c ut $\sqrt{x}$, ideoque $c\,dt$ ut $dx\sqrt{x}$, & hinc ſi fuerit a quantitas conſtans, $c\,dt = dx\frac{\sqrt{x}}{a}$ & proinde $\frac{x\,dx^2}{a} = dx^2 + dy^2$, & hinc $(x-a)\,dx^2 = a\,dy^2$. Ponatur $x - a = v$, & erit $dx = dv$, & $v^{\frac{1}{2}}dv = a^{\frac{1}{2}}dy$, ſumptiſque fluentibus $\frac{2}{3}v^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{2}}y$, $\frac{4}{9}v^3 = ayy$, $v^3 = \frac{9}{4}ayy$, æquatio ad parabolam ſecundi generis, cujus eſt latus rectum $\frac{9a}{4}$, abſciſſa v, & ordinatim applicata y. Sed quoniam in illâ parabolâ, poſitâ $y = 0$, fit $v = 0$, adeoque $x - a = v = 0$, & $x = a$, patet corpus de altitudine a cadere debere antequam in parabola deſcendat, capiendamque eſſe SD $= v$, ut tempus per arcum ST ſit proportionale altitudini $v + a$, ſeu x.

(m) * *AP veſtigium &c.* Si corpus in ſuperficie quâcunque curvâ moveatur, ſuoque motu curvam deſcribat quæ in plano poſita non ſit, ad planum eſt referenda, idque fit ſi in ſuperficie curvâ aliquod fingatur planum ad quod ex ſingulis curvæ deſcriptæ punctis erigantur perpendiculares, quarum extremitates aliam in plano lineam deſcribent, hæc linea primæ veſtigium ſeu linea projectionis dicitur.

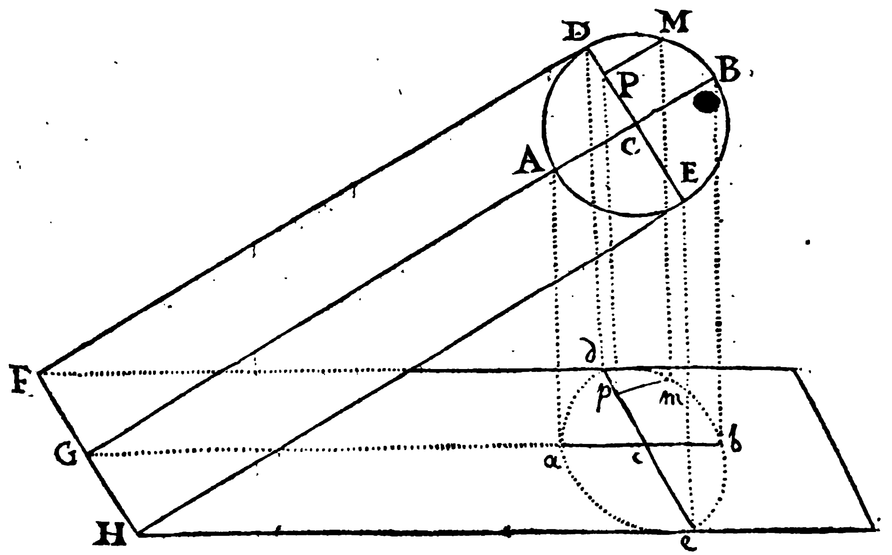
LIBER PRIMUS. PROP. LV. THEOR. XIX.



proportionalis; *TM* recta ad ſuperficiem curvam perpendicularis; *TI* pars ejus vi preſſionis, quâ corpus urget ſuperficiem viciſſimque urgetur verſus *M* à ſuperficie, proportionalis; *PTF* recta axi parallela per corpus tranſiens, & *G F*, *I H* rectæ à punctis *G* & *I* in parallelam illam *PHTF* perpendiculariter demiſſæ. Dico jam, quod area *AOP*, radio *O P* ab initio motus deſcripta, ſit tempori proportionalis. Nam vis *TG* (per legum corol. 2.) reſolvitur in vires *TF*, *FG*; & vis *TI* in vires *TH*, *HI*: Vires autem *T F*, *TH* agendo ſecundum lineam *PF* plano *A O P* perpendicularem mutant ſolummodo motum corporis quâtenus huic plano perpendicularem. Ideoque motus ejus quâtenus ſecundum poſitionem plani factus; hoc eſt, motus puncti *P*, quo trajectoriæ veſtigium *A P* in hoc plano deſcribitur, idem eſt ac ſi vires *T F*, *TH* tollerentur, & corpus ſolis viribus *F G*, *H I* agitaretur; hoc eſt, idem ac ſi corpus in plano *A O P*, vi (n) centripetâ ad centrum *O* tendente & ſummam virium *FG* & *HI* æquante, deſcriberet curvam *A P*. Sed vi tali deſcribitur area *A O P* (per prop. 1.) tempori proportionalis. *Q. E. D.*

Corol. Eodem argumento ſi corpus, à viribus agitatum ad centra duo vel plura in eâdem quâvis rectâ *CO* datâ tendentibus, deſcriberet in ſpatio libero lineam quamcunque curvam *ST*; foret area *A O P* tempori ſemper proportionalis.

(n) * *Vi centripetâ ad centrum O &c.* Nam curva ſuperficies B S K L genita ſupponitur revolutione curvæ lineæ B S K circa axem ſuum O C, unde ſequitur lineas omnes P O, H I, T M, F G, P F, C O eſſe in eodem plano, atque ideò vim centripetam agentem in plano illo ad centrum O juxtà lineam P O dirigi.

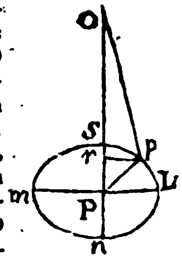


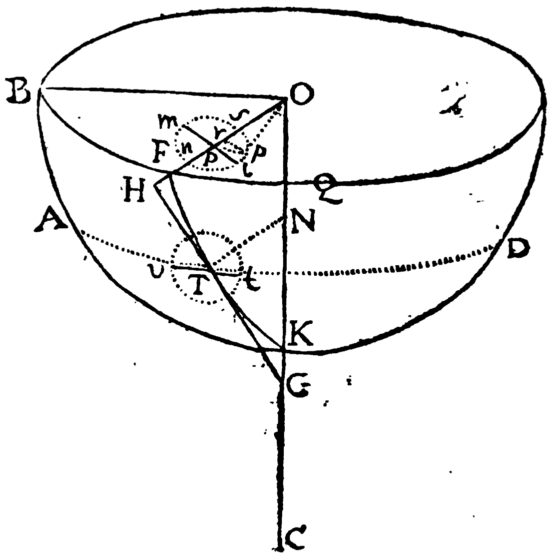
480. Lem. Si linea recta A B projiciatur in planum FHebd, projectio eſt linea recta ab, quæ eſt ad lineam AB, ut coſinus anguli inclinationis BGb, ad ſinum totum. Nam ſi ex punctis A, B, demittantur ad planum FHebd, perpendicula duo Aa, Bb, patet planum aABb, eſſe ad planum FHebd normale, adeoque perpendicula omnia ex ſingulis lineæ AB punctis demiſſa, cadere in lineam rectam ab, quæ eſt communis interſectio planorum FHebd, aABb. Q. E. 1um. Porrò productis BA, ba ut ſibi occurrant in G, ob parallelas Aa, Bb, erit ab ad AB, ut Gb ad GB, id eſt, ut ſinus anguli GBb ſive Coſinus anguli inclinationis BGb, ad ſinum totum. Q. E. 2um.

481. Coroll. Si linea projicienda, plano in quod projicitur parallela fuerit projectio erit linea recta lineæ projiciendæ æqualis & parallela; Nam in hoc caſu angulus inclinationis nullus eſt, & ejus coſinus fit radius. Hinc ſi linea ED, ad rectam AB perpendicularis, fuerit plano FHebd, parallela, projectio illius ed, erit ipſi ED æqualis.

482. Lem. Iiſdem poſitis, ſi in plano DFHEBA, centro C, radio CD, deſcribatur circulus DAEB, illius in planum FHebd projectio daeb, erit ellipſis cujus major axis de æqualis erit diametro circuli DE, & ad minorem axem ab, rationem habebit ſinûs totius ad coſinum anguli BGb, inclinationis planorum. Agatur enim PM ordinatim ad diametrum circuli DE, & projiciatur in rectam pm, erit $dp = DP$, & $pe = PE$ (481.) atque pm ad PM, ut ſinus anguli PMm, ſeu anguli ABb, ad ſinum totum (480) hoc eſt, ut ab, ad AB ſeu de, adeoque $pm^2 : PM^2 = ab^2 : de^2$, ſed ex naturâ circuli $PM^2 = DP \times PE = dp \times pe$, Ergo $pm^2 : dp \times pe = ab^2 : de^2$. Eſt igitur aebd ellipſis. Cætera patent per Lemma ſuperius & ejus coroll.

483. Lem. Sint ellipſeos datæ LSmn axes Lm, Sn, centrum P, O punctum in axe nS producto datum, p punctum perimetri non datum. Datâ areâ trianguli OpP, dabitur perpendiculum pr, ex puncto p, ad trianguli baſim datam PO demiſſum & hinc ex naturâ ellipſeos dabitur rP, atque ob angulum rectum ad r, dabitur Pp, & inde punctum p in perimetro cum angulo OPp & poſitione rectæ Op.





484. Lem. Superficies curva BATKL, deſcribatur revolutione curvæ BAK circà axem ſuum immobilem OC, & ſingulà curvæ illius puncta B, A circulos BQL, ATD deſcribent; cum curva BAK pervenit ad ſitum FTK, & punctum A ad T, agantur recta GTH curvam FTK tangens in T & axem ſecans in G, ac recta vTt circulum ATD tangens in eodem puncto T, ſitque GTH, in plano curvæ OFK, & vTt, in plano circuli ATD. Manifeſtum eſt planum quod ſuperficiem curvam BATKL tangit in T, convenire cum plano in quo ſunt rectæ GTH, vTt; & ſi fuerit O centrum circuli BFQL, & ducatur radius OF tangenti GT occurrens in H, angulum GHO fore æqualem angulo inclinationis plani circuli BQLO, ad planum quod ſuperficiem curvam tangit in T; Ducto autem circuli ATD radio TN, fore angulum GTN, æqualem angulo inclinationis GHO.

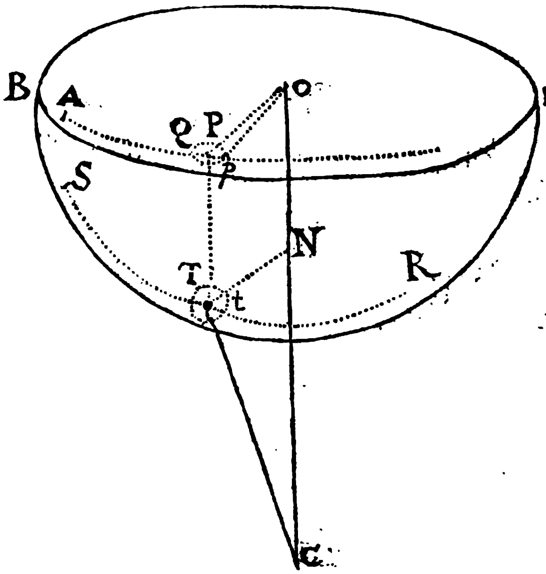
485. Coroll. 1. Iiſdem poſitis, ſi centro T, radio quam minimo Tt, circellus in ſuperficie curvâ BATL deſcribatur, circellus ille evaneſcens erit in plano ſuperficiem curvam tangente in T, adeóque angulus inclinationis plani BOLQ, ad planum circelli evaneſcentis productum, æqualis erit angulo GTN, (484).

486. Coroll. 2. Si circellus radio Tt deſcriptus projiciatur in planum BOLQ, illius projectio lsmn, erit ellipſis (482) cujus axis major lm æqualis eſt & parallelus circelli diametro vTt, quæ pars eſt evaneſcens circuli ATD, axis minor sn pars radii OF, & lm erit ad sn ut TG ad TN. Eſt enim circuli peripheria ATD adeóque & pars illius vTt, plano BFLO parallela; Quarè (481) diametri vTt projectio ml, erit linea parallela & æqualis ipſi vt; erit quoque lm, ad radium OPF normalis, ob vt ad TN perpendicularem, proindeque axis minor ellipſeos sn erit pars radii OF; Eſt autem (482) lm ad sn, ut ſinus totus ad coſinum anguli inclinationis planorum GHO, ſeu GTN, (484) hoc eſt, ut TG ad TN, ob angulum TNG rectum.

PROPOSITIO LVI. PROBLEMA XXXVII.

Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, datiſque tum lege vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum ſuperficie curvâ cujus axis per centrum illud tranſit; invenienda eſt trajectoria quam corpus in eâdem ſuperficie deſcribet, de loco dato, datâ cum velocitate, verſus plagam in ſuperficie illâ datam egreſſum.

Stantibus quæ in ſuperiore propoſitione conſtructa ſunt; exeat corpus *T* de loco dato *S* ſecundum rectam poſitione datam in trajectoriam inveniendam *STR*, cujus veſtigium in plano *BDO* ſit *AP*. Et ex datâ corporis velocitate in altitudine *SC*, (o) dabitur ejus velocitas in aliâ quâvis altitudine *TC*. Eâ cum velocitate dato tempore quam minimo deſcribat corpus trajectoriæ ſuæ particulam *Tt*, ſitque *Pp* veſtigium ejus in plano *AOP* deſcriptum. Jungatur *Op*, & circelli centro *T* intervallo *Tt* in ſuperficie curva deſcripti veſtigium in plano *AOP* ſit ellipſis *pQ*. Et



ob

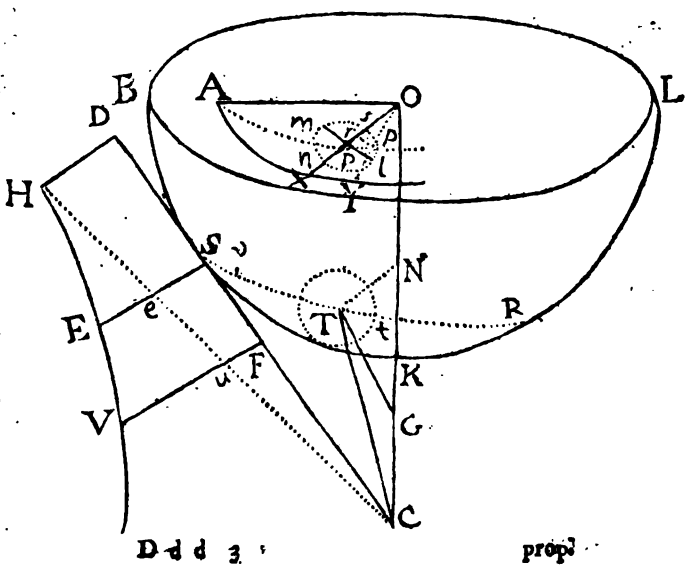
(o) * *Dabitur ejus velocitas in aliâ &c.* Nam (per prop. 40.) velocitas corporis in altitudine TC, æqualis eſt velocitati quam corpus haberet ad eandem altitudinem in lineâ rectâ SC, ſi de loco S, rectâ fuiſſet verſus C projectum cum eâdem velocitate quâ trajectoriam STR incipit deſcribere in S; ſed datâ in loco S velocitate corporis per lineam SC verſus centrum C projecti, datur illius velocitas in alio quovis loco lineæ SC, (per cor. 2. prop. 39.). Ergo ex datâ corporis velocitate in altitudine SC, datur ejus velocitas in aliâ quâvis altitudine TC.

(p) ob datum magnitudine circellum *Tt*, datamque ejus ab axe *CO* diſtantiam *TN* vel *PO*, dabitur ellipſis illa *pQ* ſpecie & magnitudine, ut & poſitione ad rectam *PO*. Cumque (q) area *POp* ſit tempori proportionalis, atque ideo ex dato tempore detur, dabitur angulus *POp*. Et inde dabitur ellipſeos & rectæ *Op* interſectio communis *p*, unà cum angulo *OPp* in quo trajectoriæ veſtigium *APp* ſecat lineam *OP*. (r) Inde verò (conferendo prop. XLI. cum corol. ſuo 2.) ratio determinandi curvam *APp* facile apparet. Tum ex ſingulis veſtigiis punctis *P*, erigendo ad planum *AOP* perpendicula *PT* ſuperficiei curvæ occurrentia in *T*, dabuntur ſingula trajectoriæ puncta *T*. *Q. E. I.*

(p) * *Et ob datum magnitudine circellum &c.* Nam datis velocitate & tempore quibus uniformiter deſcribitur ſpatium naſcens T t, datur ſpatium illud T t, ſeu radius circelli (5). Præterea datâ altitudine T C, datur tum planum ad axem C O perpendiculare in quo circelli centrum poſitum eſt, tum angulus inclinationis plani quod in puncto T curvam ſuperficiem B S T D tangit (484) ad planum B O D P, adeòque datur angulus inclinationis plani in quo eſt circellus naſcens ad planum B O D P (485), undè (482. 486.) ellipſis P p q, in quam circellus projicitur dabitur ſpecie & magnitudine ut & poſitione ad rectam P O.

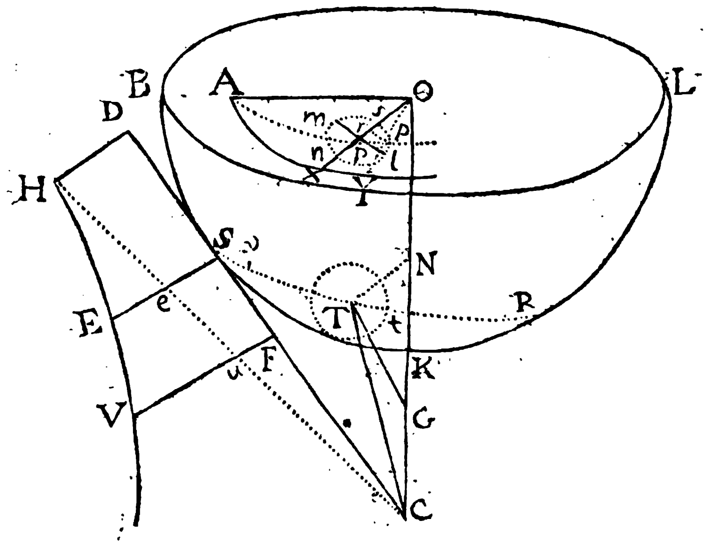
(q) * *Cumque area POp, ſit tempori* quo deſcribitur *proportionalis* (prop. 55.) eodemque tempore quo circelli raradius T t deſcribatur, ex hoc tempore dato datur, atque adeò dabitur angulus P O p, & indè dabitur ellipſeos & rectæ O p interſectio communis p, unà cum angulo O P p (483).

(r) 487. *Indè verò &c.* Sit D locus in rectâ C S productâ, de quo corpus vi centripetâ ad C tendente cadendo acquirit in loco S velocitatem cum quâ trajectoriam S T R incipit deſcribere. In linea C S, capiatur C F = C T, & per puncta F, S, D, erigantur ad C D perpendicula F V, S E, D H vi centripetæ in illis locis proportionalia, ſitque H E V linea quam punctum V perpetuò tangit. Per punctum T, agatur T G, quæ curvam cujus revolutione deſcribitur ſuperficies B S T K L, tangat in T; ſitque eadem T G in curvæ illius plano, & producta, axi O C occurrat in G; velocitates in locis S, & T, ſeu F, erunt ut $\sqrt{DHES}$, & $\sqrt{DHVF}$. (Per 1am. partem



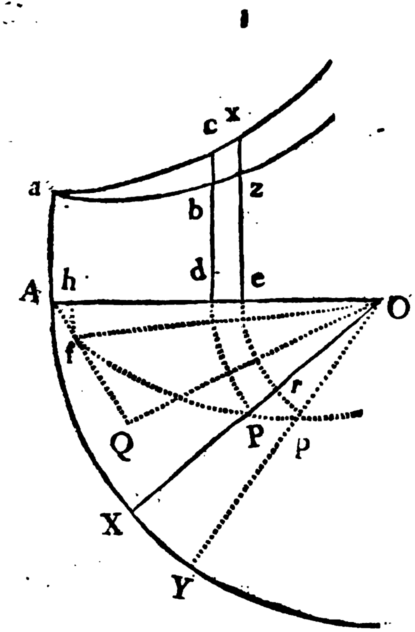
 prop.

DE MOTU CORPORUM.



prop. 39.) Et quoniam area P O p, ſeu $\frac{PO \times pr}{2}$ eſt ut tempus quo deſcribitur T t ſive P l, erit P l, ut $PO \times pr \sqrt{DHVF}$ hoc eſt, ſpatium uniformiter deſcriptum ut velocitas & tempus conjunctim (5). Quarè ſi detur quantitas B erit $Pl = B \times PO \times pr \times \sqrt{DHVF}$. Eſt autem P l ſemiaxis tranſverſus ellipſeos ad P s ſemiaxem conjugatum ut T G ad T N ſeu P O (486) quarè erit $Ps = \frac{B \times PO^2 \times pr \times \sqrt{DHVF}}{TG}$; ſed ex naturâ ellipſeos $Pl^2 : Ps^2 (= TG^2 : PO^2) = pr^2 : nr \times rs$ ſeu $Ps^2 - Pr^2$, atque adeò $PO^2 \times pr^2 = TG^2 \times Ps^2 - TG^2 \times Pr^2$; & hinc $Pr^2 = Ps^2 - \frac{PO^2 \times pr^2}{TG^2} = \frac{B^2 \times PO^4 \times pr^2 \times DHVF - PO^2 \times pr^2}{TG^2}$, proindèque $Pr = \frac{PO \times pr \times \sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}{TG}$, & $pr = \frac{TG \times Pr}{PO \sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}$. Quarè $\frac{PO \times pr}{2} = POp = \frac{TG \times Pr}{2\sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}$. Centro O & radio O A, deſcribatur circuli arcus A X Y, & producantur O P, O p, ut arcui huic occurrant in X & Y, erit $PO : OX$ ſeu $AO = pr : XY = \frac{AO \times pr}{PO}$, & hinc area O X Y $\left(\text{ſive } \frac{AO \times XY}{2}\right) = \frac{AO^2 \times pr}{2PO} = \frac{AO^2 \times TG \times Pr}{2PO^2 \sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}$. Itaque ſi in recta d c, ad AO perpendiculari capiantur $db = \frac{TG}{2\sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}$ & $dc = \frac{AO^2 \times TG}{2PO^2 \sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}$, & deſcribantur lineæ curvæ a b z, a c x, quas puncta b, c, perpetuò tangunt, deque puncto A, ad lineam A O, erigatur perpendiculum A a, ponendo d O = P O, patet fore areas A a b d, A a c d, areis A P O, A X O, æquales &c., (ut in prop. 41.)

488. Quantitas conſtans B, quam in ſuperioribus æquationibus uſurpavimus, facilè determinatur. Nam datâ directione corporis trajectoriam S T R, (vid. fig. not. 487.) deſcribere incipientis, datur illius projectio A Q, quæ ut patet, eſt tangens veſtigii A P p in A, quâ veſtigium A P p incipit deſcribi; projecto in tangen-



gentem AQ ſpatio quod corpus in S dato tempore deſcriberet ſecundum directionem ſuam in S, ſit OQ perpendiculum ex centro O, in tangentem AQ, demiſſum, velocitas in S ad velocitatem in A ut OQ, ad C quantitatem datam, & ductâ Of, ſit area AOf deſcripta eodem tempuſculo quo area naſcens OPp & arcus naſcentes Tt, Sv trajectoriæ STR deſcribuntur, & quoniam velocitates uniformes ſunt ut ſpatia eodem tempore percurſa, erit $Sv : Af = QO : C$, & demiſſo ex puncto f, ad AO perpendiculo fh, erit etiam $Af : fh = AO : QO$. Undè ex æquo. $Sv : fh = AO : C$, ſed (ex dem. 487.) $Tt = Pl = B \times PO \times pr \times \sqrt{DHVF}$, adeoque in loco S, $Sv = B \times AO \times fh \times \sqrt{DHES}$, ergo $Sv : fh = B \times AO \times \sqrt{DHES} : 1 = AO : C$, proindeque $B = \frac{1}{C\sqrt{DHES}}$, & $B^2 = \frac{1}{CC \times DHES}$. Quo valore in ſuperioribus æquationibus (487) ſubſtituto, invenitur $POp = \frac{C \times TG \times Pr \times \sqrt{DHES}}{2\sqrt{PO^2 \times DHVF - CC \times DHES}}$ & $OXY = \frac{C \times AO^2 \times TG \times Pr \times \sqrt{DHES}}{2PO^2 \times \sqrt{PO^2 \times DHVF - CC \times DHES}}$.

Harum formularum ope, nullâ ampliùs habitâ ratione circelli ejuſque projectionis ellipſeos, deſcribi poteſt veſtigium APp, & ex dato tempore inveniri locus P, (ut in prop. 41). Cum autem trajectoria STR, ſit linea duplicis curvaturæ ad promovendam difficilem theoriam motuum in ſuperficiebus curvis quam hic aperuit Newtonus non parum adjumenti conferre poterit tractatus quem de lineis duplicis curvaturæ an. 1731. Pariſiis edidit Clariſſimus Geometra D. Clairaut. Horum motuum in conoide parabolico, cono, & cylindro exempla dabimus.

489. Exemplum 1. Sit (vid fig. not. 487). curva BSK parabola cujus latus rectum $= l$, dicatur $AO = r$, $KC = a$, $DC = b$, TN, ſeu $PO = x$, & proindè $Pr = dx$, erit ex naturâ parabolæ, $NK = \frac{x^2}{l}$, $NG = \frac{2x^2}{l}$, adeóque $TG^2 = \frac{4x^4 + llxx}{ll}$, & $TG = \frac{x\sqrt{4xx + ll}}{l}$; quarè ſi in ſuperioribus formulis (488) ponatur $C \times \sqrt{DHES} = pp$, erit $POp = \frac{p^2 x dx \sqrt{4xx + ll}}{2l\sqrt{x^2 \times DHVF - p^4}}$, & $OXY = \frac{p^2 r^2 dx \sqrt{4xx + ll}}{2lxx\sqrt{x^2 \times DHVF - p^4}}$. Sit vis centripeta ut diſtantia à centro C directè, hoc eſt, in loco quovis T, vel F ſit ut TC ſeu FC, & curva HEV in rectam $HevC$ mutabitur, & poſitâ $DH = q$, erit $DC\ (b) : FC$ ſeu $TC = DH\ (q) : Fu = \frac{q \times TC}{b}$. Quarè cum ſit area $DHuF = DHC - FuC = \frac{1}{2}qb - \frac{1}{2}FC \times Fu$, erit $DHuF = \frac{qbb - q \times TC^2}{2b}$. Eſt autem $TC^2 = TN^2 + NC^2 = xx + \left(\frac{xx}{l} + a\right)^2 = \frac{x^4 + llxx + 2alxx + llaa}{ll}$. Ergò area $DHuF = \frac{qllbb - qx^4 - qllx^2 - 2qalx^2 - qlla^2}{2bll}$; Si itaque hic valor loco $DHVF$, in ſuperioribus æquationibus ſubſtituatur, erit

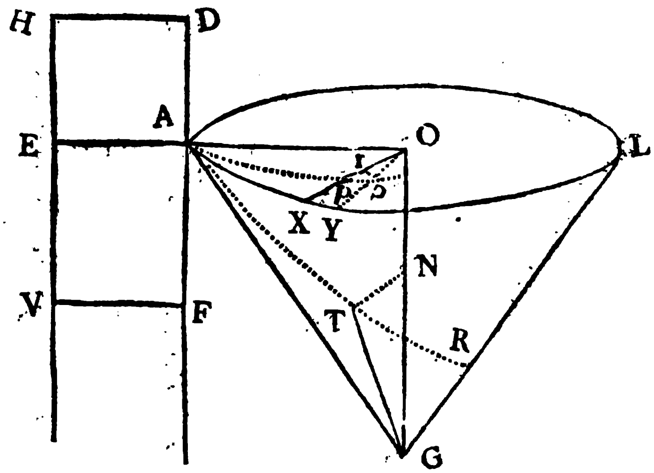
erit $OPp = \frac{p^2 x dx \sqrt{4bxx + bll}}{\sqrt{2qllbbx^2 - 2qx^6 - 2qllx^4 - 4qalx^4 - 2qla^2x^2 - 4bl^2p^4}}$

& $OXY = \frac{p^2 r^2 dx \sqrt{4bxx + bll}}{x\sqrt{2ql^2bx^2 - 2qx^6 - 2ql^2x^4 - 4qalx^4 - 2ql^2a^2x^2 - 4bl^2p^4}}$.

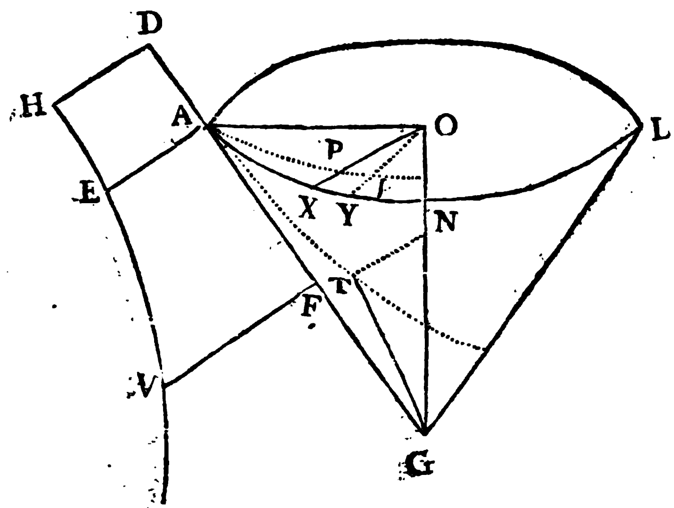
Si igitur ordinatæ d b, d c, dicantur y, z, æquationes ad curvas a b, a c, (vid. fig. 2. not. 487.) erunt

$$yy = \frac{4bp^4x^4 + bp^4llxx}{2ql^2b^2x^2 - 2qx^6 - 2qllx^4 - 4qalx^4 - 2qlla^2x^2 - 4bl^2p^4}$$

$$\& \; zz = \frac{4bp^4r^4xx + bp^4r^4ll}{2qllbbx^4 - 2qx^8 - 2qllx^6 - 4qalx^6 - 2ql^2a^2x^4 - 4bl^2p^4x^2}.$$

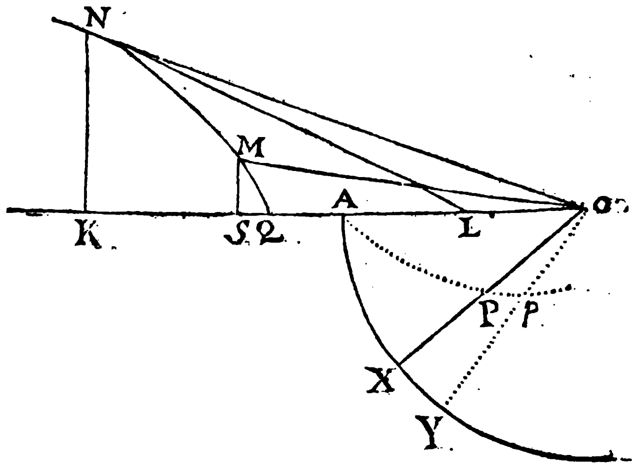


490. Exemplum 2. Sit A T G L, ſuperficies coni recti cujus vertex G, axis G O, baſis A X L O, & corpus de loco A egreſſum moveatur in trajectoriâ ATR, vis centripeta conſtans ſit & juxta directionem axi O G parallelam ſemper agat, illamque in locis D, A, F, ſeu T, exponant rectæ DH, A E, F V æquales & ad rectam D F axi parallelam perpendiculares, erit punctum V in lineâ rectâ H E V, ipſi D F parallelâ. Sit D locus de quo corpus cadere debet ut habeat in loco A velocitatem cum quâ trajectoriam A T R incipit deſcribere, & ex puncto T, ducatur T G, ſuperficiem conicam tangens in T, & T N = O P ad axem G O perpendicularis. Sit $HD = a$, $DA = b$, $OG = e$, $AG = f$, $AO = r$, $PO = TN = x$, $pr = dx$, erit (ex naturâ coni) $AO(r) : AG(f) = TN(x) : TG\left(\frac{fx}{r}\right)$. Et $AO(r) : OG(e) = TN(x) : NG\left(\frac{ex}{r}\right)$. Undè $ON = OG - GN = \frac{er - ex}{r}$, & $DF = DA + ON = \frac{rb + er - ex}{r} = \frac{hr - ex}{r}$ ponendo $b + e = h$. Quarè area DHEA $= ab$, & $DHVF = \frac{rha - aex}{r}$. Et hinc per formulas (488) $OPp = \frac{Cfxdx\sqrt{ab}}{2r\sqrt{haxx - qx^3 - CCab}}$, ponendo $\frac{ae}{r} = q$, & $OXY = \frac{Crfdx\sqrt{ab}}{2x\sqrt{haxx - qx^3 - CCab}}$, undè facilè inveniuntur æquationes ad curvas AB, AC, ut in exemplo 1°.



491. Exemplum 3um. Tendat vis centripeta ad coni verticem G, & in triplicatâ ratione diſtantiarum ab illo puncto G decreſcat, ſitque H E V curva ad quam terminantur perpendicula D H, A E, F V vim centripetam in locis ſingulis D, A, F, vel T, exhibentia, cætera verò maneant ut in exemplo ſuperiori. Quoniam $TG = \frac{fx}{r}$ erit vis centripeta in loco T vel F ut $\frac{r^3}{f^3 x^3}$, adeóque ſi fuerit n quantitas data, vis centripetâ ſupponi poterit $= \frac{n^4}{x^3}$. Sit $DG = m$, & erit (431) area $DHVF = \frac{n^4(mm-xx)}{mmxx} = \frac{kkmm-kkxx}{xx}$, ponendo $\frac{n^4}{mm} = kk$. Quarè ſi dicatur area $DHEA = pp$, erit $POp = \frac{Cpfxdx}{2r\sqrt{kkmm-kkxx-CCpp}} = \frac{qxdx}{\sqrt{hh-xx}}$ ponendo $kkmm - CCpp = kkhh$, & $\frac{Cpf}{2rk} = q$. Similiter invenietur $OXY = \frac{rrqdx}{x\sqrt{hh-xx}}$. Quoniam autem creſcentibus areis A P O, A X O, decreſcit P O, ſeu x, ſcribendum eſt $OPp = \frac{-qxdx}{\sqrt{hh-xx}}$ & $OXY = \frac{-rrqdx}{x\sqrt{hh-xx}}$. Fiat $\sqrt{hh-xx} = z$, & erit $hh - xx = zz$ & $-xdx = zdz$, & $POp = qdz$, ſumptiſque fluentibus & additâ conſtanti Q, erit $APO = qz + Q = q\sqrt{hh-xx} + Q$. Porrò area A P O evaneſcit ubi P O, ſeu $x = AO = r$, quarè $o = q\sqrt{hh-rr} + Q$, & hinc $Q = -q\sqrt{hh-rr}$, proindeque $APO = q\sqrt{hh-xx} - q\sqrt{hh-rr}$. Ex dato igitur tempore quo corpus deſcribit AT, geometricè invenitur longitudo lineæ P O. Ponatur nunc $x = \frac{hh}{y}$ & erit $-dx = \frac{hhdy}{yy}$, $hh - xx = \frac{hhyy - h^4}{y^2}$, $\sqrt{hh-xx} = \frac{h\sqrt{y^2-h^2}}{y}$ atque adeò $OXY = \frac{-rrqdx}{x\sqrt{hh-xx}} = \frac{rrqdy}{h\sqrt{y^2-h^2}}$. Sit $\frac{rrq}{hh} = \frac{1}{2}s$, & erit $OXY = \frac{1}{2}\frac{shdv}{\sqrt{yy-hh}}$. Unde habetur conſtructio ſequens.

De Motu Corporum.

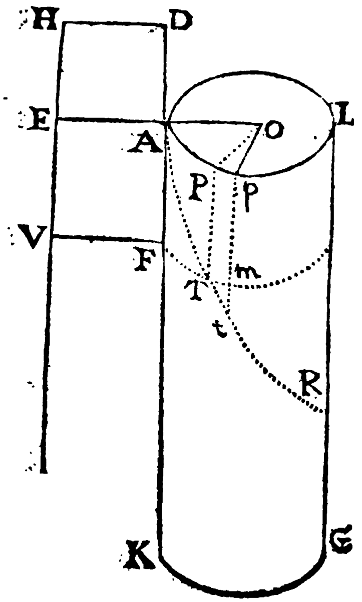


Centro O, ſemiaxe tranſverſo OAQ $= h$, ſemiaxe conjugato $= s$, deſcribatur hyperbola QMN, ex illius perimetri puncto quovis N, demittatur ad axem OQ, perpendiculum NK, & abſciſſa OK dicatur y, ductâque rectâ NL, quæ hyperbolam tangat in N, & axi occurrat in L, erit (ex conic.) OK (y) : OQ (h) $=$ OQ (h) : OL $= \frac{hh}{y} = x$, & ſector hyperbolicus ONQ $=$ S. $\frac{1}{2}\frac{shdy}{\sqrt{hy-hh}}$ (427) atque adeò AXO $=$ ONQ $+ Q$ conſtante. Si ponatur x, ſeu $\frac{hh}{y} =$ OA $= r$, hoc eſt $y = \frac{hh}{r}$ evaneſcet area AXO, quare ſi capiatur OS $= \frac{hh}{r}$ & ad axem erigatur perpendiculum SM, hyperbolæ occurrens in M, jungaturque OM, erit $o =$ OMQ $+ Q$, & $Q = -$ OMQ; undè AXO $=$ ONQ $-$ OMQ $=$ ONM. Sumatur itaque ſector circuli OAX $=$ ſectori hyperbolico ONM, & in radio OX capiatur OP $=$ OL, erit P punctum in veſtigio ſeu curvâ AP p. Hinc ſi ex dato tempore quæratur locus T (vid. fig. ſuper.) in trajectoriâ TR, inveniatur primum longitudo OP, ſeu OL, tum agatur LN tangens hyperbolam in puncto aliquo N; Deindè capiatur ſector circularis AXO $=$ ſectori hyperbolico ONM, & in radio OX, capiatur OP $=$ OL, ac tandem ex puncto P, erigatur ad planum AOP (vid. fig. ſuper.) perpendiculum PT, quòd ſuperficiei conicæ occurret in loco quæſito T.

Exempl. 4. Moveatur corpus de loco A per trajectoriam ATR, in ſuperficie concavâ cylindri recti AKGL, in quo ſit baſeos centrum O, manifeſtum eſt veſtigium trajectoriæ ATR, coincidere cum baſeos peripheriâ circulari APL, quam proindè punctum P, æquabili velocitate deſcribet (per prop. 56.) Sit vis centripeta conſtans & per lineas lateri cylindri AK parallelas ſemper agat, dicanturque HD $= a$, DA $= b$, AF $=$ PT $= y$, m t $= dy$, arcus AP $= x$, Pp $=$ Tm $= dx$, Tt $= \sqrt{dx^2+dy^2}$, erit area DHEA $= ab$, area DHVF $= ab + ay$, velocitas in F vel T $= \sqrt{ab+ay}$, undè tempuſculum quo deſcribitur naſcens Tt vel Pp erit $= \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{ab+ay}}$. Et ſit data velocitas quâ punctum P deſcribit circulum APL dicaturque c erit tempuſculum quo deſcribitur Pp $= \frac{\text{Pp}}{c} = \frac{dx}{c}$; quarè $\frac{dx}{c} =$

$\sqrt{dx^2}$

LIBER PRIMUS. PROP. LVI. PROBL. XXXVII.



$\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{ab+ay}}$, & $\frac{dx^2}{cc}=\frac{dx^2+dy^2}{ab+ay}$, & $abdx^2+aydx^2-ccdx^2=ccdy^2$, & $dx=\frac{cdy}{\sqrt{ab-cc+ay}}=\frac{cdy}{\sqrt{aq+ay}}$, ponendo $ab-cc=aq$. fiat jam $\sqrt{q+y}=z$, $q+y=zz$, $dy=2zdz$, $\sqrt{aq+ay}=z\sqrt{a}$ erit $dx=\frac{2czdz}{z\sqrt{a}}=\frac{2c}{\sqrt{a}}\times dz$, & ſumptis fluentibus additâ conſtanti Q, erit $x=\frac{2cz}{\sqrt{a}}+Q=\frac{2c\sqrt{q+y}}{\sqrt{a}}+Q$. Ponatur $y=o$, erit etiam $x=o$, adeòque $o=\frac{2c\sqrt{q}}{a}+Q$, & $Q=-\sqrt{\frac{4ccq}{a}}$, undè $x=\sqrt{\frac{4ccq+4ccy}{a}}-\sqrt{\frac{4ccq}{a}}$. Sit $\frac{4cc}{a}=p$, & $\frac{4ccq}{a}=nn$, erit $x=\sqrt{nn+py}-n$, $xx+2nx=py$, $y=\frac{xx+2nx}{p}$. Conceſſâ igitur quadraturâ circuli facilè invenitur trajectoriæ ATR punctum quodvis T capiendo perpendiculum PT ad arcum AP, ut eſt $AP+2n$ ad p. Ex tempore autem dato datur arcus AP. Si corporis de loco A egredientis velocitas eadem ſit ac velocitas puncti P in plano baſeos APLO revolventis erit $cc=ab$, & quoniam ſuppoſuimus $ab-cc=aq$, eſſet $q=o$, & proindè $nn=\frac{4ccq}{a}=o$, atque hinc $y=\frac{xx}{q}$, ſeu $p:x=x:y$. Sive ſcribendo loco p ejus valorem $\frac{4cc}{a}$, in quo loco cc ponatur ab, erit $4b:x=x:y$, hoc eſt, 4DA ad arcum AP ut is AP ad PT.

SECTIO XI.

De motu corporum viribus centripetis ſe mutuo petentium.

Hactenus expoſui motus corporum attractorum ad centrum immobile, quale tamen vix extat in rerum naturâ. Attractiones enim fieri ſolent ad corpora; & corporum trahentium & attractorum actiones ſemper mutuæ ſunt & æquales, per legem tertiam: adeo ut neque attrahens poſſit quieſcere neque attractum, ſi duo ſint corpora, ſed (ſ) ambo (per legum corollarium quartum) quaſi attractione mutuâ, circum gravitatis centrum commune revolvantur: & ſi plura ſint corpora, quæ vel ab unico attrahantur, & idem attrahant, vel omnia ſe mutuo attrahant; hæc ita inter ſe moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quieſcat, vel uniformiter moveatur in directum. Quâ de causâ jam pergo motum exponere corporum ſe mutuo trahentium, conſiderando vires centripetas tanquam attractiones, quamvis fortaſſe, ſi phyſicè loquamur, verius dicantur impulſus. In mathematicis enim jam verſamur; & propterea, miſſis diſputationibus phyſicis, familiari utimur ſermone, quo poſſimus à lectoribus mathematicis facilius intelligi.

PROPOSITIO LVII. THEOREMA XX.

Corpora (t) duo ſe invicem trahentia deſcribunt, & circum commune centrum gravitatis, & circum ſe mutuò, figuras ſimiles.

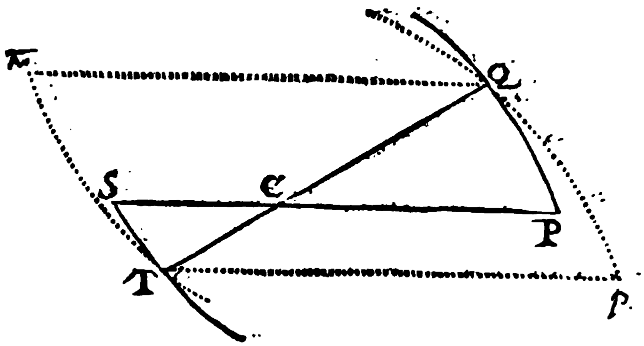
Sunt (u) enim diſtantiæ corporum à communi gravitatis centro

(ſ) * *Sed ambo (per leg. corol. 4.) quaſi attractione mutuâ* vel ad ſe invicem rectâ lineâ ferantur, vel, ſi ambo vi impreſſâ obliquè projiciuntur, *circum gravitatis centrum commune quieſcens aut uniformiter progrediens revolvantur.*

(t) * *Corpora duo.* Si corpora duo S, P ſe invicem trahentia revolvantur circa commune gravitatis centrum C, pergendo de S ad T & de P ad Q, ſimiles ſunt hæ figuræ quatuor, nimirum P Q C, STC, quas corpora S & T circa commune gravitatis centrum C deſcribunt, tum figura P Q T quam corpus P deſcribit circa corpus S ſpectatum tanquam immotum, & figura π T Q, quam S circà P ſimiliter ſpectatum deſcribit.

(u) * *Sunt enim diſtantiæ corporum à communi gravitatis centro* Q C, C T *reciprocè proportionales corporibus datis* P, S

tro reciprocè proportionales corporibus, atque ideo in datâ ratione ad invicem, & componendo in datâ ratione ad diſtantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ diſtantiæ circum terminum ſuum communem æquali motu angulari, propterea quod in directum ſemper jacentes non mutant inclinationem ad ſe mutuò. Lineæ autem rectæ, quæ ſunt in datâ ratione ad invicem, & æquali



(60) *atque ideò in datâ ratione ad invicem, & componendo*, Q C eſt ad Q T in datâ ratione corporis S ad ſummam corporum S + P. *Feruntur autem diſtantiæ* Q C, T C, *circa centrum C terminum ſuum communem æquali motu angulari*, id eſt, angulus Q C P eſt ſemper æqualis angulo T C S propterea quod diſtantiæ Q C, T C in directum ſemper jacent (60). Quarè (112) duæ figuræ P Q C, S T C ſimiles ſunt. Quod erat primum.

Agatur per T recta T p lineæ S P æqualis & parallela, & ſi corpus S tanquam immotum ſpectetur, motus corporis P quod in Q pervenit idem erit reſpectu corporis S ſeu T, ac ſi corpus P de loco p tranſlatum eſſet in locum Q, eritque Q T ad T p ſeu S P, ut Q C ad C P, & angulus Q T p = Q C P unde figura P Q circa punctum S ut immotum ſpectatum à corpore P deſcripta erit ſimilis figuræ P Q C ideoque & figuræ S T C, ſimili ratiocinio oſtendetur figuram π T Q circa punctum P immotum à corpore S deſcriptam, eſſe ſimilem figuræ S T C ideoque & figuræ P Q C. Quod erat alterum.

Quod forte facilius adhuc intelligetur, ſi ponamus in corpore S ſpectatorem qui ſe & lineam S P tanquam immotam habeat, in hâc enim hypotheſi, ubi corpus S pervenerit in locum T, linea S P, quæ tanquam immota ſpectatur erit T p ipſi S P æqualis & parallela & ſpectator in T locatus motum corporis P videbit ſub angulo Q T p = Q C P, & ad diſtantiam T Q. Cum igitur ſit ſemper Q C ad C P, ut Q T ad S P, ſeu T p, & angulus Q C P, æqualis angulo Q T p, figura p Q T, ſimilis erit figuræ P Q C, adeóque & figuræ S T C. Pariter ſi per Q agatur Q π æqualis & parallela P S liquet figuram π T Q quam S circa P ſpectatum tanquam immotum deſcribit eſſe ſimilem & æqualem figuræ p Q T quam corpus P, circa S ſpectatum tanquam immotum deſcribit. Patet etiam harum omnium figurarum partes ſimiles eodem tempore deſcribi, ideóque etiam totas figuras æqualibus temporibus percurri.

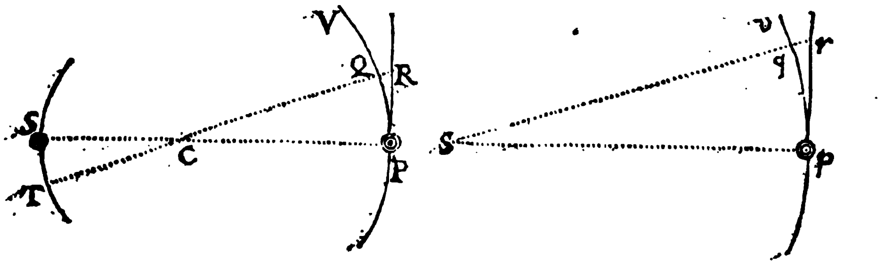
DE MOTU CORPORUM.

æquali motu angulari circum terminos ſuos feruntur, figuras circum eoſdem terminos in planis, quæ unà cum his terminis vel quieſcunt, vel ([a]) motu quovis non angulari moventur, deſcribunt omninò ſimiles. Proinde ſimiles ſunt figuræ, quæ his diſtantiis circumactis deſcribuntur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LVIII. THEOREMA XXI.

Si corpora duo viribus quibuſvis ſe mutuo trahunt, & interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod figuris, quas corpora ſic mota deſcribunt circum ſe mutuò, poteſt figura ſimilis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus iiſdem deſcribi.

Revolvantur corpora *S*, *P* circa commune gravitatis centrum *C*, pergendo de *S* ad *T*, deque *P* ad *Q*. A dato puncto *s* ipſis *SP*, *TQ* æquales & parallelæ ducantur



ſemper *sp*, *sq*; & curva *pqv*, quam punctum *p* revolvendo circum punctum immotum *s* deſcribit, ([b]) erit ſimilis & æqualis curvis, quas corpora *S*, *P* deſcribunt circum ſe mutuò: proindeque (per theor. xx.) ſimilis curvis *ST* & *PQV*, quas eadem corpora deſcribunt circum commune gravitatis centrum *C*: idque quia proportiones linearum *SC*, *CP*, & *SP* vel *sp* ad invicem dantur.

Caſ.

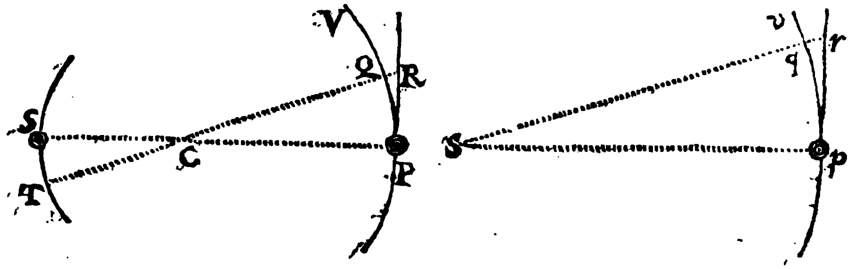
(a) * *Motu quovis non angulari.* Vide Legum coroll. 5. & 6.

(b) * *Erit ſimilis & æqualis curvis*, ut patet ex demonſtratione propoſitionis ſuperioris.

Caſ. 1. Commune illud gravitatis centrum *C*, per legum corollarium quartum, vel quieſcit, vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo, quod id quieſcit, inque *s* & *p* locentur corpora duo, immobile in *s*, mobile in *p*, corporibus *S* & *P* ſimilia & æqualia. Dein tangant rectæ *PR* & *pr* curvas *PQ* & *pq* in *P* & *p*, & producantur *CQ* & *sq* ad *R* & *r*. Et ob ſimilitudinem figurarum *CPRQ*, *sprq* erit *RQ* ad *rq* ut *CP* ad *sp*, ideoque in datâ ratione. Proinde ſi vis, quâ corpus *P* verſus corpus *S*, atque ideo verſus centrum intermedium *C* attrahitur, eſſet ad vim, quâ corpus *p* verſus centrum *s* attrahitur, in eâdem illâ ratione datâ; hæ vires æqualibus temporibus attraherent ſemper corpora de tangentibus *PR*, *pr* ad arcus *PQ*, *pq* per intervalla ipſis proportionalia *RQ*, *rq*, ideoque vis poſterior efficeret, ut corpus *p* gyraretur in curvâ *pqv*, quæ ſimilis eſſet curvæ *PQV*, in quâ vis prior efficit, ut corpus *P* gyretur; & revolutiones iiſdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non ſunt ad invicem in ratione *CP* ad *sp*, ſed (ob ſimilitudinem & æqualitatem corporum *S* & *s*, *P* & *p*, & æqualitatem diſtantiarum *SP*, *sp*) ſibi mutuò æquales; corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de tangentibus: & propterea, ut corpus poſterius *p* trahatur per intervallum majus *rq*, requiritur tempus majus, (c) idque in ſubduplicatâ ratione intervallorum; propterea quod (per lemma decimum) ſpatia ipſo motus initio deſcripta ſunt in duplicatâ ratione temporum. Ponatur igitur veloci-

(c) *Idque in ſubduplicatâ ratione intervallorum.* Naſcentibus arcubus Pq, PQ tempora quibus deſcribuntur intervalla rq, RQ ſunt in ſubduplicatâ ratione eorumdem intervallorum, per Lem. X. Quarè ſi velocitates uniformes quibus ſimiles arcus naſcentes pq, PQ æqualibus viribus centripetis deſcribuntur, dicantur V, v, tempora T, t, erit $T^2 : t^2 = rq : RQ = sp : CP = pq : PQ$, eſt verò (5) $V : v = \frac{pq}{T} : \frac{PQ}{t}$ ſive ut $\frac{T^2}{T} : \frac{t^2}{t}$, adeóque $V : v = T : t = \sqrt{sp} : \sqrt{CP}$. Itaque corpora P, p, viribus æqualibus ſemper attracta, circum centra quieſcentia C, s, naſcentes figuras ſimiles PQ, pq, adeóque & figuras quaſvis ſimiles PQV, pqu, deſcribent temporibus & velocitatibus quæ erunt in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum ſimilium CP, sp. Eſt autem (ex Dem.) figura pqu, ſimilis & æqualis figuræ quam corpus P, circum corpus mobile S, (ſpectatum tanquam immotum, ut in propoſitione ſuperiori expoſuimus) deſcribit eodem tempore, quo circà centrum C, deſcribit figuram ſimilem PQV.

DE MOTU CORPORUM.



locitas corporis p eſſe ad velocitatem corporis P in ſubduplicatâ ratione diſtantiæ sp ad diſtantiam CP, eo ut temporibus, quæ ſint in eâdem ſubduplicatâ ratione, deſcribantur arcus pq, PQ, qui ſunt in ratione integrâ: Et corpora P, p viribus æqualibus ſemper attracta deſcribent circum centra quieſcentia C & s figuras ſimiles PQV, pqv, quarum poſterior pqv ſimilis eſt & æqualis figuræ, quam corpus P circum corpus mobile S deſcribit. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, unà cum ſpatio in quo corpora moventur inter ſe, progreditur uniformiter in directum; & (per legum corollarium ſextum) motus omnes in hoc ſpatio peragentur ut prius, ideoque corpora deſcribent circum ſe mutuo figuras eaſdem ac prius, & propterea figuræ pqv ſimiles & æquales. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc corpora duo viribus diſtantiæ ſuæ proportionalibus ſe mutuò trahentia, deſcribunt (per prop. x.) & circum commune gravitatis centrum, & circum ſe mutuo, ellipſes concentricas; & vice verſâ, ſi tales figuræ deſcribuntur, ſunt vires (d) diſtantiæ proportionales.

Corol. 2. Et corpora duo, viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciprocè proportionalibus, deſcribunt (per prop. XI. XII. XIII.) &

(d) * *Diſtantiæ proportionales.* Cum enim (ex Dem.) corpus p, circà s, & corpora duo P, S, circà commune gravitatis centrum C, & circum ſe mutuò figuras ſimiles vi centripetâ æquali deſcribant, ſitque (per prop. X.) figura pqu ellipſis cujus centrum S., liquet veritas corollarii.

& circum commune gravitatis centrum, & circum ſe mutuo, ſectiones conicas umbilicum habentes in centro, circum quod figuræ deſcribuntur. Et vice verſâ, ſi tales figuræ deſcribuntur, vires centripetæ ſunt quadrato diſtantiæ reciprocè proportionales.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia, radiis & ad centrum illud & ad ſe mutuò ductis, (e) deſcribunt areas temporibus proportionales.

PROPOSITIO LIX. THEOREMA XXII.

Corporum duorum S *&* P, *circa commune gravitatis centrum* C *revolventium, tempus periodicum eſſe ad tempus periodicum corporis alterutrius* P, *circa alterum immotum* S *gyrantis, & figuris, quas corpora circum ſe mutuo deſcribunt, figuram ſimilem & æqualem deſcribentis, in ſubduplicatâ ratione corporis alterius* S, *ad ſummam corporum* S+P.

Namque, ex demonſtratione ſuperioris propoſitionis, tempora, quibus arcus quivis ſimiles *PQ* & *pq* deſcribuntur, ſunt in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum *CP* & *SP* vel *sp*, hoc eſt, in ſubduplicatâ ratione corporis *S* ad ſummam corporum *S+P*. Et componendo, ſummæ temporum quibus arcus omnes ſimiles *PQ* & *pq* deſcribuntur, hoc eſt, tempora tota, quibus figuræ totæ ſimiles deſcribuntur, ſunt in eâdem ſubduplicatâ ratione. *Q. E. D.*

PRO-

(e) * *Deſcribunt areas temporibus proportionales.* Nam tempora quibus deſcribuntur areæ quævis ſimiles spq, CPQ, & spu, CPV, ſunt ſemper in datâ ratione, nimirum, ſubduplicatâ diſtantiarum ſimilium sp, CP (ex Dem.) & proindè tempus quo deſcribitur area spq, eſt ad tempus quo deſcribitur area spu, ut tempus quo deſcribitur area CPQ, ad tempus quo deſcribitur area CPV; ſed (per prop. 1.) tempora quibus deſcribuntur areæ spq, spu, ſunt areis illis adeóque & areis ſimilibus CPQ, CPV proportionalia, ergò areæ CPQ, CPV ſunt ut tempora quibus deſcribuntur; & quoniam areæ quas corpora S, P circum centrum gravitatis deſcribunt ſimiles ſunt areis quas iiſdem temporibus deſcribunt circum ſe mutuò, erunt quoque areæ iſtæ proportionales temporibus quibus deſcribuntur.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO LX. THEOREMA XXIII.

Si corpora duo S & P, viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus, ſe mutuò trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod ellipſeos, quam corpus alterutrum P hoc motu circa alterum S deſcribit, axis principalis erit ad axem principalem ellipſeos, quam corpus idem P circa alterum quieſcens S eodem tempore periodico deſcribere poſſet, ut ſumma corporum duorum S + P ad primum duorum mediè proportionalium inter hanc ſummam & corpus illud alterum S.

(f) Nam ſi deſcriptæ ellipſes eſſent ſibi invicem æquales, tempora periodica (per theorema ſuperius) forent in ſubduplicatâ ratione corporis S ad ſummam corporum $S+P$. Minuatur in hâc ratione tempus periodicum in ellipſi poſteriore, & tempora periodica evadent æqualia; ellipſeos autem axis principalis (per prop. xv.) minuetur in ratione, cujus hæc eſt ſeſquiplicatâ, id eſt in ratione, cujus ratio S ad $S+P$ eſt triplicatâ; ideoque erit ad axem principalem ellipſeos alterius, ut primum duorum mediè proportionalium inter $S+P$ & S ad $S+P$. Et inversè, axis principalis ellipſeos circa corpus mobile deſcriptæ erit ad axem principalem deſcriptæ circa immobile, ut $S+P$ ad primum duorum mediè proportionalium inter $S+P$ & S. *Q. E. D.*

P R O-

(f) *Nam ſi deſcriptæ ellipſes &c.* Axis principalis ellipſium æqualium, quas corpora S, P circum ſe mutuò deſcribunt (ut ad prop. 57. expoſuimus) æqualis eſt axi principali ellipſeos, p q u, quam corpus p vel P, circà corpus s vel S, reverâ immotum deſcribit (ut in prop. 58). Hic axis dicatur A, tempus periodicum quod in ellipſibus quatuor quas corpora S, P circum C & circum ſe mutuò deſcribunt (ut in prop. 57.) idem eſt, dicatur t, tempus periodicum in ellipſi p q u, quam corpus p, vel P, circà corpus S, vel s, reverâ immotum (ut in prop. 58.) deſcribit dicatur T, ſitque X axis principalis ellipſeos quam corpus idem P, vel p, circà alterum S vel s reverâ immotum (ut in prop. 58.) deſcribere poſſet tempore periodico t, erit (per prop. 59.) $T^2 : t^2 = S+P : S$. & (per prop. 15.) $T^2 : t^2 = A^3 : X^3$, quarè $A^3 : X^3 = S+P : S$. Jam ſi capiantur duæ quantitates B, C mediæ proportionales inter $S+P$ & S, erit $S+P$ ad S in ratione triplicatâ $S+P$, ad B, hoc eſt $S+P : S = \overline{S+P}^3 : B^3$, ac proindè $A^3 : X^3 = \overline{S+P}^3 : B^3$, ideoque $A : X = S+P : B$. Q. E. D.

PROPOSITIO LXI. THEOREMA XXIV.

LIBER PRIMUS. PROP. LXI. THEOR. XXIV.

Si corpora duo viribus quibuſvis ſe mutuo trahentia, neque alias agitata vel impedita, quomodocunque moveantur, motus eorum perinde ſe habebunt, ac ſi non traherent ſe mutuò, ſed utrumque à corpore tertio in communi gravitatis centro conſtituto viribus iiſdem traheretur: Et virium trahentium eadem erit lex reſpectu diſtantiæ corporum à centro illo communi atque reſpectu diſtantiæ totius inter corpora.

Nam vires illæ, quibus corpora ſe mutuo trahunt, tendendo ad corpora, (g) tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium; ideoque eædem ſunt, ac ſi à corpore intermedio manarent. *Q. E. D.*

Et quoniam datur ratio diſtantiæ corporis utriuſvis à centro illo communi ad diſtantiam inter corpora, dabitur ratio cujuſvis poteſtatis diſtantiæ unius ad eandem poteſtatem diſtantiæ alterius; ut ratio quantitatis cujuſvis, quæ ex unâ diſtantiâ & quantitatibus datis utcunque derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex alterâ diſtantiâ, & quantitatibus totidem datis, datamque illam diſtantiarum rationem ad priores habentibus ſimiliter derivatur. Proinde ſi vis, quâ corpus unum ab altero trahitur, ſit directè vel inversè ut diſtantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus diſtantiæ poteſtas; vel denique ut quantitas quævis ex hâc diſtantiâ & quantitatibus datis quomodocunque derivata: erit eadem vis, quâ corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directè itidem vel inversè ut corporis attracti diſtantia à centro illo communi, vel ut eadem diſtantiæ hujus poteſtas, vel denique ut quantitas ex hâc diſtantiâ & analogis quantitatibus datis ſimiliter derivata. (h) Hoc eſt, vis trahentis eadem erit lex reſpectu diſtantiæ utriuſque. *Q. E. D.*

PRO-

(g) * *Tendunt ad commune gravitatis centrum*, eſt enim communis interſectio omnium rectarum quæ corpora revolventia jungunt, & ſecundum quas, vires quibus corpora ſe mutuò trahunt, diriguntur.

(h) * *Hoc eſt vis trahentis eadem erit lex &c.* Sit (in fig. prop. 58.) $TQ=x$, $CQ=y$, & x ad y in ratione datâ a ad b, ſeu $x=\frac{ay}{b}$, vis quâ corpora S, P

 in

De Motu Corporum,

PROPOSITIO LXII. PROBLEMA XXXVIII.

Corporum duorum, quæ viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciprocè proportionalibus ſe mutuo trahunt, ac de locis datis demittuntur, determinare motus.

Corpora, (per theorema noviſſimum) perinde movebuntur, ac ſi à corpore tertio in communi gravitatis centro conſtituto traherentur; & centrum illud ipſo motus initio quieſcet per hypotheſin; & propterea (per legum corol. 4.) ſemper quieſcet. Determinandi ſunt igitur motus corporum (per prop. xxv.) perinde ac ſi à viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, & habebuntur motus corporum ſe mutuò trahentium. *Q. E. I.*

PROPOSITIO LXIII. PROBLEMA XXXIX.

Corporum duorum quæ viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciprocè proportionalibus ſe mutuo trahunt, deque locis datis ſecundum datas rectas, datis cum velocitatibus exeunt, determinare motus.

(i) Ex datis corporum motibus ſub initio, datur uniformis motus centri communis gravitatis, ut & motus ſpatii, quod unà cum hoc centro movetur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales reſpectu hujus ſpatii. Motus autem ſubſequentes (per legum corollarium quintum, & theorema noviſſi-

in locis T, Q ſe mutuò trahunt ſit ut x^m, erit $x^m = \frac{a^m y^m}{b^m}$, adeóque eadem vis etiam ut y^m, ob datam rationem a^m, ad b^m, cumque vis quâ corpora ſe mutuò trahunt æqualis ſit vi quâ ad commune gravitatis centrum C urgentur, erit quoque vis ad C tendens ut y^m. Sit nunc vis quâ corpora ſe mutuò trahunt ut $cx^n + ex^m$, & c, e quantitates datæ, erit $cx^n + ex^m = \frac{ca^n y^n}{b^n} + \frac{ea^m y^m}{b^m}$, ideóque vis ad C tendens ut $\frac{ca^n y^n}{b^n} + \frac{ea^m y^m}{b^m}$.

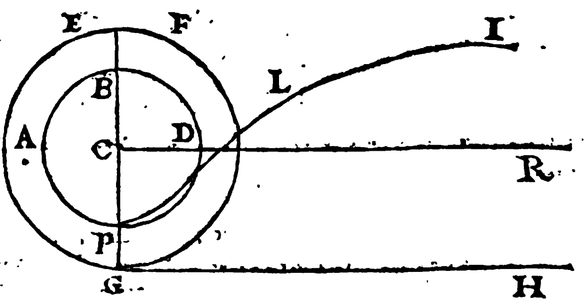
(i) * *Ex datis corporum motibus abſolutis ſub initio, datur uniformis motus abſolutus centri communis gravitatis* (67, 68, 69) *& hinc datur motus ſpatii quod unà cum hoc centro* & eâdem cum illo celeritate *moveretur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales reſpectu hujus ſpatii.*

viſſimum) perinde fiunt in hoc ſpatio, ac ſi ſpatium ipſum unà cum communi illo gravitatis centro quieſceret, & corpora non traherent ſe mutuo, ſed à corpore tertio ſito in centro illo traherentur. Corporis igitur alterutrius in hoc ſpatio mobili, de loco dato ſecundum datam rectam, datâ cum velocitate exeuntis, & vi centripetâ ad centrum illud tendente correpti, (k) determinandus eſt motus per problema nonum & viceſimum ſextum: & (l) habebitur ſimul motus corporis alterius circum idem centrum. (m) Cum hoc motu componendus eſt uniformis ille ſyſtematis ſpatii & corporum in eo gyrantium motus progreſſivus ſupra inventus, & habebitur motus abſolutus corporum in ſpatio immobili. *Q. E. I.*

(k) * *Determinandus eſt motus per probl. 9.* ſi corpora projiciantur ſecundùm directionem quæ cum eorum diſtantia non coincidat, & *per probl. 26.* ſi coincidat directio projectionis cum diſtantiâ corporum.

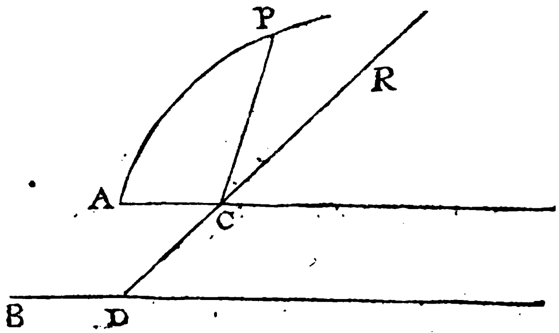
(l) * *Et habebitur ſimul motus corporis alterius* è regione, ſi ex corpore cujus locus inventus eſt, per centrum gravitatis commune duorum, agatur recta quæ ità determinetur ut ſit corpus cujus locus quæritur ad corpus aliud ut diſtantia data hujus à centro gravitatis communi ad eam rectam, in extremo hujus rectæ erit locus corporis quæſitus (60).

(m) 493. *Cum hoc motu componendus eſt &c.* In hypotheſi hujus problematis, corpora duo circà commune gravitatis centrum ceu umbilicum ſectiones conicas deſcribunt (per cor. 2. prop. 58.) & ſatis eſt (ex notâ ſuperiori) unius corporis motum determinare. Itaque, exempli gratia, corpus P circulum P A B D uniformiter deſcribat intereadum circuli centrum C, cum ipſius circuli plano æquabiliter movetur per rectam C R diametro P B perpendicularem, ſitque ſemper circuli planum mobile in plano hujus ſchematis immoto. In linea C P capiatur C G ad C P in ratione velocitatis centri C per lineam C R progredientis, ad velocitatem corporis P in circuli peripheriâ revolventis, rota G E F centro C & radio C G deſcripta ſuper regulam G H ad G C normalem progrediatur revolvendo circà axem ſuum, & punctum P in plano circuli G E F immotum deſcribet intereà trochoidem P L I quæ erit trajectoria quam corpus P motu abſoluto deſcribit; (ut patet ex prop 31. & not. 367). Hâc enim ratione centrum C percurret ſpatium C R = G H = ſemiperipheriæ rotæ G E F, eodem tempore quo punctum P revolvetur per totam ſemiperipheriam P A B; erit que proindè velocitas centri C per lineam C R ad velocitatem puncti vel corporis P in peripheriâ circuli P A B ut ſemirota ad ſemicirculum, hoc eſt, ut radius C G ad radium C P. Hinc ſi velocitas centri C æqualis ſit ve-

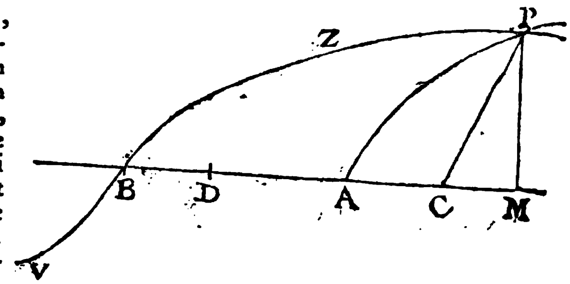


locitati corporis P in circulo ſuo revolventis, trochois P L I erit cyclois vulgaris; ſi velocitas centri C major extiterit, erit P L I trochois oblongata, ſi velocitas centri C minor; erit P L I trochois decurtata.

Sit nunc AP ſectio quævis conica cujus vertex A, umbilicus ſeu virium & gravitatis commune centrum C, axis tranſverſus AC, centrum C uniformiter moveatur in rectâ DR poſitione datâ, & cum illo planum curvæ APC, ità tranſferatur in plano hujus ſchematis immoto, ut axis AC, rectæ BD, poſitione datæ ſit ſemper parallelus. Dum corpus P in curvâ AP revolvens eſt in vertice A, ſit C in D & A in B, ex datâ velocitate uniformi centri C in lineâ DR, dabitur ſpatium DC quod centrum illud C dato tempore deſcribit, nec non poſitio curvæ AP. capiatur (per prop. 30. vel 31. ejuſve ſcholium) area APC rectæ datæ DC ſeu tempori proportionalis & obtinebitur locus abſolutus corporis P, hoc eſt, punctum trajectoriæ quam corpus P in plano hujus ſchematis immoto deſcribit.



Sit AP parabola, & umbilicus C, cum plano APC uniformi motu progrediatur in axe BC, dum corpus P eſt in vertice parabolæ A, ſit umbilicus C in D & vertex A in B, & trajectoria BZP, quam corpus P, in plano hujus chartæ immoto deſcribit erit parabola ſecundi generis quæ cubica dici ſolet. Nam ſit AC, ſeu BD $= p$, & proindè parabolæ AP, latus rectum $= 4p$ (per theor. 2um. de parabola). PM ad axem AB ordinatim applicatâ $= y$, BM $= x$, erit (ex naturâ Parabolæ, per theor. 1um. de Parabolâ) $AM = \frac{yy}{4p}$, adeóque $BA = DC = x - \frac{yy}{4p} = \frac{4px - yy}{4p}$, CM (ſive AM − AC) $= \frac{yy - 4pp}{4p}$. Porrò (ex Archimede prop. 17. de quadr. Parab. quæ eſt theor. 4um. de parabolâ) area $APM = \frac{2}{3} AM \times PM = \frac{2y^3}{12p}$; area trianguli $CPM = \frac{1}{2} CM \times PM = \frac{y^3 - 4ppy}{8p}$; undè area $APC = APM - CPM = \frac{y^3 + 12ppy}{24p}$. Eſt autem area

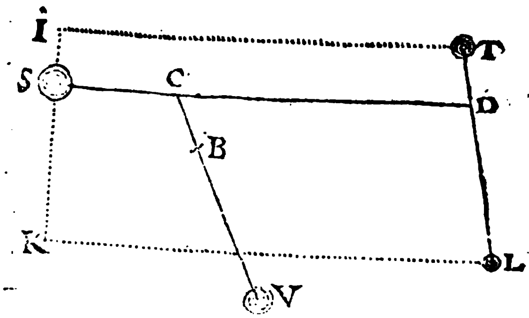


APC, tempori quo deſcribitur proportionalis, ſeu ut linea DC vel $BA = \frac{4px - yy}{4p}$, quarè ſi fuerit $\frac{a}{b}$ quantitas conſtans, erit $\frac{y^3 + 12ppy}{24p} = \frac{4apx - ayy}{24p}$, hoc eſt $y^3 + ayy + 12ppy = 4apx$, æquatio ad parabolam cubicam BZP, quæ crura habet contraria BZ, BV in infinitum progredientia.

PRO.

PROPOSITIO LXIV. PROBLEMA XL.

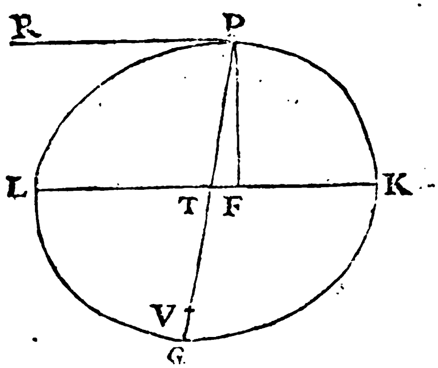
Viribus quibus corpora ſe mutuo trahunt creſcentibus in ſimplici ratione diſtantiarum à centris: requiruntur motus plurium corporum inter ſe.



Ponantur primo corpora duo *T* & *L* commune habentia gravitatis centrum *D*. Deſcribent hæc (per corollarium primum theorematis 21.) ellipſes centra habentes in *D*, quarum magnitudo (n) ex problemate v. innoteſcit.

Trahat jam corpus tertium *S* priora duo *T* & *L* viribus acceleratricibus *ST*, *SL*, & ab ipſis viciſſim trahatur. Vis *ST*, (per legum corol. 2.) reſolvitur in vires *SD*, *DT*; & vis *SL* in vires *SD*, *DL*. Vires (o) autem *DT*, *DL*, quæ ſunt

(n) 494. *Ex problemate* 5. *innoteſcit.* Si enim corpus aliquod de loco dato P exeat cum datâ velocitate & ſecundum datam directionem PR ut ellipſim PLGK, circà centrum T datum deſcribat, recta PR poſitione datâ ellipſim tanget in P, ideòque diameter LK, ipſi PR parallela (prop. 32. Lib 1. conic. Appoll. ſive Lem. IV. de Conic. & Theor. I. de Ell.) dabitur poſitione. Prætereà, ſi ex puncto P ad diametrum LK demittatur perpendiculum PF, erit vis centripeta data quâ corpus verſus T urgetur ſecundum directionem PT ad partem vis illius quæ juxtà directionem PF, agit, ut PT ad PF, proindèque pars illa vis centripetæ dabitur. Datâ autem vi centripetâ juxtà directionem PF urgente, datâque corporis de loco P exeuntis velocitate in lineâ PR, ad PF perpendiculari, dabitur radius circuli ellipſim oſculantis in P, quam corpus P cum hâc velocitate atque vi centripetâ poteſt deſcribere (199.) & hinc dabitur altera dia-

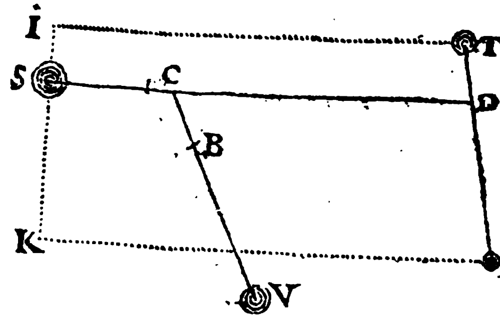


meter conjugata LK, & ellipſis deſcribi poterit (vide Probl. de Ellipſi p. 130).

(o) * *Vires autem DT, DL, quæ ſunt ut ipſarum ſumma TL &c.* Eſt enim DT ad TL in ratione datâ corporis L ad ſummam corporum T+L, & DL ad TL, in ratione datâ corporis T ad ſummam corporum T+L (60); quarè vires DT, DL, in quâcumque poſitione corporum T & L, ſunt ut TL.

DE MOTU CORPORUM.

ſunt ut ipſarum ſumma *TL*, atque ideo ut vires acceleratrices quibus corpora *T* & *L* ſe mutuo trahunt, additæ his viribus corporum *T* & *L*, prior priori & poſterior poſteriori, componunt vires diſtantiis *DT* ac *DL* proportionales, ut prius, ſed viribus prioribus majores; ideoque (per corol. 1. prop. x. & corol. 1. & 8. prop. IV.) efficiunt ut corpora illa deſcribant ellipſes ut prius, ſed motu celeriore.



Vires reliquæ acceleratrices *SD* & *SD*, (p) actionibus motricibus *SD*×*T* & *SD*×*L*, quæ ſunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter & ſecundum lineas *TI*, *LK*, ipſi *DS* parallelas, nil mutant ſitus eorum ad invicem, ſed faciunt ut ipſa æqualiter accedant ad lineam *IK*; quam ductam concipe per medium corporis *S*, & lineæ *DS* perpendicularem. Impedietur autem iſte ad lineam *IK* acceſſus (q) faciendo ut ſyſtema corporum *T* & *L* ex unâ parte, & corpus *S* ex alterâ, juſtis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum *C*. (r) Tali motu corpus *S*, eo quod ſumma virium motricium *SD*×*T* & *SD*×*L*, diſtantiæ *CS* proportionalium, tendit verſus centrum *C*, deſcribit ellipſin circa idem *C*;

(p) * *Actionibus motricibus* SD×*T*, *&* SD×L (per def. 8. & not. 12.) *quæ ſunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter* ob æqualem vim acceleratricem SD, ut fit in corporibus gravibus, quæ licet maſſis inæqualia, vi tamen gravitatis acceleratrice, cadendo æqualiter accelerantur.

(q) * *Faciendo ut ſyſtema corporum T, & L,* (ſeu D centrum gravitatis commune ipſorum) *ex unâ parte*, & *corpus S ex alterâ, juſtis cum velocitatibus* in dato plano ſecundum directiones parallelas & contrarias impreſſis *gyrentur circà C commune gravitatis centrum trium corporum.*

(r) * *Tali motu corpus S &c.* Corpus S à corporibus T & L trahitur viribus quæ ſunt inter ſe ut ST × T & SL × L (ex hyp.) & per reſolutionem virium corpus S a corporibus T & L verſus D & C juxtà directionem SD ſeu SC trahitur viribus quæ ſunt inter ſe ut SD×T & SD×L, hoc eſt, vi quæ eſt ut $SD\times\overline{T+L}$, adeóque ut SD, ob datam corporum ſummam T+L, & ut CS, ob datam rationem SD ad CS, (61). Corpus idem S juxtà directiones oppoſitas ipſis DT, DL parallelas, trahitur viribus quæ ſunt inter ſe ut DT×T & DL×L, hoc eſt, viribus æqualibus (60) quæ proinde nullam

C; & punctum D, ob proportionales CS, CD, deſcribet ellipſin conſimilem è regione. Corpora autem T & L viribus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, prius priore, poſterius poſteriore, æqualiter & ſecundum lineas parallelas TI & LK, ut dictum eſt, attracta, pergent (per legum corollarium quintum & ſextum) circa centrum mobile D ellipſes ſuas deſcribere, ut prius. *Q. E. I.*

LIBER PRIMUS. PROP. LXIV. PROBL. XL.

Addatur jam corpus quartum V, & (s) ſimili argumento concludetur hoc & punctum C ellipſes circa omnium commune centrum gravitatis B deſcribere; manentibus motibus priorum corporum T, L & S circa centra D & C, ſed acceleratis. Et eâdem methodo corpora plura adjungere licebit. *Q. E. I.*

(t) Hæc ita ſe habent, etſi corpora T & L trahunt ſe mutuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus quam quibus trahunt corpora reliqua pro ratione diſtantiarum. Sunto mutuæ omnium attractiones acceleratrices ad invicem ut diſtantiæ ductæ in corpora trahentia, & (u) ex præcedentibus facilè deducetur quod corpora omnia æqualibus temporibus periodicis ellipſes varias, circa omnium commune gravitatis centrum B, in plano immobili deſcribunt. *Q. E. I.*

PRO-

lam mutationem producunt. Quarè cum ſyſtema corporum T & L, ſeu ipſorum commune centrum gravitatis D, verſus S ſeu C trahatur quoque vi quæ eſt ut SD, ac proindè ut CD (61), patet quod corpus S, ex unâ parte, & punctum D ex alterâ deſcribant circum C ellipſes conſimiles, ſi juſtis cum velocitatibus, ut ſuprà dictum eſt, projiciantur.

(s) * *Simili argumento*, conſiderando corpora T & L tanquam corpus unicum in centro D poſitum, *concludetur* &c.

(t) * *Hæc ità ſe habent.* Nam propoſitionis demonſtratio non ſupponit vires acceleratrices quibus corpora T & L ad diſtantiam datam trahunt corpus S, eſſe æquales viribus acceleratricibus quibus ſe mutuò ad eandem diſtantiam trahunt. Undè manet demonſtratio, etſi corpus S a corpore v. gr. T ad diſtantiam datam trahatur majori vel minori vi acceleratrice quam corpus L ad eandem diſtantiam.

(u) * *Et ex præcedentibus facilè deducetur.* Vis enim ſeu actio acceleratrix, quâ corpus T verſus D trahitur, eſt (ex Dem. & Hyp.) ut $TL \times L + TD \times S$, hoc eſt, ut $TD \times \overline{S+T+L}$, ob $TL \times L = TD \times \overline{T+L}$ (60); & vis acceleratrix quâ punctum D versùs C trahitur, eſt (ex Dem. & Hyp.) ut $SD \times S$, hoc eſt ut $CS \times S + CD \times S$; ſed (61) $CS \times S = CD \times \overline{T+L}$, adeóque vis acceleratrix quâ punctum D versùs C trahitur, eſt ut $CD \times \overline{T+L+S}$. Quarè vis acceleratrix quâ corpus T versùs D trahitur, eſt ad

De Motu Corporum.

PROPOSITIO LXV. THEOREMA XXV.

Corpora plura, quorum vires decreſcunt in duplicatâ ratione diſtantiarum ab eorundem centris, moveri poſſe inter ſe in ellipſibus; & radiis ad umbilicos ductis areas deſcribere temporibus proportionales quam proximè.

In propoſitione ſuperiore demonſtratus eſt caſus ubi motus plures peraguntur in ellipſibus accuratè. Quo magis recedit lex virium a lege ibi poſitâ, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus; neque fieri poteſt, ut corpora, ſecundum legem hic poſitam ſe mutuo trahentia, moveantur in ellipſibus accuratè, niſi ſervando certam proportionem diſtantiarum ab invicem. In ſequentibus autem caſibus non multùm ab ellipſibus errabitur.

Caſ. 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod ad varias ab eo diſtantias revolvi, tendantque ad ſingula vires abſolutæ proportionales iiſdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per legum corol. quartum) vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva eſſe, ut corpus maximum nunquam diſtet ſenſibiliter ab hoc centro: & maximum illud vel quieſcet, vel movebitur uniformiter in directum, ſine errore ſenſibili; minora autem revolventur circa hoc maximum in ellipſibus, atque radiis ad idem ductis deſcribent areas temporibus proportionales; (y) niſi quâtenus errores inducuntur, vel per errorem maximi

ad vim acceleratricem quâ punctum D trahitur versùs C, ut TD ad CD, hoc eſt ut diſtantiæ à punctis ad quæ illæ vires diriguntur. Corpus igitur T ad punctum D, & punctum D ad C trahuntur viribus abſolutis æqualibus, hoc eſt, eodem modo ad ſua reſpectivè centra D & C trahuntur quo traherentur, ſi circà idem virium centrum ad diſtantias TD, DC revolverentur, ſed in hoc caſu æqualibus temporibus periodicis ellipſes ſuas deſcriberent (per cor. 2. prop. X.) ergò & in illo caſu corpus T circà D & punctum D circà C, æqualibus temporibus periodicis ſuas ellipſes deſcribunt. Idem eodem modo demonſtratur, cùm plura ſunt corpora revolventia.

(y) * *Niſi quatenus errores inducuntur &c.* Nam ſi corpus maximum à communi illo gravitatis centro non erraret, nullaque eſſet actio minorum corporum in ſe mutuò, quodlibet exiguum corpus revolveretur in ellipſi circà maximum, atque radiis ad idem ductis deſcriberet areas temporibus proportionales (per cor. 2. & 3. prop. 58.).

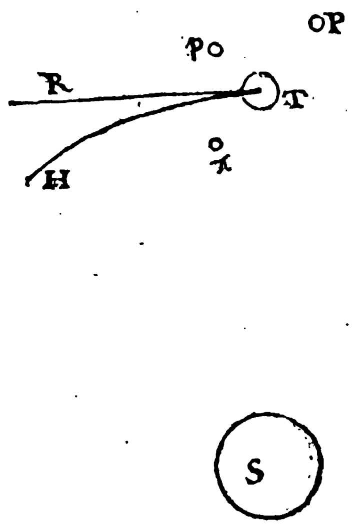
ximi à communi illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in ſe mutuo. Diminui autem poſſunt corpora minora, uſque donec error iſte, & (z) actiones mutuæ ſint datis quibuſvis minores; atque ideo donec orbes cum ellipſibus quadrent, & areæ reſpondeant temporibus, ſine errore, qui non ſit minor quovis dato. *Q. E. O.*

LIBER PRIMUS. PROP. LXV. THEOR. XXV.

Caſ. 2. (a) Fingamus jam ſyſtema corporum minorum modo jam deſcripto circa maximum revolventium, aliudve quodvis duorum circum ſe mutuò revolventium corporum ſyſtema progredi uniformiter in directum, & interea vi corporis alterius longè maximi & ad magnam diſtantiam ſiti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora ſecundum lineas parallelas urgentur, non mutant ſitus corporum ad invicem, ſed ut ſyſtema totum, ſervatis partium motibus inter ſe, ſimul transferatur, efficiunt: manifeſtum eſt quod, ex attractionibus in corpus maximum, nulla prorſus orietur mutatio motus attractorum inter ſe, niſi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem: ſecundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones

(z) * *Et actiones mutuæ ſint datis quibuſvis minores* reſpectu actionis corporis maximi in corpora minora; nam cum corporis vis attractiva abſoluta hic ſupponatur materiæ proportionalis, diminutâ corporis maſſâ, vis attractiva in eâdem ratione minuitur.

(a) * *Fingamus jam corporum minorum, P, p, π, modo jam deſcripto circà maximum T revolventium ſyſtema progredi uniformiter in directum*, ſeu totius ſyſtematis commune gravitatis centrum T, progredi uniformiter per rectam TR, *& intereà vi corporis alterius longè maximi S, & ad magnam diſtantiam ſiti, urgeri ad latus* ſecundum rectas PS, ps, πS, TS, atque à rectâ TR retrahi & in curvam TH cogi &c.



nes omnes acceleratrices in corpus maximum eſſe inter ſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum; & augendo corporis maximi diſtantiam, donec rectarum ab hoc ad reliqua ductarum differentiæ reſpectu earum longitudinis & inclinationes ad invicem minores ſint, quam datæ quævis; perſeverabunt motus partium ſyſtematis inter ſe ſine erroribus, qui non ſint quibuſvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem diſtantiam, ſyſtema totum ad modum corporis unius attrahitur; movebitur idem hâc attractione ad modum corporis unius; hoc eſt, (b) centro ſuo gravitatis deſcribet circa corpus maximum ſectionem aliquam conicam (*viz.* (c) Hyperbolam vel parabolam attractione languidâ, ellipſin fortiore) & radio ad maximum ducto deſcribet areas temporibus proportionales, ſine ullis erroribus, niſi quas partium diſtantiæ, perexiguæ ſane & pro lubitu minuendæ, valeant efficere. *Q. E. O.*

Simili argumento pergere licet ad caſus magis compoſitos in infinitum.

Corol. 1. (d) In caſu ſecundo, quo propiùs accedit corpus omnium maximum ad ſyſtema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium ſyſtematis inter ſe; propterea quod linearum à corpore maximo ad has ductarum jam major eſt inclinatio ad invicem, majorque proportionis inæqualitas.

Corol. 2. Maximè autem turbabuntur, ponendo quod attractiones acceleratrices partium ſyſtematis, verſus corpus omnium maximum, (e) non ſint ad invicem reciprocè ut quadra-

(b) * *Hoc eſt, centro ſuo gravitatis*, in quo totum ſyſtema gravium P, p, π, T, unitum ac contractum intelligitur (71).

(c) * *Hyperbolam vel parabolam attractione languidâ, ellipſim* vel circulum *fortiore*; manente enim velocitate corporis circà centrum virium S projecti, & circulum vel ellipſim deſcribentis minui debet illius ad centrum S attractio, ut ad eandem diſtantiam poſſit Parabolam deſcribere, & magis adhuc decreſcere illam attractionem oportet, ut deſcribat Hyperbolam (per cor. 7. prop. 16. & Dem. prop. 17).

(d) * *In caſu 2°. quo propiùs accedit corpus omnium maximum ad ſyſtema duorum vel plurium corporum*, eò *magis* recedit à caſu ubi perturbatio eſt nulla, nempè quandò corpus S infinitè diſtat, ergò eò *magis turbabuntur motus partium ſyſtematis inter ſe.*

(e) * *Non ſint ad invicem reciprocè &c.* Exempli causâ; Si corpora P, p, diverſis legibus traherentur, P, v. gr. in ratione reciprocâ quadrati diſtantiæ ſuæ à corpore maximo S; p verò in ratione cubi diſtantiæ.

* Prae-

ta diſtantiarum à corpore illo maximo; (f) præſertim ſi proportionis hujus inæqualitas major ſit quam inæqualitas proportionis diſtantiarum à corpore maximo. Nam ſi vis acceleratrix, æqualiter & ſecundum lineas parallelas agendo, perturbat motus inter ſe, neceſſe eſt, ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorque ſit, vel minor pro majore, vel minore inæqualitate. Exceſſus impulſuum majorum, agendo in aliqua corpora & non agendo in alia, neceſſariò mutabunt ſitum eorum inter ſe. Et hæc perturbatio, addita perturbationi, quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

Corol. 3. Unde ſi ſyſtematis hujus partes in ellipſibus, vel circulis ſine perturbatione inſigni moveantur; manifeſtum eſt, quod eædem à viribus acceleratricibus, ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur niſi leviſſimè, aut urgentur æqualiter, & ſecundum lineas parallelas quamproximè.

PROPOSITIO LXVI. THEOREMA XXVI.

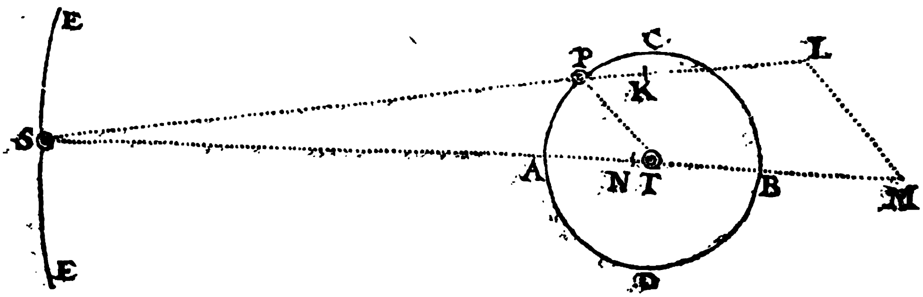
Si corpora tria, quorum vires decreſcunt in duplicatâ ratione diſtantiarum, ſe mutuo trahant; & attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium ſint inter ſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: dico quod interius circa intimum & maximum, radiis ad ipſum ductis, deſcribet areas temporibus magis proportionales, & figuram ad formam ellipſeos umbilicum in concurſu radiorum habentis magis accedentem, ſi corpus maximum his attractionibus agitetur, quam ſi maximum illud vel à minoribus non attractum quieſcat, vel multò minus vel multò magis attractum, aut multò minus aut multò magis agitetur.

Liquet ferè ex demonſtratione corollarii ſecundi propoſitionis præ-

(f) * *Præſertim ſi proportionis hujus inæqualitas &c.* Exempli causâ, ſi inæqualitas attractionum acceleratricum in corporibus P, p, major ſit inæqualitate diſtantiarum SP, Sp; Nam ſi illæ inæqualitates attractionum & diſtantiarum eſſent in datâ ratione, evaneſcente diſtantiarum SP, Sp differentiâ, quando corpus maximum S longiſſimè diſtat, evaneſceret quoque attractionum acceleratricum inæqualitas.

præcedentis; ſed argumento magis diſtincto & latius cogente ſic evincitur.

Caſ. 1. Revolvantur corpora minora *P* & *S* in eodem plano circa maximum *T*, quorum *P* deſcribat orbem interiorem *PAB*, & *S* exteriorem *ESE*. Sit *SK* mediocris diſtantia corporum P & *S*; & corporis *P* verſus *S* attractio acceleratrix, in mediocri illâ diſtantiâ, exponatur per eandem. In duplicatâ ratione *SK* ad *SP* capiatur *SL* ad *SK*, & (g) erit *SL* attractio acceleratrix corporis *P* verſus *S* in diſtantiâ quâvis *SP*. Junge *PT*, eique parallelam age *LM* occurrentem *ST* in *M*;



& attractio *SL* reſolvetur (per legum corol. 2.) in attractiones *SM*, *LM*. Et ſic urgebitur corpus *P* vi acceleratrice triplici. Vis una tendit ad *T*, & oritur à mutuâ attractione corporum *T* & *P*. Hâc vi ſolâ corpus *P* circum corpus *T*, ſive immotum, ſive hâc attractione agitatum, deſcribere deberet & areas, radio *PT*, temporibus proportionales, & ellipſin cui umbilicus eſt in centro corporis *T*. Patet hoc per prop. XI. & corollaria 2. & 3. theor. XXI. Vis altera eſt attractionis *LM*, quæ quoniam tendit à *P* ad *T*, ſuperaddita vi priori coincidet cum ipsâ, & ſic faciet ut areæ etiamnum temporibus proportionales deſcribantur per corol. 3. theor. XXI. At (h) quoniam non eſt quadrato diſtantiæ *PT* recipro-

(g) * *Et erit SL attractio acceleratrix &c.* Eſt enim (ex Hyp.) ut SP^2 ad SK^2 itâ attractio acceleratrix in K (quam exhibet linea SK) ad attractionem acceleratricem in P, quam proindè exhibebit linea SL.

(h) 495. *At quoniam non eſt quadrato diſtantiæ PT reciprocè proportionalis*; Eſt enim (ex conſtr.) $SK^2 : SP^2 = SL : SK$, adeóque $SK^3 : SP^3 = SL \times SK : SK \times SP = SL : SP$. Sed ob triangula MLS, TPS ſimi-

cè proportionalis, componet ea cum vi priore vim ab hâc proportione aberrantem, idque eo magis, quo major eſt proportio hujus vis ad vim priorem, cæteris paribus. Proinde cum (per prop. XI. & per corol. 2. theor. XXI.) vis, quâ ellipſis circa umbilicum *T* deſcribitur, tendere debeat ad umbilicum illum, & eſſe quadrato diſtantiæ *PT* reciprocè proportionalis; vis illa compoſita, aberrando ab hâc proportione, faciet ut orbis *PAB* aberret à formâ ellipſeos umbilicum habentis in *T*; idque eo magis; quo major eſt aberratio ab hâc proportione; atque ideo etiam quo major eſt proportio vis ſecundæ *LM* ad vim [redacted] primam, cæteris paribus. Jam vero vis tertia *SM*, trahendo corpus *P* ſecundum lineam ipſi *ST* parallelam, componet cum prioribus vim, quæ non amplius dirigitur à *P* in *T*; quæque ab hâc determinatione tanto magis aberrat, quanto major eſt proportio hujus tertiæ vis ad vires priores, cæteris paribus: atque ideo quæ faciet ut corpus *P*, radio *TP*, areas non amplius temporibus proportionales deſcribat; atque ut aberratio ab hâc proportionalitate tanto major ſit, quanto major eſt proportio vis hujus tertiæ ad vires cæteras. Orbis vero *PAB* aberrationem à formâ ellipticâ præfatâ hæc vis tertia duplici de causâ adaugebit, tum quod non dirigatur à *P* ad T, (i) tum etiam quod non ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ *PT*. Quibus intellectis, manifeſtum eſt, quod areæ temporibus tum maximè fiunt proportionales, ubi vis tertia, manentibus viribus cæteris, fit minima; & quod orbis *PAB* tum maximè accedit ad præfatam formam ellipticam, ubi vis tam ſecunda quam tertia, ſed præcipuè vis tertia fit minima, vi primâ manente.

LIBER PRIMUS. PROP. LXVI. THEOR. XXVI.

Exponatur corporis *T* attractio acceleratrix verſus *S* per lineam

ſimilia SL:SP = LM:PT; ergò LM:PT = SK³:SP³, & proinde vis LM eſt ut $\frac{SK^3 \times PT}{SP^3}$, ſeu datâ SK, ut $\frac{PT}{SP^3}$; undè creſcente diſtantiâ PT creſcit vis LM.

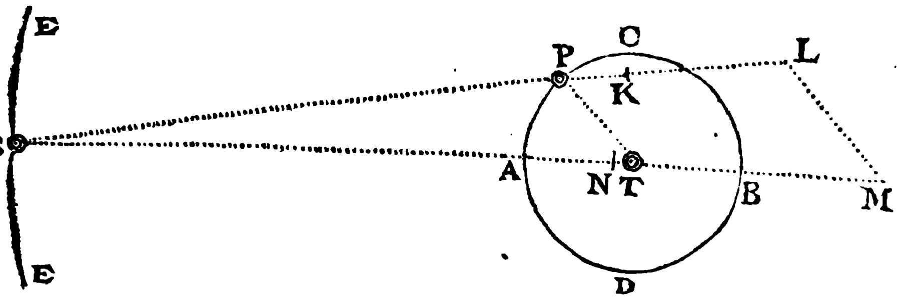
(i) 496. *Tum etiam quod non ſit reciprocè proportionalis &c.* Nam PT eſt ad ST ut vis LM eſt ad vim SM, ſed (495) vis LM eſt ut $\frac{SK^3 \times PT}{SP^3}$, & proindè vis SM eſt ut $\frac{SK^3 \times ST}{SP^3}$. Quarè vis SM, datis SK & ST, eſt ut $\frac{1}{SP^3}$.

neam SN; & ſi attractiones acceleratrices SM, SN æquales eſſent; hæ, trahendo corpora T & P æqualiter & ſecundum lineas parallelas, nil mutarent ſitum eorum ad invicem. Iidem jam forent corporum illorum motus inter ſe (per legum corol. VI.) ac ſi hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione ſi attractio SN minor eſſet attractione SM, tolleret ipſa attractionis SM partem SN, & maneret pars ſola MN, quâ temporum & arearum proportionalitas & orbitæ forma illa elliptica perturbaretur. Et ſimiliter ſi attractio SN major eſſet attractione SM, oriretur ex differentiâ ſolâ MN perturbatio proportionalitatis & orbitæ. Sic per attractionem SN reducitur ſemper attractio tertia ſuperior SM ad attractionem MN, attractione primâ & ſecundâ manentibus prorſus immutatis: & propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, & orbita PAB ad formam præfatam ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio MN vel nulla eſt, vel quam fieri poſſit minima; hoc eſt, ubi corporum P & T attractiones acceleratrices, factæ verſùs corpus S, accedunt quantùm fieri poteſt ad æqualitatem; id eſt, ubi attractio SN non eſt nulla, neque minor minimâ attractionum omnium SM, ſed inter attractionum omnium SM maximam & minimam quaſi mediocris; hoc eſt, non multo major neque multo minor attractione SK. *Q. E. D.*

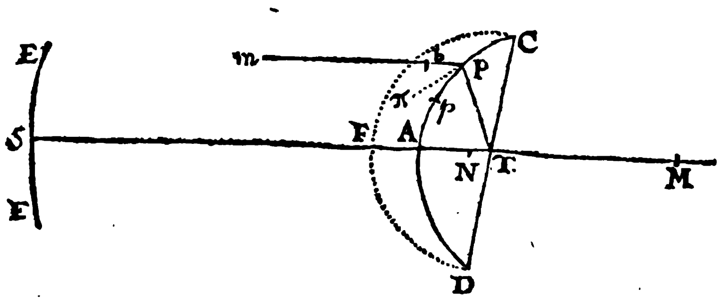
Caſ. 2. (k) Revolvantur jam corpora minora P, S circa maximum T in planis diverſis; & vis LM, agendo ſecundum lineam PT in plano orbitæ PAB ſitam, eundem habebit effectum ac prius, neque corpus P de plano orbitæ ſuæ deturbabit.

(k) 497. *Caſ.* 2. Planum TESE cum hujus ſchematis plano congruere ſupponatur, orbitæ verò PAB planum alterâ ſui parte, v. gr. CAD ſuprà planum TESE eminere, & altera parte DBC infrà planum TESE deprimi intelligatur, linea recta DC communis planorum TESE & PAB interſectio, linea nodorum dicitur, & illius extrema puncta D & C nodi appellantur. Nodi vel puncta quævis D, C dicuntur eſſe in quadraturis ſeu aſpectum quadratum obtinere reſpectu corporis S, dum ſunt in lineâ rectâ ad ST in puncto T perpendiculari, quod in hoc caſu corpus S & punctum C vel D ſub angulo recto de loco T videantur. Si ſuper lineâ ST erectum intelligatur planum plano TESE verticale, ſintque puncta A & B in illo plano verticali, A quidem inter corpora S & T; B verò ultrà T, punctum A dicitur eſſe in conjunctione, & punctum B in oppoſitione reſpectu corporum S & T; & loca A & B, communi nomine ſyzigiæ vocantur. Motus in longitudinem eſt quo cor-

bit. (1) At vis altera NM, agendo ſecundum lineam quæ ipſi ST parallela eſt (atque ideo, quando corpus S verſatur ex-



tra lineam nodorum, inclinatur ad planum orbitæ PAB) præter perturbationem motus in longitudinem jam ante expoſitam, indu-



corpus revolvens P à puncto ſuæ orbitæ dato, v. gr. à puncto C recedit per CPADB: motus in latitudinem eſt is quo corpus revolvens P ad planum immotum TESE accedit vel ab eo recedit. Si corporum revolventium P & S motus inter ſe conferantur, & utrumque in eandem plagam feratur; v. gr. ab Occidente in Orientem, motus in conſequentia fieri dicitur; ſi verò alterum in unam plagam, alterum in alteram moveatur, motus unius in conſequentia alterius vocatur in antecedentia, v. gr. motus ab Oriente in Occidentem in antecedentia fieri dicetur.

(1) * *At vis altera NM &c.* Si orbitæ PAB (vid. fig. Newt.) pars ACB ſuprà planum TESE elevata, pars verò altera ADB infrà ipſum depreſſa intelligatur, ita ut linea nodorum AB coincidat cum lineâ TS ſitque proinde corpus S in lineâ nodorum productâ, vis NM ut potè quæ in corpus P agit ſecundùm lineam ipſi TS parallelam, jacebit in plano orbitæ PAB, & motum corporis P in latitudinem non perturbabit, hoc eſt, non efficiet ut corpus P ad planum TESE magis accedat aut ab eo recedat. Verùm ſi corpus S verſatur extrà lineam nodorum, vis NM inducet perturbationem motûs in latitudinem. Sit enim CADT pars orbitæ quam corpus P excluſâ vi NM deſcriberet ſuprà planum TESE ſeu CFD eminens, ſit CD linea nodorum, Pm recta æqualis & parallela NM, p locus ad quem corpus P excluſâ vi NM tempuſculo minimo perveniret, b locus in lineâ Pm ad quem corpus idem P, ſolâ vi NM, eodem tempuſculo traherentur; corpus illud P duabus viribus impulſum, quarum altera agit ſecundùm directionem Pp in plano CAD altera ſecundùm directionem Pm ad planum CAD inclinatam, motu compoſito deſcribet lineam Pπ quæ non eſt in plano CAD.

inducet perturbationem motus in latitudinem, trahendo corpus *P*, de plano ſuæ orbitæ. Et hæc perturbatio, in dato quovis corporum *P* & *T* ad invicem ſitu, erit ut vis illa generans *MN*, ideoque minima evadet ubi *MN* eſt minima, hoc eſt (uti jam expoſui) ubi attractio *SN* non eſt multo major, neque multo minor attractione *SK*. *Q. E. D.*

Corol. 1. (n) Ex his facilè colligitur, quod, ſi corpora plura minora *P*, *S*, *R*, &c. revolvantur circa maximum *T*, motus corporis intimi *P* minimè perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum *T* pariter à cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitatur, atque cætera a ſe mutuo.

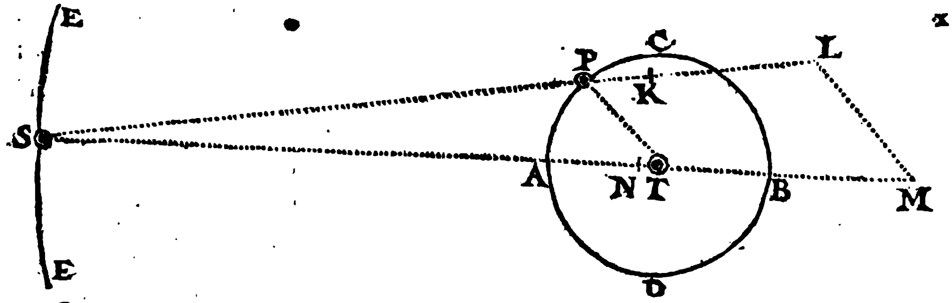
Corol. 2. In ſyſtemate vero trium corporum *T*, *P*, *S*, ſi attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium ſint ad invicem reciprocè ut quadrata diſtantiarum; corpus *P*, radio *PT*, aream circa corpus *T* velocius deſcribet prope conjunctionem *A* & oppoſitionem *B*, quam prope quadraturas *C*, *D*. Namque vis omnis qua corpus *P* urgetur & corpus *T* non urgetur, quæque non agit ſecundum lineam *PT* accelerat vel retardat deſcriptionem areæ, perinde ut ipſa in conſequentia vel in antecedentia dirigitur. (o) Talis eſt vis *NM*. Hæc in tranſitu corporis *P* à *C* ad *A* tendit in conſequentia, motumque accele-

(n) * *Corollarium primum* patet ex demonſtratis cum duo tantum ſunt corpora minora P, S; addatur enim tertium corpus R, eodem modo demonſtrabitur motum corporis intimi P minimè perturbari attractione ipſius R, ubi corpus maximum T pariter attrahitur à corpore illo R, ac corpus P, & ità de pluribus corporibus ratiocinari licet. Quarè ex demonſtratis *facilè colligitur quod ſi &c.*

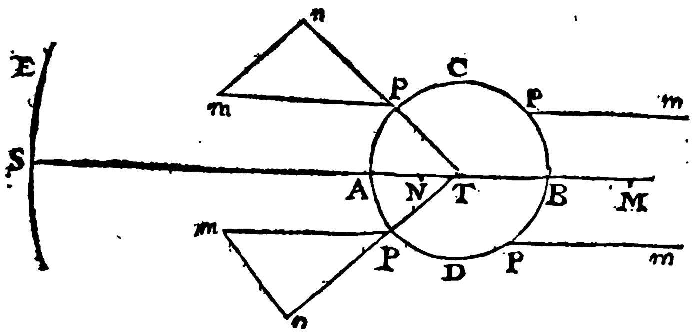
(o) 498. *Talis eſt vis NM.* Si ſupponamus orbem CADB (vid. fig. Newt.) eſſe circulo finitimum, & diſtantiam SD maximam reſpectu radii PT, erit ferè SC = SK = ST = SN, & proinde NM = TM. Porrò corpore P in quadraturis C, D verſante, eſt SC = SP = SK; quarè cum ſit (per conſtr. prop. 66.) SL : SK = $SK^2 : SP^2$, erit in quadraturis SL = SK = SC, & LM coincidet cum CT ſeu PT, adeóque evaneſcet TM ſeu NM. Nulla igitur erit virium SM, SN, in quadraturis differentia, & ideò corpus P reliquis viribus ad centrum T tendentibus agitatum, radio vectore areas ibi deſcribet temporibus proportionales. At ubi corpus P extrà quadraturas eſt in hemiperipheriâ CAD, vis SM major eſt vi SN & corpus P virium differentiâ NM trahitur ſecundùm directionem ipſi TS parallelam.

Sit Pm æqualis & parallela ipſi NM, & demiſſo ex m in radium TP producto perpendiculo mn, vis Pm, ſeu NM, in duas vires Pn, nm reſolvitur, quarum altera Pn trahendo ſecundùm directionem radii TP, corporis P motum in longitudinem nihil mutat, nec æquabilem arearum deſcriptionem turbat; altera verò nm trahendo ſecundum directionem nm, radio TP perpendicularem, hoc eſt, ſecundum directionem tangentis in P, motum in longitudinem accelerat in primo qua-

rat; dein uſque ad *D* in antecedentia, & motum retardat; tum in conſequentia uſque ad *B*, & ultimo in antecedentia tranſeundo à *B* ad *C*.



Corol. 3. Et eodem argumento patet quod corpus *P*, cæteris paribus, velocius movetur in conjunctione & oppoſitione quam in quadraturis. *Co-*

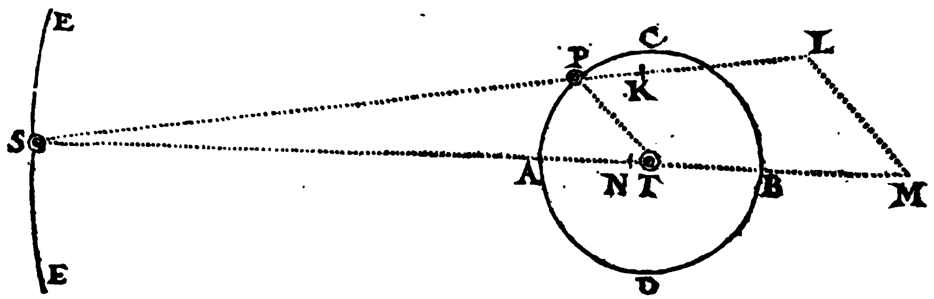


quadrante C A retardat in ſecundo quadrante A D.

In alterâ hemiperipheriâ D B C, vis S M minor eſt vi S N, quoniam corpus P à corpore S longius diſtat quam corpus T, unde ſi vires perturbantes ad ſolum corpus P referantur, virium S M, S N differentia N M negativa ſeu ablatitia erit, aut quod idem eſt, contrariâ directione aget; Fingatur enim corpora T & P urgeri ambo vi S N ubique æquali & ſibi parallela, pergent moveri inter ſe quaſi omnino abeſſet illa vis per Cor. 6. Legum motûs, tum trahatur corpus P vi N M ſecundum directionem oppoſitam vi S N, ex eâ actione mutabuntur motus corporum T & P inter ſe, ſed etiam ex eâ actione vis S N quæ trahere corpus P fingebatur, reducetur ad vim S M quæ eſt vis reverâ agens dum vis S N agit in T, ergo ſi æſtimentur motus corporum T & P inter ſe, quaſi corpus P in hemiperipheriâ D B C urgeretur virium differentia N M in contrariam partem agente, obtinebuntur veræ mutationes motuum corporum T & P inter ſe, ex actionibus S N & S M ortæ, ideoque in poſterum conſiderabitur corpus P in hemiperipheriâ DBC quaſi urgeretur vi NM ſecundum directionem P m ipſi N M parallelam à P. versùs m agente; atque ideo, ſi vis P m in duas vires, ut in alterâ hemiperipheriâ factum eſt, reſolvatur, manifeſtum erit motum in longitudinem in quadrante D B accelerari & in quadrante B C retardari.

De Motu Corporum.

Corol. 4. Orbita corporis *P*, cæteris paribus, curvior eſt in quadraturis quam in conjunctione & oppoſitione. Nam corpora velociora minus deflectunt à recto tramite. Et (p) præterea vis *KL*, vel *NM*, in conjunctione & oppoſitione contraria eſt vi, quâ corpus *T* trahit corpus *P*; ideoque vim illam minuit; corpus autem *P* minus deflectet à recto tramite ubi minus urgetur in corpus *T*.



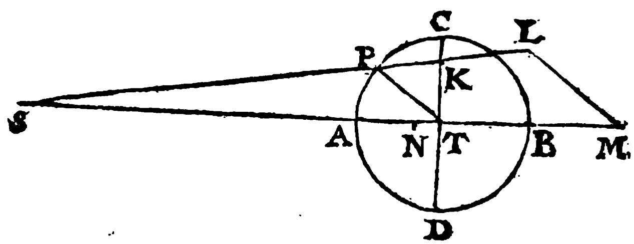
Corol. 5. (q) Unde corpus *P*, cæteris paribus, longius recedet à corpore *T* in quadraturis, quam in conjunctione & oppoſitione. Hæc ita ſe habent excluſo motu excentricitatis. Nam ſi orbita corporis *P* excentrica ſit, excentricitas ejus (ut mox in hujus corol 9. oſtendetur) evadet maxima ubi apſides ſunt in ſyzygiis; indeque fieri poteſt ut corpus *P*, ad apſidem ſummam appellens, abſit longius à corpore *T* in ſyzygiis quam in quadraturis.

Corol. 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis *T*, quâ corpus *P* retinetur in orbe ſuo, augetur in quadraturis per additio-

(p) 499. *Et præterea vis KL &c.* Iiſdem poſitis quæ in notâ ſuperiori, rectæ SL, SM ſunt fere parallelæ, ac proinde TM = PL & LM = PT quam proximè; quarè coincidente P cum A & K cum T, fit LM = AT = PK, & NM ſeu TM = PL = AT + KL, & NM − LM = KL, hoc eſt, vis tota perturbans quâ corpus P in conjunctione A à corpore T verſus S retrahitur, eſt ut KL quam proximè; vi enim LM trahitur P verſus T & vi NM à corpore T verſus S retrahitur. Idem eodem modo demonſtratur, corpore P in oppoſitione B poſito.

(q) * *Undè corpus P &c.* Nam cum orbita corporis P curvior ſit in quadraturis C vel D quam in ſyzigiis A & B (per cor. 4.) neceſſe eſt, cæteris paribus, ut in ſyzigiis A & B depreſſior ſit quam in quadraturis C & D ad inſtar ellipſeos cujus ſit centrum T axis major CD axis minor AB. Hæc ità ſe habent, ſi, excluſis viribus perturbantibus, orbita corporis P fuerit circulus cujus centrum T.

ditionem vis *LM*, ac diminuitur in ſyzygiis per ablationem vis *KL*, & (r) ob magnitudinem vis *KL*, magis diminuitur quam augetur; eſt autem vis illa vi centripeta (per corol. 2. prop. IV.) in ratione compoſitâ ex ratione ſimplici radii *TP* directè & ratione duplicatâ temporis periodici inversè: patet hanc rationem compoſitam diminui per actionem vis *KL*; ideoque tempus periodicum, ſi maneat orbis radius *TP*, augeri, idque in ſubduplicatâ ratione, quâ vis illa centripeta diminuitur: auctoque ideo vel diminuto hoc radio, tempus periodicum augeri magis, vel diminui minus quam in radii hujus ratione ſeſquiplicatâ, (per corol. VI. prop. IV.) Si vis illa corporis centralis paulatim langueſceret, corpus *P* minus ſemper & minus attra-



(r) 500. *Et ob magnitudinem vis KL &c.* Si diſtantia mediocris S K vel S T ingens fuerit reſpectu radii T P orbitæ P A B, in loco quovis corporis P, erit vis L M quam proximè ad vim N M ut ſinus totus ad ſinum triplum diſtantiæ angularis corporis P à quadraturâ proximâ. Nam ob ingentem diſtantiam corporis S (ex hyp.) lineæ S L, S M ſunt fere parallelæ ac proindè L M = P T, N M ſeu T M = P L, & S P = S K; cumque ſit S T ad lineam quadraturarum C D perpendicularis, erit etiam S K ad eandem normalis, & exiſtente P T radio, erit P K ſinus anguli P T C, hoc eſt, ſinus diſtantiæ angularis corporis P à quadraturâ proximâ C. Porrò (per prop. 66.) $SL : SK = SK^2 : SP^2$, adeoque $SL - SK : SK = SK^2 - SP^2 : SP^2$, hoc eſt, $KL : SK = PK \times SK + SP : SP^2 = PK \times 2SP : SP^2 = 2PK : SP = 2PK : SK$, ob $SK = SP$, & $SK + SP = 2SP$. Quare erit $KL = 2PK$, & PL ſeu $NM = 3PK$, hoc eſt, vis L M ſeu P T ad vim N M ſeu P L ut ſinus totus P T ad 3 P K triplum ſinum diſtantiæ angularis corporis P à quadraturâ proximâ.

501. Coroll. Vis K L in conjunctione A, eſt ad vim ſimilem in oppoſitione B, ut A T ad T B, & ſi orbita P A B circularis fuerit vel circulo finitima, erit vis K L in ſyzigiis duplo major vi L M in quadraturis quam proximè. Nam corpore P in ſyzigiis verſante, fit P K = A T = P T = L M, & proindè N M ſeu P L fit = 3 L M, & K L = 2 L M. Tandem iiſdem poſitis, vis N M maxima eſt in ſyzigiis, quoniam ibi P K fit maxima ſeu evadit = A T, & N M = 3 A T.

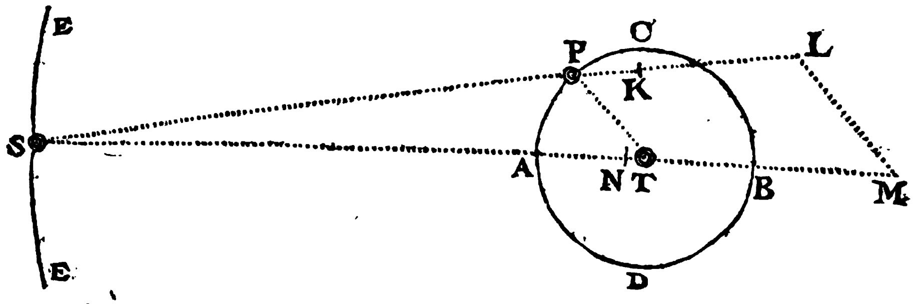
Unde ob magnitudinem vis KL (500. 501.) vis centripeta corporis centralis T magis diminuitur quam augetur, ideoque cenſenda eſt pro abſolutè diminutâ ab actione corporis S.

attractum perpetuò recederet longius à centro T; & contra, ſi vis illa augeretur, accederet propius. Ergo ſi actio corporis longinqui S, quâ vis illa diminuitur, (ſ) augeatur ac diminuatur per vices: augebitur ſimul ac diminuetur radius TP per vices; & (t) tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione compoſitâ ex ratione ſeſquiplicatâ radii, & ratione ſubduplicatâ, quâ vis illa centripeta corporis centralis T, per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui S, diminuitur vel augetur. Co-

(ſ) * *Augeatur ac diminuatur per vices.* Quoniam vis quâ corpus P trahitur à corpore T, eſt ejuſdem corporis P vis centripeta quâ in orbitâ ſuâ retinetur; ſi remiſſior fuerit vis illa, corpus P minus attractum à centro T longius recederet; & contrà, ſi augeatur vis illa, corpus P ad T propiùs accedet. Auctâ igitur actione corporis S in T per acceſſum corporis T ad S, augetur vis NM, minuiturque vis centripeta corporis P, ac proindè creſcit diſtantia PT. Econtrà autem decreſcente corporis S actione per receſſum corporis T ab S decreſcit quoque NM & augetur corporis P vis centripeta, minorque fit diſtantia PT. Hæc omnia per vices contingent, ubi nempe corpus T corpori S proximius fuerit, augebitur radius PT, ubi verò remotius evadet minuetur radius.

(t) * *Et tempus periodicum augebitur ac diminuetur &c.* Corpus P circà T, excluſâ corporis longinqui S vi ablatitiâ, in circulo PAD revolvatur, & accedente vi illâ ablatitiâ corporis S quæ, ob ingentem diſtantiam ST, parva admodum ſit reſpectu vis quâ corpus P à corpore T trahitur, idem corpus P in orbe ferè circulari adhuc revolvetur. Jam verò corporis circulum vel orbem circulo finitimum deſcribentis vis acceleratrix verſus T directa eſt ſemper (per cor. 2. prop. 4.) in ratione compoſitâ ex ratione ſimplici radii TP qui dicatur R directè & ratione duplicatâ temporis periodici, quod dicatur t inversè, hoc eſt, vis acceleratrix corporis P verſus T, eſt ut $\frac{R}{t^2}$, & manente radio ut $\frac{1}{t^2}$; ſed vis acceleratrix in diſtantiâ datâ eſt ut vis abſoluta corporis trahentis, ergò ſi corporis T trahentis vis abſoluta dicatur V, erit V ut $\frac{1}{t^2}$ & t^2 ut $\frac{1}{V}$, ac t ut $\frac{1}{\sqrt{V}}$ manente radio TP ſeu R. Porrò vis acceleratrix quâ corpus P verſus T trahitur, excluſâ vi ablatitiâ corporis S, eſt reciprocè ut quadratum diſtantiæ TP, hoc eſt directè ut $\frac{1}{R^2}$ (ex hyp.) Et quoniam vis ablatitia corporis S, exigua admodum eſt reſpectu vis acceleratricis quâ corpus P à corpore T trahitur, accedente vi illâ ablatitiâ, vis reliqua acceleratrix in corpore P erit adhuc ut $\frac{1}{R^2}$ quam proximè; quare eâdem manente reliquâ vi centripetâ abſolutâ corporis T & mutato utcumque radio R, quadratum temporis periodici t^2 erit ut diſtantiæ cubus R^3. ac proindè t ut $\sqrt{R^3}$. (per coroll. 6. prop. 4.) hoc eſt tempus periodicum eſt in ſeſquiplicatâ ratione radii TP. Si igitur neque maneat radius idem, neque eadem vis centripeta abſoluta in corpore T, ſed per actionem corporis longinqui S radius augeatur, & vis centripeta minuatur, aut per diminutionem ejus actionis radius minuatur, & vis centripeta augeatur, quadratum temporis periodici t^2 erit in ratione compoſitâ ex binis rationibus ſuprà inventis, nimirum ex ratione $\frac{1}{V}$, & ratione R^3; hoc eſt t^2 erit

Corol. 7. Ex (u) præmiſſis conſequitur etiam, quod ellipſeos à corpore *P* deſcriptæ axis, ſeu apſidum linea, quoad motum angularem, progreditur & regreditur per vices, ſed magis ta-



men progreditur, & per exceſſum progreſſionis fertur in conſequentia. Nam vis quâ corpus *P* urgetur in corpus *T* in quadraturis, ubi vis *MN* evanuit, componitur ex vi *LM* & vi cen-

erit ut $\frac{R^3}{V}$, & proindè *t* ut $\sqrt{\frac{R^3}{V}}$, aut quod idem eſt, tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione compoſitâ ex ratione $\sqrt{R^3}$, ſeſquiplicatâ radii, & ratione $\frac{1}{\sqrt{V}}$ ſubduplicatâ hujus quâ vis illa centripeta corporis centralis T per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui S diminuitur vel augetur; nam decreſcente *V* creſcit pariter $\frac{1}{V}$, & contrà creſcente *V* in eâdem ratione decreſcit $\frac{1}{V}$.

502. Scholium. Hinc ut David Gregorius in ſcholio ad prop. 17. Lib. 4. Aſtronomiæ phyſicæ & geometricæ obſervavit, ſi vis centripeta corporis centralis T aliundè quam per vim extraneam corporis S augeatur & minuatur per vices, ut ſi corporis T vis centripeta abſoluta ſupponatur ipſius maſſæ proportionalis & nova ei addatur & detrahatur per vices materia, atque indè ejus vis abſoluta in eâdem ratione augeatur & minuatur, corpus P in minori & majori orbitâ per vices revolvetur, diminuto & aucto per vices radio TP ejuſque tempus periodicum minuetur & augebitur per vices in ratione compoſitâ ex ratione ſeſquiplicatâ radii directè & ratione ſubduplicatâ vis centripetæ abſolutæ corporis T inversè ut ſupra. Vis enim acceleratrix compoſita & reſidua quâ corpus T auctum & diminutum per vices trahit corpus P eſt hic præcisè in duplicatâ ratione diſtantiæ inversè; quod in caſu coroll. 6. quam proximè tantùm obtinet.

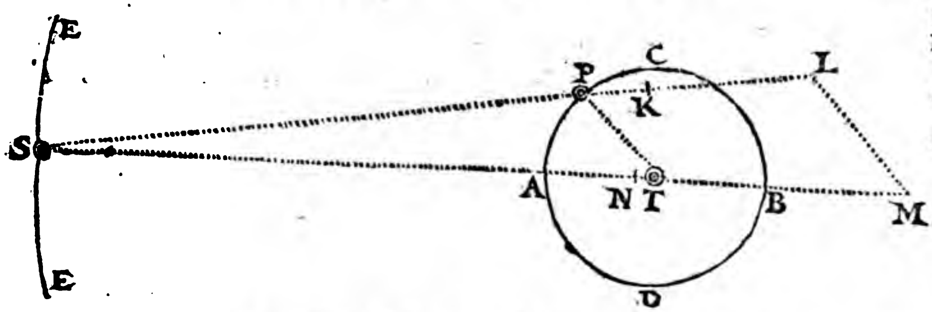
(u) * *Ex præmiſſis.* Si corpus P circum T ellipſim circulo finitimam deſcribat cujus umbilicus ſit T hujus ellipſeos *axis major ſeu apſidum linea* motu angulari circà umbilicum T *per vices progreditur* ſeu fertur in conſequentia *& regreditur*, ſeu in antecedentia movetur; progreditur nempè, dum corpus P eſt in ſyzygiis A & B, regreditur verò dum corpus P eſt in quadraturis C & D, *ſed magis tamen progreditur quam regreditur, & per exceſſum progreſſionis fertur in conſequentia.*

centripeta, quâ corpus T trahit corpus P. Vis (y) prior LM, ſi augeatur diſtantia PT, augetur in eâdem fere ratione cum hâc diſtantiâ, & vis poſterior, decreſcit in duplicatâ illâ ratione; ideoque ſumma harum virium (z) decreſcit in minore quam duplicatâ ratione diſtantiæ PT, & (a) propterea (per corol. I. prop. XLV.) efficit ut aux, ſeu apſis ſumma, regrediatur. In conjunctione verò & oppoſitione vis, quâ corpus P urgetur in corpus T, differentia eſt inter vim, quâ corpus T trahit

(y) * *Vis prior LM &c.* Nam ob ingentem corporis S à corporibus P & T diſtantiam (ex Hyp.) SL eſt ferè parallela SM, & proinde LM ipſi PT parallela creſcit ubique ut PT, quamproxime; in quadraturis verò LM coincidit cum PT.

(z) * *Decreſcit in minore quam duplicatâ illâ ratione*, hoc eſt, non tantùm minuitur in diſtantiâ majore, nec tantùm augetur in diſtantiâ minore, quantùm minueretur vel augeretur, ſi vis tota acceleratrix, ſeu virium ſumma eſſet ſemper ut quadratum diſtantiæ reciprocè.

(a) * *Et propterea per cor. 1. prop. 45.* Sit $TP = A$, & $LM = c \times A$; c verò quantitas data, & vis quâ corpus P verſus T excluſâ corporis S actione urgetur, erit (ex Hyp.) ut $\frac{1}{A^2}$, & accedente vi exiguâ LM in quadraturis, harum virium ſumma erit ut $\frac{1}{A^2} + c \times A$, adeóque hæc virium ſumma decreſcet in ratione paulò minore quam in duplicatâ diſtantiæ PT ſeu A. Nam ſi diſtantia variabilis A evadat $b \times A$, ſitque b numerus unitate major, erit vis in ſimplici diſtantiâ A ad vim in diſtantiâ majore $b \times A$, ut $\frac{1}{A^2} + c \times A$, ad $\frac{1}{b^2 A^2} + c b A$, hoc eſt, ut $bb + cbbA^3$ ad $1 + cb^3 A^3$ ſive ut $b^2 \times \overline{1 + cA^3}$ ad $1 \times \overline{1 + cb^3 A^3}$, hæc autem ratio minor eſt quam ratio $\frac{1}{A^2}$ ad $\frac{1}{b^2 A^2}$, ſeu b^2 ad 1, cum $(1 + cA^3)$ minus ſit quàm $1 + cb^3 A^3$. Ponamus itaque virium ſummam eſſe ut $\frac{1}{A^{2-q}}$, ſeu ut A^{-2+q}, & q, numerum poſitivum unitate longe minorem, & quoniam ſi motus totus angularis quo corpus P ab apſide unâ ad eandem apſidem redit, ſit ad motum angularem revolutionis unius ſeu 360°. ut numerus aliquis m ad n vis centripeta tota eſt ut $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$ (per cor. prop. 45.) erit hic $\frac{nn}{mm} - 3 = q - 2$, $\frac{nn}{mm} = 1 + q$, $\frac{n}{m} = \sqrt{1 + q}$, & m ad n, ſeu motus totus angularis ab apſide ad eandem apſidem ad 360°. ut 1, ad $\sqrt{1+q}$, adeóque motus ille angularis ab apſide ad eandem $= \frac{360°}{\sqrt{1+q}}$, quarè cum ſit $\sqrt{1+q}$, paulo major unitate, motus totus angularis ab apſide ad eamdem apſidem minor erit 360°. & ideò apſides obviam ibunt corpori P revolventi, ſeu movebuntur in antecedentia, aut quod idem eſt, regredientur. Idem facilè demonſtratur (per cor. 2. prop. 45.) vel per exempla tertia. Cum enim vis tota ſit (ex Hyp.) ut $\frac{1}{A^2} + c \times A$, erit (loco citato), angulus revolutionis corporis inter apſides ſummam & imam $= 180°. \times \sqrt{\frac{1 + c}{1 + 4c}}$; ſed quoniam c eſt numerus poſitivus, $\frac{1+c}{1+4c}$, eſt numerus unitate minor, ergò angulus revolutionis corporis P inter apſides minor eſt 180°.

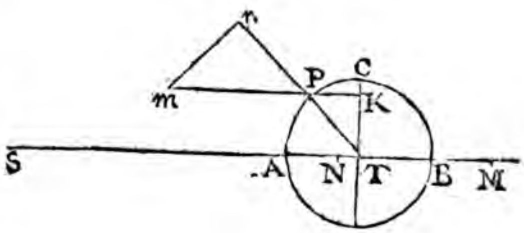


LIBER PRIMUS. PROP. LXVI. THEOR. XXVI.

trahit corpus P, & vim KL; & differentia illa, ([b]) propterea quod vis KL augetur quamproximè in ratione diſtantiæ PT, decreſcit in majore quam duplicatâ ratione diſtantiæ PT, ([c]) ideoque (per corol. 1. prop. XLV.) efficit ut aux progrediatur. In ([d]) locis inter ſyzygias & quadraturas pendet motus augis ex cauſâ utrâque conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius exceſſu progrediatur ipſa vel regrediatur. Unde cum vis KL in ſyzygiis ſit quaſi duplo major quam vis LM in quadraturis, exceſſus erit penes vim KL, transferetque augem in conſequentia. Veritas autem hujus & præcedentis corollarii faci-

(b) * *Propterea quod vis KL &c.* Eſt enim in ſyzygiis $KL = 2AT$, ſeu $2PT$ quam proximè (501).

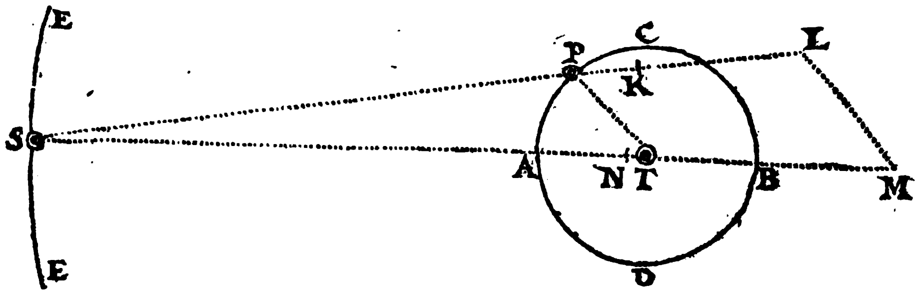
(c) * *Ideóque per cor. 1. prop. 45.* Nam ſi in ſuperiori calculo loco $+q$ ſcribatur $-q$, vel loco $+c \times A$, ſcribatur $-c \times A$, quod vis KL ſit ablatitia, invenietur angulus totius revolutionis corporis P ab apſide unâ ad eandem apſidem $= \frac{360°}{\sqrt{1-q}}$, vel angulus inter apſides ſummam & imam $= 180°. \times \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. Eſt autem $\sqrt{1-q}$, numerus unitate minor, & $\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ numerus unitate major, adeóque $\frac{360°}{\sqrt{1-q}}$, arcus major 360°. & $180° \times \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$, arcus major 180°. quarè apſides in hoc caſu progrediuntur.



(d) 503. *In locis inter ſyzygias & quadraturas &c.* Iiſdem poſitis quæ in Lemmate 500. quæritur diſtantia angularis corporis P à quadraturâ C, v. gr. ubi apſides quieſcunt. Per locum corporis P agatur P m parallela & æqualis N M ſeu T M, & erit $Pm = 3PK$ (500). Vis P m, ſi in radium T P productum demittatur perpendiculum m n, reſolvitur in vires P n, n m, quarum n m agendo ſecundum lineam radio perpendicularem, vim ac-

DE MOTU CORPORUM.

facilius intelligetur concipiendo ſyſtema corporum duorum *T*, *P*, corporibus pluribus *S*, *S*, *S*, &c. in orbe *ESE* conſiſtentibus, undique cingi. (e) Namque horum actionibus actio ipſius *T*

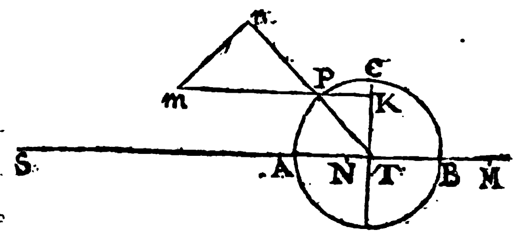


minuetur undique, decreſcetque in ratione pluſquam duplicatâ diſtantiæ.

Ca-

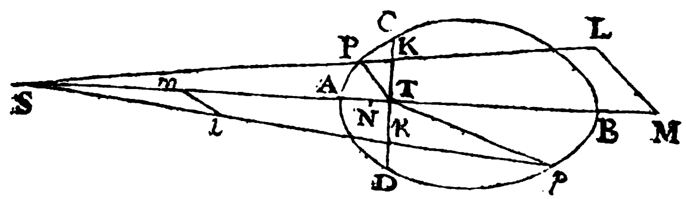
acceleratricem corporis P verſus T nec auget, nec minuit, & Pn agendo ſecundum radium TP à P verſus n, vim illam acceleratricem corporis P minuit; vis verò LM ſeu TP vim acceleratricem corporis P verſus T auget. Quarè ubi erit $Pn = PT$ vis acceleratrix corporis P nec augebitur nec minuetur, & apſides quieſcent. Porrò ob triangula TPK, mPn ſimilia $PT : PK = Pm$, ſeu $3PK : Pn$ ſeu PT. Eſt igitur in loco quæſito P, $3PK^2 = PT^2$, & proindè $PT : PK = \sqrt{3} : 1$. hoc eſt ſinus totus ad ſinum diſtantiæ angularis corporis P à quadraturâ proximâ. ut $\sqrt{3}$ ad 1, ſeu ut 1732. ad 1000. proximè; undè angulus PTC invenitur eſſe 35°. 26′. circiter. Quieſcent igitur apſides in quatuor locis corporis P quæ à quadraturis diſtant angulo 35°. 16′; & hinc in ſingulis corporis P revolutionibus, cæteris paribus, apſides regredientur per gradus revolutionis corporis P, 141°, & progredientur per grad. 219.

504. Iiſdem poſitis, ſi orbita CPD, circulo finitima ſit, erit vis addititia $PT - Pn$, maxima in quadraturis. Nam cum ſit ſemper $PT : PK = 3PK : Pn$, erit $Pn = \frac{3PK^2}{PT}$, ac proindè $PT - Pn = PT - \frac{3PK^2}{PT}$, quæ quantitas maxima evadet ubi erit $PK = 0$, quod in quadraturis contingit.



(e) * *Namque horum actionibus &c.* Hic enim ratione corpus P erit ſemper in quadraturis ſimul & in ſyzygiis corporis, ſeu corporum S, adeóque cum vis ablatitia KL; in ſyzygiis & propè ſyzygias ſit ferè duplo major quam vis addititia LM, in quadraturis & propè quadraturas, actio corporis T minuetur undique, decreſcetque proindè in ratione pluſquam duplicatâ diſtantiæ. TP.

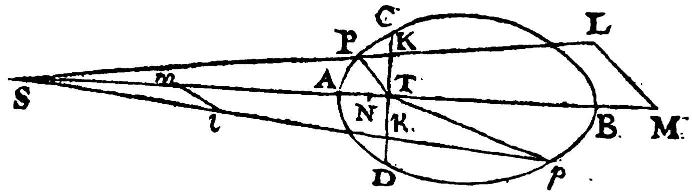
Corol. 8. (f) Cum autem pendeat apſidum progreſſus vel regreſſus à decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicatâ ratione diſtantiæ *TP*, in tranſitu corporis ab apſide imâ ad apſidem ſummam; ut & à ſimili incremento in reditu ad apſidem imam; atque ideo maximus ſit ubi proportio vis in apſide ſummâ ad vim in apſide imâ maximè recedit à duplicatâ ratione diſtantiarum inversâ: manifeſtum eſt quod apſides in ſyzygiis ſuis, per vim ablatitiam *KL* ſeu *NM*−*LM*, progredientur velocius, inque quadraturis ſuis tardius recedent per vim addititiam *LM*. Ob diuturnitatem verò temporis, quo velocitas progreſſus vel tarditas regreſſus continuatur, fit hæc inæqualitas longè maxima.



(f) * *Cum autem* (per corol 7.) *pendeat apſidum progreſſus vel regreſſus à decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicatâ ratione diſtantiæ TP* quæ augetur in receſſu à centro T, ſive *in tranſitu corporis P ab apſide imâ ad apſidem ſummam, ut & à ſimili incremento* in acceſſu ad centrum, ſive *in reditu* ab apſide ſummâ *ad apſidem imam, manifeſtum eſt* progreſſum vel regreſſum apſidum maximum eſſe *ubi ratio vis in apſide ſummâ ad vim in apſide imâ maximè recedit à duplicatâ ratione diſtantiarum inversâ*, porrò dum linea apſidum ſeu major axis ellipſeos BCAD, cujus umbilicus eſt T, in ſyzygiis A, B verſatur, ratio vis totius corporis P in apſide ſummâ poſiti ad vim ejus in apſide imâ verſantis, magis recedit à duplicatâ ratione diſtantiarum inversâ quam in alio quovis lineæ apſidum ſitu. Sit enim B apſis ſumma, A apſis ima, & erit TB diſtantia maxima, AT minima (ex naturâ ellipſeos). Undè corpore P in conjunctione A verſante erit vis ablatitia KL (ſeu differentia virium acceleratricium corporum T & P verſus S) omnium minima, & corpore P in oppoſitione B verſante, erit differentia illa KL omnium maxima. Cum autem ob ingentem corporis S diſtantiam (ex Hyp.) ſit fere KL ad kl ut AT ad TB (501) ratio vis corporis P in A verſantis ad vim illius in B poſiti, exprimi hic poterit per rationem $\frac{b}{AT^2} - c \times AT$, ad $\frac{b}{TB^2} - c \times TB$, (ſi ratio b ad c exprimat rationem vis abſolutæ trahentis corpus P verſus T, ad vim abſolutam ablatitiam KL) ſeu reductione ad eundem denominatorem factâ, per rationem $TB^2 \times \overline{b - c \times AT^3}$, ad $AT^2 \times \overline{b - cTB^3}$, quæ ratio eò magis recedit à ratione TB^2 ad AT^2, ſeu duplicatâ diſtantiarum inversâ, quo magis ratio quantitatis $b - c \times AT^3$, ad quantitatem $b - c \times TB^3$, recedit à ratione æqualitatis, ſeu quo minor eſt AT reſpectu TB, quarè dum linea apſidum eſt in ſyzygiis A, B, ratio vis totius in apſide ſummâ ad vim in apſide imâ maxi-

DE MOTU CORPORUM.

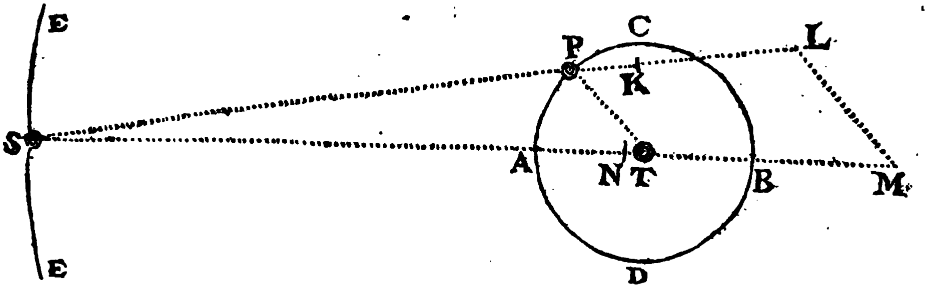
Corol. 9. Si corpus aliquod, vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ à centro revolveretur circa hoc centrum in ellipſi; & mox, in deſcenſu ab apſide ſummâ ſeu auge ad apſidem imam; vis illa per acceſſum perpetuum vis novæ augeretur in ratione pluſquam duplicatâ diſtantiæ diminutæ: manifeſtum eſt quod corpus, perpetuò acceſſu vis illius novæ impulſum ſemper in centrum, magis vergeret in hoc centrum quam ſi urgeretur vi ſolâ creſcente in duplicatâ ratione diſtantiæ diminutæ; ideoque orbem deſcriberet orbe elliptico interiorem, & in apſide imâ propius accederet ad centrum quam prius. (g) Orbis igitur, acceſſu hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis in receſſu cor-



mè recedit à ratione duplicatâ diſtantiarum inversâ. In hoc igitur lineæ apſidum ſitu apſides celerrimè progrediuntur, corpore P in ſyzygiis vel prope ſyzygias verſante. Dum vero corpus P eſt in quadraturis C, D, fit vis LM = CT, vel DT; Eſt autem ex naturâ ellipſeos, ſumma linearum CT, DT, omnium minima; quare in integrâ corporis P revolutione, apſides viribus CT, DT tardiſſimè regrediuntur in quadraturis corporis P, & celerrimè progrediuntur in ipſius ſyzygiis, atque adeò exceſſus progreſſus ſupra regreſſum erit in hoc caſu omnium maximus, & apſides in integrâ corporis P revolutione celerrimè movebuntur in conſequentia. Ob contrarias prorſus cauſas, ſi linea apſidum in quadraturis poſita ſit, apſides velociſſimè regredientur, corpore P in quadraturis verſante, & tardiſſimè progredientur corpore P in ſyzygiis exiſtente, & ex hâc utrâque causâ fieri poterit ut in integrâ corporis P circum T revolutione, regreſſus apſidum ſuperet eorum progreſſum, proindeque ut apſides in antecedentia ferantur; ſed quoniam, cæteris paribus, vis ablatitia KL quæ progreſſum apſidem in ſyzygiis corporis P inducit eſt (500) ferè duplo major vi adjectitiâ LM quæ apſidum regreſſum in quadraturis corporis P producit, exceſſu progreſſûs ſuprà regreſſum, apſides progrediuntur in integrâ ſui revolutione circum T, hoc eſt, eo tempore quo apſides ex T viſæ omnes cum corpore S, aſpectus ſubeunt; augetur verò progreſſus ille, ſi corpora P & S in ſuis orbitis ferantur in eandem plagam; In hâc enim hypotheſi, apſides diutius hærent in ſyzigiis quam in quadraturis, quia in ſyzigiis progrediuntur cum corpore S, atque adeò diutius illud quaſi comitantur, in quadraturis verò feruntur in antecedentia & corporis S in conſequentia revolventis aſpectum quadratum veluti fugiunt; undè fit ut apſides diutius progrediantur in ſyzigiis ſuis quam regrediuntur in ſuis quadraturis.

(g) * *Orbis igitur acceſſu hujus vis novæ fiet magis excentricus*; manente enim diſtantiâ apſidis ſummæ ab orbitæ umbilico, decreſcet diſtantia apſidis imæ ab eodem umbilico, majorque proindè erit ratio prioris diſtantiæ ad poſteriorem, quam

corporis ab apſide imâ ad apſidem ſummam, decreſceret iiſdem gradibus quibus ante creverat, redieret corpus ad diſtantiam priorem, ideoque ſi vis decreſcat in majori ratione, corpus jam minus attractum aſcendet ad diſtantiam majorem & ſic orbis excentricitas adhuc magis augebitur. Quare ſi ratio incrementi & decrementi vis centripetæ ſingulis revolutionibus augeatur, augebitur ſemper excentricitas; (h) & contra, diminuetur eadem, ſi ratio illa decreſcat. Jam verò in ſyſtemate



corporum T, P, S, ubi apſides orbis PAB ſunt in quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima eſt, & maxima fit ubi apſides ſunt in ſyzygiis. Si apſides conſtituantur in quadraturis, ratio prope apſides minor eſt & prope ſyzygias major quam duplicata diſtantiarum, & ex ratione illâ majori oritur augis motus directus, (i) uti jam dictum eſt. (k) At ſi conſideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progreſſu inter

ſi vis illa nova non acceſſiſſet, hoc eſt, orbis fiet magis excentricus.

(h) * *Et contrà &c.* Si in deſcenſu corporis ab apſide ſummâ ad apſidem imam, vis centripeta augeatur minus quam in duplicatâ ratione diſtantiæ diminutæ, corpus deſcribet orbem orbi elliptico exteriorem, & in apſide imâ, minus accedet ad centrum quam prius, hoc eſt, orbis fiet minus excentrious, & excentricitas adhuc minuetur, ſi in corporis aſcenſu ab apſide imâ ad ſummam, vis centripeta minus decreſcat quam anteà creverat. Quarè ſi ratio incrementi & decrementi vis centripetæ ſingulis revolutionibus minuatur, minuetur ſemper excentricitas.

(i) * *Uti jam dictum eſt* (Cor. 7.).

(k) * *At ſi conſideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progreſſu corporis* P *inter apſides in quadraturis* C, D *conſtituti, hæc minor eſt quam duplicata diſtantiarum.* Sit enim apſis ima C, ſumma D, umbilicus T, erit (ex Dem.) vis in apſide imâ ád vim in apſide ſummâ ut $\frac{b}{CT^2} + n \times CT$, ad $\frac{b}{TD^2} + n \times TD$, (ſi ratio b ad n exprimat rationem vis abſolutæ trahentis corpus P verſus T ad vim abſolutam addititiam LM) & reductione ad eamdem denominationem factâ ut $TD^2 \times \overline{b + nCT^3}$ ad $CT^2 \times b + nTD^3$, quæ ratio minor eſt quam ratio TD^2, ad CT^2, ob TD, majorem quam CT; & quoniam in hoc lineæ apſidum ſitu ratio TD ad CT ſeu ratio diſtantiarum umbilici T à qua-

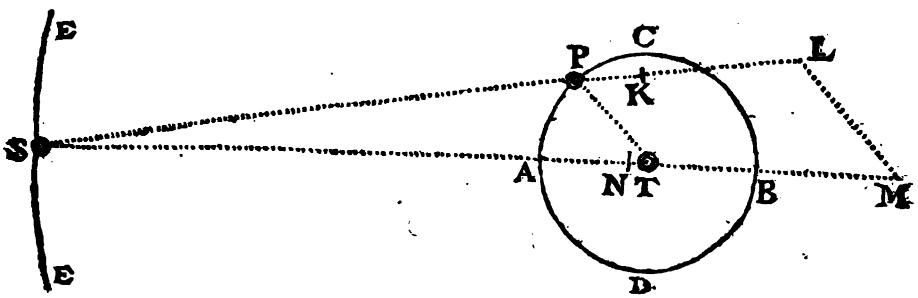
inter apſides, hæc minor eſt quam duplicata diſtantiarum. Vis in apſide imâ eſt ad vim in apſide ſummâ in minore quam duplicatâ ratione diſtantiæ apſidis ſummæ ab umbilico ellipſeos ad diſtantiam apſidis imæ ab eodem umbilico, & contra, ubi apſides conſtituuntur in ſyzygiis, vis in apſide imâ eſt ad vim in apſide ſummâ in majore quam duplicatâ ratione diſtantiarum. Nam vires *L M* in quadraturis additæ viribus corporis *T* componunt vires in ratione minore, & vires *K L* in ſyzygiis ſubductæ à viribus corporis *T* relinquunt vires in ratione majore. Eſt igitur ratio decrementi & incrementi totius, in tranſitu inter apſides, minima in quadraturis, maxima in ſyzygiis: & propterea in tranſitu apſidum, à quadraturis ad ſyzygias perpetuò augetur, augetque excentricitatem ellipſeos; inque tranſitu à ſyzygiis ad quadraturas perpetuò diminuitur, & excentricitatem diminuit.

Corol. 10. Ut rationem ineamus errorum in latitudinem, fingamus planum orbis *E S T* immobile manere; & ex errorum expo-

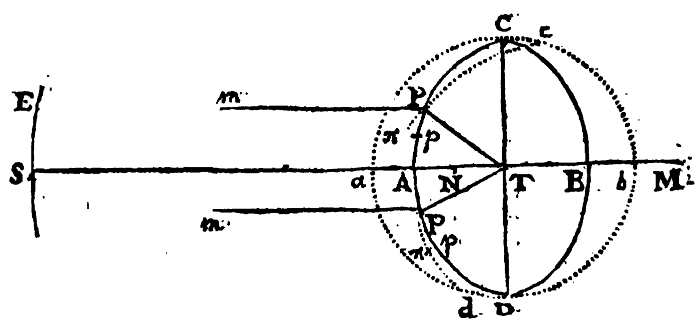
quadraturis maxima eſt, (ex naturâ ellipſeos) patet rationem totius decrementi & incrementi vis centripetæ in tranſitu corporis P inter apſides minimam eſſe in quadraturis apſidum. Et contrà ſi fuerit A apſis ima, B apſis ſumma, erit vis in apſide imâ ad vim in apſide ſummâ ut $TB^2 \times \overline{b - cAT^3}$, ad $AT^2 \times \overline{b - cTB^3}$, adeóque in majori ratione quam TB^2, ad AT^2, & quoniam ratio TB, ad AT, in his apſidum locis maxima eſt, ex naturâ ellipſeos, ratio decrementi & incrementi totius in tranſitu inter apſides, maxima eſt in ſyzygiis apſidum, & propterea ſingulis corporis P revolutionibus in tranſitu apſidum à quadraturis ad ſyzygias, hæc ratio perpetuò augetur, augetque excentricitatem ellipſeos, & in tranſitu apſidum à ſyzygiis ad quadraturas perpetuò diminuitur, & excentricitatem diminuit. Maxima ergò eſt orbis excentricitas, ubi apſides ſunt in ſyzygiis, minima ubi ſunt in quadraturis.

505. Ex his etiam ſequitur in unâquâque corporis P circum T revolutione excentricitatem orbis circà ſyzygias corporis P augeri, & circà ejus quadraturas minui, minimamque eſſe in illius quadraturis maximam in ſyzygiis, cæteris paribus. Nam (per cor. 7.) corporis P vis centripeta tota in ſyzygiis decreſcit in majori quam duplicatâ ratione diſtantiæ auctæ, & creſcit in majori ratione quam duplicatâ diſtantiæ diminutæ, & in quadraturis contrà. Quarè corpus P, in ſyzygiis & propè ſyzygias deſcribit partem orbis magis excentrici, in quadraturis verò & propè quadraturas partem orbis minus excentrici (ex demonſtratis initio cor. 9.) Et quoniam vis addititia LM in quadraturis corporis P maxima eſt, & vis ablatitia KL in ſyzygiis ejus etiam maxima, vis autem addititia excentricitatem diminuit & ablatitia auget, manifeſtum eſt quod (cæteris paribus) in unâ corporis P revolutione, excentricitas orbis minima fit in quadraturis corporis P, & maxima in illius ſyzygiis, atque adeò quod à quadraturis ad ſyzygias perpetuò augeatur, & à ſyzygiis ad quadraturas perpetuò minuatur.

expoſitâ cauſâ manifeſtum eſt, quod ex viribus *NM*, *ML*, quæ ſunt cauſa illa tota, vis *ML* agendo ſemper ſecundum planum orbis *PAB*, nunquam perturbat motus in latitudinem; quodque vis *NM*, ubi nodi ſunt in ſyzygiis, agendo etiam ſecun-



dum idem orbis planum, (l) non perturbat hos motus; (m) ubi verò ſunt in quadraturis, eos maximè perturbat, corpuſque *P* de plano orbis ſui perpetuò trahendo, (n) minuit inclinationem plani in tranſitu corporis à quadraturis ad ſyzygias, augetque viciſſim

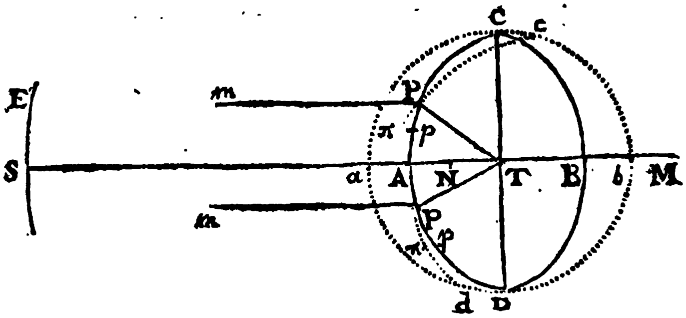


(l) * *Non perturbat hos motus.* Patet per caſ. 2. prop. *66.*

(m) 506. *Ubi verò ſunt in quadraturis eos maximè perturbat*; Ubi nodi ſunt in quadraturis C & D inclinatio directionis vis N M (quæ lineâ P m exhibetur) ad planum orbitæ corporis P maxima eſt, utpotè æqualis planorum CAD, EST inclinationi & proinde, cæteris paribus, maximè potenter agit; in alio enim lineæ nodorum ſitu, minor eſt inclinatio directionis vis N M ad planum orbitæ corporis P, & evaneſcit cum nodi ſunt in ſyzygiis, creſcitque adeò in tranſitu nodorum à ſyzygiis ad quadraturas, & contrà decreſcit in eorum tranſitu à quadraturis ad ſyzygias.

(n) 507. *Minuit inclinationem plani &c.* Si orbitæ corporis P nodi in quadraturis C, D conſtituantur, angulus inclinationis orbitæ ad planum immotum EST perpetuò minuitur in tranſitu corporis P à quadraturis

DE MOTU CORPORUM. ciſſim eandem in tranſitu à ſyzygiis ad quadraturas. Unde fit ut (o) corpore in ſyzygiis exiſtente inclinatio evadat omnium mi-



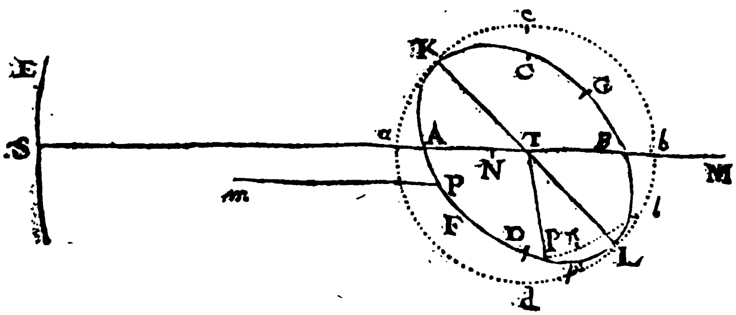
turis ad ſyzygias, augetur verò in tranſitu corporis à ſyzygiis ad quadraturas, & in utroque tranſitu nodi regrediuntur. Sit enim orbitæ P A B pars C A D ſuprà planum immotum E S T elevata, altera, verò pars C B D infrà illud depreſſa intelligatur; per locum corporis P agatur recta P m parallela lineæ T S, exhibens directionem vis N M, & corpus P feratur primum à nodo ſeu quadraturâ C ad conjunctionem A, & quoniam corpus P vi revolutionis per arcum P p urgetur, & vi N M per rectam P m trahitur, tempore quam minimo, vi compoſitâ, deſcribet lineolam P π quæ non eſt in plano C P T, ſed ab eo deflectit verſus P m, adeóque corpus movetur in plano T P π quod productum plano E S T non occurret in C ſed ultra C verſus oppoſitionem B. Centro T & intervallo T P deſcribatur in plano E S T circulus C a D b, in plano C P D circuli arcus P C, & in plano π P T arcus P c circulo C a D b, occurrens in c. Et quoniam vis N M minima eſt reſpectu vis revolutionis corporis P, angulus C P c, inclinationis planorum C P T & c P T minimus eſt ſeu infiniteſimus, & arcus P c ab arcu P C nonniſi minimâ ſeu infiniteſimâ quantitate differt; quare cum (ex hyp.) arcus P C à quadrante C A differat finitâ quantitate P A, ſumma arcuum P C, P c ſemicirculo minor eſt, & hinc in triangulo ſpherico C P c, angulus externus P C a (per prop. 10. ſphæricorum Menelai, vel per theor. 33. Sphæricorum Clariſſ. Wolfii), major eſt angulo interno oppoſito P c C, hoc eſt, inclinatio plani c P T ad planum immotum E S T minor eſt inclinatione plani C P T ad idem planum E S T. In tranſitu igitur corporis P à quadraturâ C ad conjunctionem A orbitæ inclinatio perpetuò minuitur, & quoniam nodus C transfertur in c, fitque proindè obviam corpori revolventi, nodi regrediuntur. Eodem modo demonſtratur inclinationem minui & nodos regredi in tranſitu corporis à quadraturâ D ad oppoſitionem B. Jam feratur corpus à conjunctione A ad quadraturam proximam D, & in loco quovis P, duplici vi, nempè vi revolutionis per arcum P p & vi N M per rectam P m urgetur, atque adeò deſcribit lineolam P π, quæ ab arcu P p verſus P m declinat. Quarè ſi centro T & intervallo T P deſcribantur ut ſuprà tres arcus P D, a D, P d, eodem modo demonſtrabitur nodum D transferri in antecedentia in d, & angulum P d a majorem eſſe angulo interno oppoſito P D d, hoc eſt, inclinationem orbitæ augeri in tranſitu corporis P, à conjunctione ad quadraturam proximam, & eadem eodem modo oſtenduntur fieri in tranſitu ab oppoſitione B ad quadraturam C. Q. E. D.

(o) * *Corpore in ſyzygiis exiſtente.* Vis enim N M, cæteris paribus maxima eſt in ſyzigyis (501).

minimâ, (p) redeatque ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus ad nodum proximum accedit. (q) At ſi nodi conſtituan-

LIBER PRIMUS. PROP. LXVI. THEOR. XXVI.

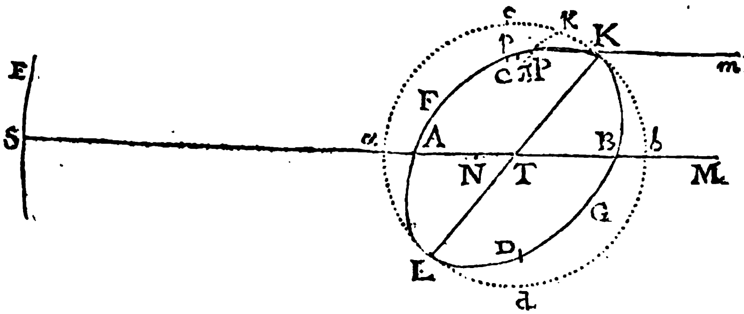
(p) * *Redeatque ad priorem magnitudinem circiter.* Si enim orbita C A D B perfectè circularis maneret, æqualis eſſet vis N M in paribus corporis P diſtantiis à nodis C & D, in utroque quadrante C A & A D, vel D B & B C; quarè cum orbita C A D, circulo finitima ſupponatur, & per vim exiguam N M minuatur inclinatio plani in tranſitu corporis P à quadraturis ad ſyzygias, & contrà augeatur per æqualem vim N M in tranſitu corporis P à *ſyzygiis ad quadraturas*, liquet quod inclinatio redeat ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus P à ſyzygiâ ad nodum proximum in quadraturâ poſitum accedit.



(q) 508. *At ſi nodi conſtituantur in octantibus poſt quadraturas, id eſt* in locis K & L ità ut anguli K T c, K T a ſint æquales, ſeu 45°. 1°. *Inclinatio plani perpetuò minuitur in tranſitu corporis* P *à nodo ad gradum indè nonageſimum* F vel G. 2°. *Augetur in tranſitu à gradu illo 90°. ad quadraturam proximam.* 3°. In utroque tranſitu regrediuntur nodi. 4°. *In tranſitu* à quadraturâ *ad nodum proximum inclinatio minuitur* & nodi progrediuntur. 1um, 2um. & 3um. Eodem modo demonſtrantur ac ſuperius (507). Quartum ità oſtenditur. Dum corpus P à quadraturâ D ad nodum proximum L fertur, directio vis N M, quæ antè dirigebatur à P verſus m in contrariam mutatur; Quarè corpus P inter D & L poſitum vi revolutionis urgetur per arcum P p & vi N M ab illo arcu retrahitur verſus M atque vi utrâque fertur tempore minimo per lineolam P π quæ ab arcu P p in plagam M a deflectit. Si itaque centro T & intervallo T P deſcribantur tres arcus circulares P L, P π, L l b a, in planis T P L, T P π, E S T eodem modo ac in notâ 507. patet angulum P l L minorem eſſe angulo P L a. Undè in tranſitu corporis à quadraturâ D ad nodum proximum L inclinatio orbitæ minuitur & nodus progreditur; eadem fieri in tranſitu corporis à quadraturâ C ad nodum proximum K, eodem modo demonſtratur. Q. E. D.

De Motu Corporum.

tuantur in octantibus poſt quadraturas, id eſt, inter *C* & *A*, *D* & *B*, intelligitur ex modo expoſitis, quod, in tranſitu corporis *P* à nodo alterutro ad gradum inde nonageſimum, inclinatio plani perpetuo minuitur; deinde in tranſitu per proximos 45 gradus, uſque ad quadraturam proximam, inclinatio augetur, & poſtea denuò in tranſitu per alios 45 gradus, uſque ad nodum proximum, diminuitur. Magis itaque diminuitur inclinatio quam augetur, (r) & propterea minor eſt ſemper in nodo ſubſequente quam in præcedente. (ſ) Et ſimili ratiocinio, inclinatio magis augetur, quam diminuitur, ubi nodi ſunt

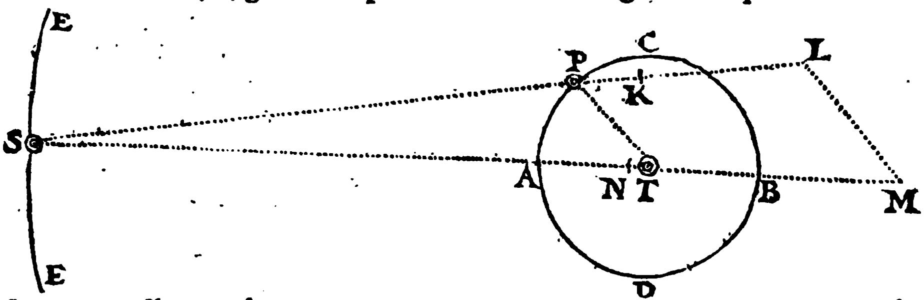


(r) * *Et propterea minor eſt ſemper inclinatio in nodo ſubſequente quam in præcedente*, quod verum quoque eſt, ubicumque conſtituatur nodus K inter c & a, ut patet ex ipſis demonſtrationibus in notis 507. & 508. traditis.

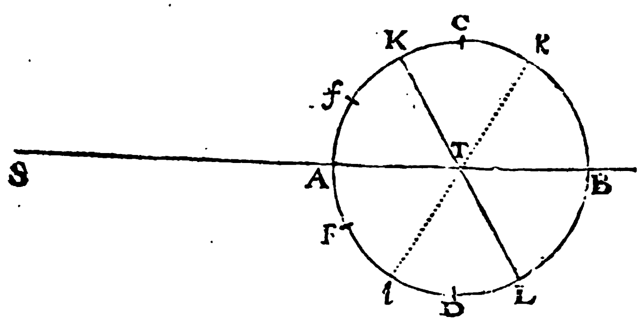
(ſ) 509. *Et ſimili ratiocinio &c.* Si nodus K conſtituatur inter quadraturam C vel c & oppoſitionem B vel b, & nodus oppoſitus L inter quadraturam D vel d, & conjunctionem A ſeu a, feraturque corpus à nodo K per C ad alterum nodum L. 1°. In tranſitu corporis à nodo ad quadraturam proximam inclinatio plani perpetuò augetur & nodi progrediuntur. 2°. In tranſitu a quadraturâ C vel D ad gradum à nodo nonageſimum F vel G inclinatio minuitur & nodi regrediuntur. 3°. In tranſitu à gradu illo 90°. ad nodum proximum inclinatio augetur & nodi regrediuntur. 2um. & 3um. demonſtrantur prorſus ut in notâ 507. 1um. verò ità oſtenditur. Dum corpus P verſatur inter nodum K & quadraturam C, vi revolutionis urgetur per arcum P p, & vi N M trahitur ſecundum directionem P m in plagam M, adeóque vi utrâque deſcribet tempuſculo minimo lineolam P π, quæ ab arcu P p deflectet verſus P m; quarè ſi centro T, radio T P, deſcribantur ut ſuprà arcus P K, π P K, K k c a in planis T P π, . . :, E S T patet propoſitum, ut in notâ 507.

510. Coroll. Ex tribus ſuperioribus demonſtrationibus (507. 508. 509.) inter ſe collatis manifeſtum eſt nodos progredi quamdiu corpus P inter quadraturam alterutram & nodum quadraturæ proximum verſatur; eos verò regredi, dum corpus P in aliis quibuſlibet locis verſatur. Undè ſequitur in ſingulis corporis P à nodo ad nodum revolutionibus nodos magis regredi quam progredi, adeóque abſolutè regredi niſi fuerint in ſyzygiis.

ſunt in octantibus alteris inter *A* & *D*, *B* & *C*. (t) Inclinatio igitur ubi nodi ſunt in ſyzygiis eſt omnium maxima. In tranſitu eorum à ſyzygiis ad quadraturas, in ſingulis corporis ad no- LIBER PRIMUS. PROP. LXVI. THEOR. XXVI.



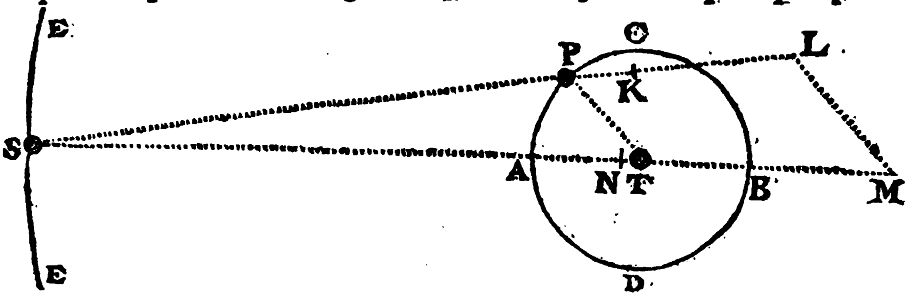
dos appulſibus, diminuitur; fitque omnium minima, ubi nodi ſunt in quadraturis, & corpus in ſyzygiis: dein creſcit iiſdem gradibus, quibus antea decreverat, nodiſque ad ſyzygias proximas appulſis, ad magnitudinem primam revertitur. *Co-*



(t) * *Inclinatio igitur ubi nodi ſunt in ſyzygiis &c.* Quoniam in ſingulis corporis P à nodo ad nodum revolutionibus, linea nodorum regreditur (510) & in tranſitu nodorum à ſyzygiis A & B ad quadraturas C & D, inclinatio orbitæ perpetuò minuitur (508.) deindè verò in tranſitu nodorum à quadraturis C & D, ad ſyzygias B, & A, perpetuò augetur (509), manifeſtum eſt inclinationem minimam eſſe ubi nodi ſunt in quadraturis & corpus P in ſyzygiis (in quibus vis NM, cæteris paribus, maxima eſt) & maximam inclinationem eſſe ubi nodi ſunt in ſyzygiis. Porrò ſint nodi K & L inter C & A, D & B primum, deindè regrediendo tranſeant in loca k & l, inter C & B, D & A, ſintque arcus CK & Ck, æquales. In primo caſu inclinatio minuitur in tranſitu corporis P, per quadrantem KF, (508.) & in ſecundo caſu æqualibus viribus augetur per quadrantem fl, (509). In primo caſu inclinatio augetur per arcum FD (508.), & in ſecundo caſu æqualibus viribus minuitur per arcum cf=FD (509.) Tandem in primo caſu, inclinatio minuitur per arcum DL, (508.) & in ſecundo caſu augetur æqualibus viribus per arcum æqualem kC, (509). Quarè, cæteris paribus, in tranſitu nodorum à quadraturis ad ſyzygias inclinatio planorum iiſdem gradibus creſcit quibus anteà decreverat in tranſitu nodorum à ſyzygiis ad quadraturas, ideoque nodis ad ſyzygias proximas appulſis, ad magnitudinem primam revertitur.

De Motu Corporum.

Corol. 11. Quoniam corpus P, ubi nodi ſunt in quadraturis, perpetuò trahitur de plano orbis ſui, idque in partem verſus S in tranſitu ſuo à nodo C per conjunctionem A ad nodum D; & in contrariam partem in tranſitu à nodo D per oppoſitionem B ad nodum C: manifeſtum eſt, quod in motu ſuo à nodo C corpus perpetuò recedit ab orbis ſui plano primo CD, uſque dum perventum eſt ad nodum proximum; ideoque in hoc nodo, longiſſimè diſtans à plano illo primo CD, tranſit per planum orbis EST non in plani illius nodo altero D, ſed in puncto quod inde vergit ad partes corporis S, quodque proin-



de novus eſt nodi locus in anteriora vergens. Et ſimili argumento pergent nodi recedere in tranſitu corporis de hoc nodo in nodum proximum. (u) Nodi igitur in quadraturis conſtituti perpetuò recedunt; in ſyzygiis, ubi motus in latitudinem nil perturbatur, quieſcunt; in locis intermediis, conditionis utriuſque participes, recedunt tardius: ideoque, ſemper vel retrogradi, vel ſtationarii ſingulis revolutionibus feruntur in antecedentia.

Co-

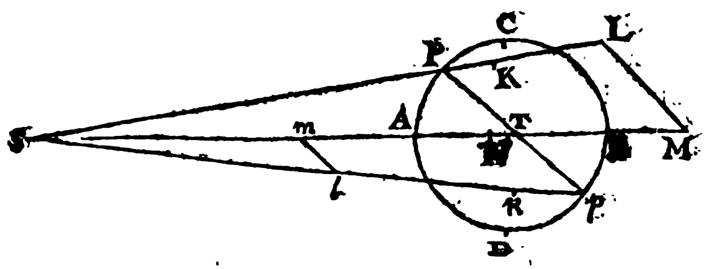
(u) * *Nodi igitur in quadraturis conſtituti &c.* In integrâ corporis P revolutione, nodi partim regrediuntur, partim progrediuntur, niſi fuerint in quadraturis vel in ſyzygiis conſtituti (510); dum autem in quadraturis verſantur, vis NM, quæ eorum regreſſum producit, maxime potenter agit (506); quarè nodi in quadraturis conſtituti celerrimè regrediuntur; in ſyzygiis ubi motus in latitudinem nihil perturbatur quieſcunt, in locis intermediis recedunt quidem ſingulis revolutionibus corporis P, (5[illegible]), ſed tardius quam in quadraturis, *ideoque ſemper &c.*

511. Lemma. Si fuerint tres quantitates a, $a+b$, $a+2b$ in continuâ proportione arithmeticâ, ratio 2^æ^. ad 1^am^. (quæ è tribus eſt minima) major erit quam ratio 3^æ^. (quæ eſt maxima) ad 2^am^. Eſt enim $a+b:a=\overline{a+b}\times\overline{a+b}:aa+ab=aa+2ab+bb:aa+ab$; ſed eſt $a+2b:a+b=aa+2ab:aa+ab$. Ergo cum ratio $aa+2ab+bb$ ad $aa+ab$ major ſit quam ratio $aa+2ab$ ad $aa+ab$, erit ratio $a+b$ ad a major ratione $a+2b$ ad $a+b$.

LIBER PRIMUS. PROP. LXVI. THEOR. XXVI.

Corol. 12. Omnes illi in his corollariis deſcripti errores ſunt paulò majores in conjunctione corporum *P*, *S*, quam in eorum oppoſitione; (x) idque ob majores vires generantes *NM* & *ML*.

Corol. 13. Cumque rationes horum corollariorum non pendeant à magnitudine corporis *S*, obtinent præcedentia, omnia ubi corporis *S* tanta ſtatuitur magnitudo, (y) ut circa ipſum revolvatur corporum duorum *T* & *P* ſyſtema. Et ex aucto corpore *S* auctâque



(x) * *Idque ob majores vires generantes* NM & ML. Vis LM in conjunctione eſt ut $\frac{AT}{SA^3}$, & vis lm in oppoſitione eſt ut $\frac{TB}{SB^3}$ (495). Quarè (cæteris paribus) hoc eſt, ſi fuerit $AT = TB$ vis ML in conjunctione major erit vi ml in oppoſitione propter SA^3 minorem quam SB^3. Quod erat unum. Porrò ſi AT & BT ſint æquales, tres lineæ SA, ST, SB erunt in continuâ proportione arithmeticâ & proindè SK mediocris diſtantia corporis P ab S erit æqualis ST; & quoniam SK exhibet vim acceleratricem corporis P verſus S in mediocri diſtantiâ SK, & SN exponit vim acceleratricem corporis T verſus S, (prop. 66.) erit $SN = ST$, atque adeò $NM = TM$, & $mN = Tm$. Sed quoniam PT, ſeu $AT : ST = LM : SM$, erit $SM = \frac{ST \times LM}{AT}$, & ſimiliter invenietur $Sm = \frac{ST \times lm}{AT}$, adeóque $TM = SM - ST = \frac{ST \times LM - ST \times AT}{AT}$, & $Tm = ST - sm = \frac{ST \times AT - ST \times lm}{AT}$; undè differentia $TM - Tm$, erit ut $ST \times LM + ST \times lm - ST \times 2AT$, hoc eſt, ut $LM + lm - 2AT$; Eſt autem ſumma $LM + lm$, major quam $2AT$. Nam cum ſit (495) $LM = \frac{ST^3 \times AT}{SA^3}$, & $lm = \frac{ST^3 \times AT}{SB^3}$, recta LM major eſt rectâ AT, in ratione ST^3 ad SA^3, & lm minor eſt AT in ratione SB^3 ad ST^3. Eſt verò ratio ST^3 ad SA^3, major ratione SB^3 ad ST^3 (511.) & proindè differentia rectarum LM & AT major erit quam differentia rectarum AT & lm, & ideò ſumma $LM + lm$ major eſt quam $2AT$; Quare tandem erit TM major quam Tm, ſeu vis NM major in conjunctione quam in oppoſitione; Quod erat alterum.

(y) * *Ut circà ipſum revolvatur &c.* Demonſtrationes enim ſunt eædem, ſive corpus S moveatur circum T, ſeu corpus T revolvatur circum S.

De Motu Corporum.

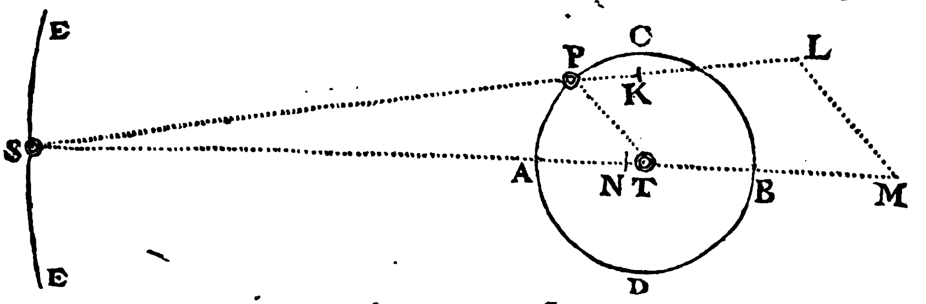
tâque ideo ipſius vi centripetâ à quâ errores corporis *P* oriuntur, evadent errores illi omnes, paribus diſtantiis, majores in hoc caſu quam in altero, ubi corpus *S* circum ſyſtema corporum *P* & *T* revolvitur.

Corol. 14. (z) Cum autem vires *NM*, *ML*, ubi corpus *S* longinquum eſt, ſint quamproximè ut vis *SK* & ratio *PT* ad *ST* conjunctim, hoc eſt, ſi detur tum diſtantia *PT*, tum corporis *S* vis abſoluta, ut *ST cub.* reciprocè; ſint autem vires illæ *NM*, *ML* cauſæ errorum & effectuum omnium, de quibus actum eſt in præcedentibus corollariis: manifeſtum eſt, quod effectus illi omnes, ſtante corporum *T* & *P* ſyſtemate, & mutatis tantum diſtantiâ *ST* & vi abſolutâ corporis *S*, ſint quamproximè in ratione compoſitâ ex ratione directâ vis abſo-

lutæ

(z) 511. * *Cum autem vires NM, ML &c.* Ob magnam diſtantiam corporis S, erit ferè L S parallela M S, & $SN = ST = SK$, ac $ML = PT$; & quoniam N M in ſyzygiis eſt ut M L in quadraturis (501). Si auctâ vel diminutâ actione corporis S, orbita C A D B unà cum lineis hinc pendentibus P T, N M, M L augeatur vel diminuatur (cor. 6. hujus prop. 66.) tres illæ lineæ in eâdem ferè ratione inter ſe (cæteris paribus) augebuntur vel diminuentur. Eſt autem vis M L ad vim S K ut recta M L ad rectam S K, ſeu quam proximè ut P T ad S T; Quarè vis M L (adeóque & vis N M) eſt quam proximè ut vis S K & ratio P T, ad S T, conjunctim, hoc eſt, ſi vis acceleratrix S K dicatur *A* ut $\frac{A \times PT}{ST}$. Porrò datâ vi abſolutâ corporis S, vis acceleratrix *A* in diſtantiâ S K ſeu S T eſt ut $\frac{1}{ST^2}$, (ex hyp.) Quarè vires N M, M L, datâ vi abſolutâ corporis S, ſunt ut $\frac{PT}{ST^3}$; hoc eſt (ſi detur diſtantia P T) ut ST^3 reciprocè. Verùm ſi variabilis ſit vis abſoluta *V* corporis S, erit vis acceleratrix *A* in diſtantiâ S T, ut vis abſoluta *V* directè & quadratum diſtantiæ S T inversè, (nam manente vi abſolutâ corporis S, vis acceleratrix eſt ut ST^2 inversè, & manente diſtantiâ S T vis acceleratrix eſt ut vis abſoluta directè, proindéque variantibus vi abſolutâ & diſtantiâ ſimul, vis acceleratrix eſt ut vis abſoluta directè & quadratum diſtantiæ inversè); Quarè ſi loco vis acceleratricis *A* ratio illa compoſita in facto $\frac{A \times PT}{ST}$ ponatur, vires NM, ML erunt quam proximè ut $\frac{V \times PT}{ST^3}$, ſeu datâ P T, ut $\frac{V}{ST^3}$, hoc eſt in ratione compoſitâ ex ratione directâ vis abſolutæ corporis S, & ratione triplicatâ inversâ diſtantiæ S T. Vis autem abſoluta corporis S, eſt (ex Dem.) in ratione compoſitâ vis acceleratricis A & quadrati diſtantiæ S T, & vis acceleratrix *A* in diſtantiâ S T eſt (per coroll. 2. prop. 4.) in ratione compoſitâ ex ratione directâ diſtantiæ S T & ratione duplicatâ inversâ temporis periodici corporis T circum S ad diſtantiam S T circulum deſcribentis, adeóque vis abſoluta corporis *S* eſt ut cubus diſtantiæ S T directè, & quadratum temporis periodici corporis T inversè. Quarè vires N M, M L (earumque effectus) quæ ſunt directè ut vis abſoluta, & inversè ut cubus diſtantiæ, ſunt reciprocè in duplicatâ ratione temporis periodici corporis T.

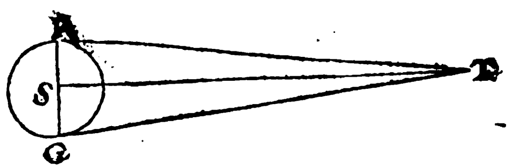
lutæ corporis S, & ratione triplicatâ inverſâ diſtantiæ ST. Unde ſi ſyſtema corporum T & P revolvatur circa corpus longinquum S; vires illæ NM, ML, & earum effectus erunt (per corol. 2. & 6. prop. IV.) reciprocè in duplica- LIBER PRIMUS. PROP. LXVI. THEOR. XXVI.



tâ ratione temporis periodici. Et inde etiam, (a) ſi magnitudo corporis S proportionalis ſit ipſius vi abſolutæ, erunt vires illæ NM, ML, & earum effectus directè ut cubus diametri apparentis longinqui corporis S è corpore T ſpectati, & vice verſâ. Namque hæ rationes eædem ſunt, atque ratio ſuperior compoſita.

Corol. 15. (b) Et quoniam ſi, manentibus orbium ESE & PAB formâ, proportionibus & inclinatione ad invicem, mutetur

(a) * *Si magnitudo* ſeu maſſa *corporis S proportionalis ſit ipſius vi abſolutæ*, dato corpore S dabitur vis illius abſoluta; unde ſi præterea data ſit diſtantia P T, *vires* N M, M L *& earum effectus erunt*, ex ſuprà demonſtratis, ut cubus diſtantiæ S T inversè; ſed diameter apparens F G corporis longinqui S ex T viſi, hoc eſt, angulus F T G ſub quo diameter F G de loco T videtur, eſt ut diſtantia S T inversè; nam cum globi S diameter parva admodum ſupponatur reſpectu diſtantiæ S T, angulus F T G, erit admodum exiguus, & globi radius S F ad S T normalis uſurpari poterit pro arcu circuli centro T & intervallo T S deſcripti, adeóque (154) angulus $FTS = \frac{FS}{ST}$, hoc eſt, ob datum radium S F, angulus F T S & ipſius duplus F T G erit ut S T inversè. *Vires igitur NM, ML earumque effectus, erunt ut cubus diametri apparentis corporis longinqui S è corpore T ſpectati.*



(b) * *Et quoniam ſi manentibus &c.* Hoc eſt, ſi corporum S & T vel maneant vel mutentur vires abſolutæ in datâ quâvis ratione, & orbium E S E & P A B, magnitudo ità mutetur, ut orbis E S E ſibi ſimilis ſemper maneat, ſicut & orbis P A B ſibi, & horum orbium inclinatio non mutetur, nec proportio ſeu ratio axium unius orbis ad axes alterius aut linearum quarumvis in uno orbe ad lineas homologas in altero orbe.

tetur eorum magnitudo, & ſi corporum *S* & *T* vel maneant, vel mutentur vires in datâ quâvis ratione; ([c]) hæ vires (hoc eſt, vis corporis *T*, quâ corpus *P* de recto tramite in orbitam *PAB* deflectere, & vis corporis *S*, quâ corpus idem *P* de orbitâ illâ deviare cogitur) agunt ſemper eodem modo, & eâdem proportione: neceſſe eſt ut ſimiles & proportionales ſint effectus omnes, & proportionalia effectuum tempora; hoc eſt, ut errores omnes lineares ſint ut orbium diametri, angulares verò iidem, qui prius, & errorum linearium ſimilium, vel angularium æqualium tempora ut orbium tempora periodica.

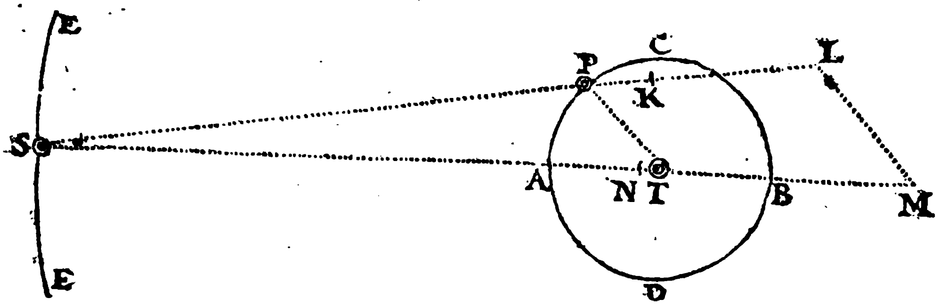
Corol. 16. Unde, ſi dentur orbium formæ & inclinatio ad invicem, & mutentur utcunque corporum magnitudines, vires & diſtantiæ; ex datis erroribus & errorum temporibus in uno caſu, colligi poſſunt errores & errorum tempora in alio quovis, quam proximè: ſed brevius hâc methodo. ([d]) Vires *NM*, *ML*, cæteris ſtantibus, ſunt ut radius *TP*, & harum effe-

(c) * *Hæ vires &c.* Vis acceleratrix quâ corpus P in loco P versùs T trahitur, eſt (512) ad vim acceleratricem quâ verſus S urgetur, in ratione compoſitâ ex ratione directâ vis abſolutæ corporis T ad vim abſolutam corporis S, & ratione inversâ duplicatâ diſtantiæ PT ad diſtantiam PS. Quarè ſi vires abſolutæ & diſtantiæ in datis rationibus mutentur, manebit eadem virium acceleratricium ratio, & ob figurarum ſimilitudinem, in ſimilibus corporum *P*, *T*, *S* poſitionibus, antè & poſt diſtantias vireſque mutatas omnium linearum SP, SK, ML, SM, NM, &c. eadem manet ratio, atque adeo vires agunt ſemper eodem módo & eâdem proportione. Neceſſe igitur eſt ut antè & poſt diſtantias, & vires mutatas in datis rationibus, ſimiles ac proportionales ſint effectus omnes & proportionalia effectuum tempora (196) hoc eſt, errores omnes lineares ſimiles à viribus ML, NM producti, ſeu deviationes corporis *P* in longitudinem & latitudinem à locis illis in quibus verſaretur, ſi viribus perturbantibus ML, NM non agitaretur, ſunt ut orbium diametri, & anguli ſub quibus é centro T deviationes illæ ſimiles videntur, ſemper manent æquales, ut patet ex naturâ figurarnm ſimilium (Lem. V. & not. 112), & errorum linearium ſimilium vel angularium æqualium tempora, ſunt ut orbium tempora periodica (196). Hæc omnia etiam obtinent, ubi corporum duorum *T*, & *P* ſyſtema circà corpus S revolvitur, ut patet, ſi loco orbis ESE in demonſtratione ponatur orbis quem corpus *T* circum S deſcribit.

(d) * *Vires NM, ML &c.* Quoniam vires NM, ML ſunt (cor. 14.) ut vis SK & ratio PT ad ST conjunctim, manentibus vi SK & ST erunt vires illæ ut radius TP & proinde aucto vel diminuto radio illo TP, manent in datâ inter ſe ratione, & quoniam ob longinquitatem corporis S ad ſimiles orbis variabilis PAB (ſed ſibi ſemper ſimilis & æquè inclinati) partes ſimiliter applicantur quamproximè, illarum effectus periodici (per coroll. 2. Lem. X.) ſunt ut vires ipſæ & quadratum temporis periodici corporis *P* circum *T* con-

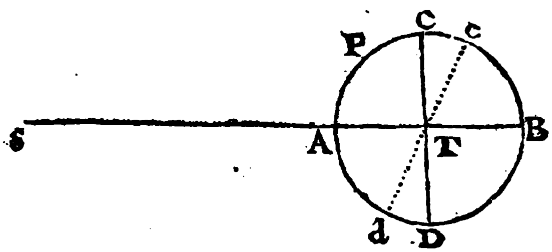
effectus periodici (per corol. 2. lem. x.) ut vires, & quadratum temporis periodici corporis *P* conjunctim. Hi ſunt errores lineares corporis *P*; & hinc errores angulares è centro *T* ſpectati (id eſt, tam motus augis & nodorum, quàm omnes

Liber Primus. Prop. LXVI. Theor. XXVI.



in longitudinem & latitudinem errores apparentes) ſunt, in quâlibet revolutione corporis *P*, ut quadratum temporis revolutionis quam proximè. Conjungantur hæ rationes cum rationibus corollarii xiv. & in quolibet corporum *T*, *P*, *S* ſyſtemate, ubi *P* circum *T* ſibi propinquum, & *T* circum *S* longinquum revol-

conjunctim, hoc eſt, ut radius TP, & quadratum temporis periodici corporis P quamproximè. Porrò ſi in orbitâ circulari vel circulo finitima P A B, ſit arcus D d error linearis periodicus v. gr. nodi D in antecedentia ad d regreſſi tempore unius revolutionis corporis *P* circum T, angulus D T d, ſub quo error ille D d è centro T videtur, hoc eſt, error angularis periodicus erit $= \frac{Dd}{TD}$ (154). Errores igitur angulares periodici ſunt ut errores lineares directè & radius T D vel T P inverſè, adeóque ut quadratum temporis periodici corporis *P* quamproximè. Et hæc quidem vera ſunt, ſtantibus vi abſolutâ corporis *S* & diſtantiâ S T & variantibus radio T P ac tempore periodico corporis P; verum ſtantibus radio T P & tempore periodico corporis *P* & variantibus vi abſolutâ corporis *S* atque diſtantiâ S T, errores periodici tum lineares, tum angulares ſunt (coroll. 14.) recipro-



cè ut quadratum temporis periodici corporis *T* circum *S*, quarè variantibus tum radio T P, & tempore periodico corporis *P*, tum radio S T, atque vi abſolutâ corporis *S*, errores angulares corporis P de centro T apparentes, erunt in ſingulis revolutionibus corporis illius *P* circum T, in ratione ex binis ſuperioribus rationibus compoſitâ, ſeu erunt ut quadratum temporis periodici corporis P, directè & quadratum temporis periodici corporis T, inverſè.

volvitur, errores angulares corporis *P*, de centro *T* apparentes, erunt, in ſingulis revolutionibus corporis illius *P*, ut quadratum temporis periodici corporis *P* directè, & quadratum temporis periodici corporis *T* inverſè. (e) Et inde motus medius augis erit in datâ ratione ad motum medium nodorum; & motus uterque erit ut tempus periodicum corporis *P* directè & quadratum temporis periodici corporis *T* inverſè. Augendo vel minuendo excentricitatem & inclinationem orbis *PAB* (f) non mutantur motus augis & nodorum ſenſibiliter, niſi ubi eædem ſunt nimis magnæ.

Corol. 17. Cum autem linea *LM* nunc major ſit nunc minor quam radius *PT*, exponatur vis mediocris *LM* per radium illum *PT*; & erit hæc ad vim mediocrem *SK* vel *SN* (quam exponere licet per *ST*) ut longitudo *PT* ad longitudinem *ST*. Eſt autem vis mediocris *SN* vel *ST*, quâ corpus *T* retinetur in orbe ſuo circum *S*, ad vim, quâ corpus *P* retinetur in orbe ſuo circum *T*, (g) in ratione compoſitâ ex ratione radii *ST*, ad radium *PT*, & ratione duplicatâ temporis periodici cor-

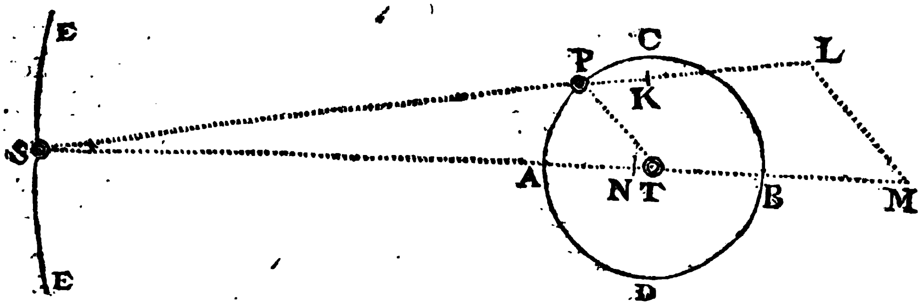
(e) * *Et indè motus medius augis &c.* Si corpus quodvis celeriùs & tardiùs vel in plagas oppoſitas per vices moveatur, illius velocitas æquabilis media, ſeu motus medius obtinetur, ſi ſpatium quod corpus illud in unam plagam latum, longo ſatis tempore percurrit, per illud notabile tempus dividatur. Hinc quoniam apſidum & nodorum motus tardior & celerior eſt per vices, nuncque in antecedentia, nunc in conſequentia fit, invenitur illorum motus medius angularis, ſi ſpatium angulare totum, quod plurium revolutionum corporis *P* tempore deſcribunt, per illud tempus dividatur. Quarè cum motus angularis periodicus augis & nodorum ſit (ex Dem.) ut quadratum temporis periodici corporis *P* directè, & quadratum temporis periodici corporis *T* inverſè, ſi ratio hæc compoſita per tempus periodicum corporis *P* pluries ſumptum dividatur, erit quotiens ſeu motus medius angularis augis & nodorum ut tempus periodicum corporis *P* directè & quadratum temporis periodici corporis *T* inverſè; & indè motus medius augis & nodorum, qui ſunt ambo ut eadem quantitas, ſeu ut tempus periodicum corporis *P* directè & quadratum temporis periodici corporis *T* inverſè, datam habent ad ſe mutuò rationem.

(f) * *Non mutantur &c.* Nam vires ML, NM motuum augis & nodorum productrices, cæteris ſtantibus, non multum mutantur, ſi augeatur vel minuatur excentricitas & inclinatio orbis PAB, niſi magna ſatis fuerit illa mutatio, ut patet ex ratione quâ vires illæ ML, NM prop. 66. determinantur.

(g) * *In ratione compoſitâ ex ratione radii ST &c.* Nam (per cor. 2. prop. 4.) vis acceleratrix mediocris ST quâ corpus *T* circum S ad diſtantiam ST circulum vel orbem circulo finitimum deſcribere ſupponitur, eſt ad vim ſimilem quâ corpus *P* in orbitâ ſuâ circulari vel circulo finitimâ retinetur in ratione compoſitâ ex ratione radii ST ad radium PT directè, & ratione duplicatâ temporis perio-

corporis *P* circum *T* ad tempus periodicum corporis *T* circum *S* Et ex æquo, vis mediocris *LM* ad vim, quâ corpus *P* retinetur in orbe ſuo circum *T* (quâve corpus idem *P*, eodem tempore periodico, circum punctum quodvis immobile *T* ad diſtantiam *PT* revolvi poſſet) eſt in ratione illâ duplicatâ periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis unà cum diſtantia *PT*, datur vis mediocris *LM*; (h) & eâ datâ, datur etiam vis *MN* quam proximè per analogiam linearum *PT*, *MN*.

LIBER PRIMUS. PROP. LXVI. THEOR. XXVII.



Corol. 18. Iiſdem legibus, quibus corpus *P* circum corpus *T* revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem *T* ad æquales ab ipſo diſtantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari annulum fluidum, rotundum ac corpori *T* concentricum; & ſingulæ annuli partes, motus ſuos omnes ad legem corporis *P* peragendo, propius accedent ad corpus *T*, & celerius movebuntur in conjunctione & oppoſitione ipſarum & corporis *S*, quam in quadraturis. Et nodi annuli hujus, ſeu interſectiones ejus cum plano orbitæ corporis *S* vel *T*, qui-

riodici corporis *T* circum S, ad tempus periodicum corporis *P* circum T, inversè. Quarè vis prior eſt ad poſteriorem in ratione compoſitâ ex ratione radii S T ad radium P T, & ratione duplicatâ temporis periodici corporis *P* ad tempus periodicum corporis *T*; cumque ſit etiam, ex Dem., vis mediocris LM ad vim mediocrem ST, ut P T ad ST, erit per compoſitionem rationum & ex æquo, vis mediocris LM, ad vim acceleratricem quâ corpus *P* retinetur in orbe ſuo circum T, ut quadratum temporis periodici corporis *P* circum T ad quadratum temporis periodici corporis *T* circum S.

(h) * *Et eâ datâ*, datur etiam vis NM (500).

DE MOTU CORPORUM. quieſcent in ſyzygiis; extra ſyzygias verò movebuntur in antecedentia, & velociſſimè quidem in quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, (i) & axis ejus ſingulis revolutionibus oſcillabitur, completâque revolutione ad priſtinum ſitum redibit, niſi quâtenus per præceſſionem nodorum circumfertur.

Corol. 19. Fingas jam globum corporis *T*, ex materiâ non fluidâ conſtantem, ampliari & extendi uſque ad hunc annulum, & alveo per circuitum excavato continere aquam, motuque eodem periodico circa axem ſuum uniformiter revolvi. Hic liquor per vices acceleratus & retardatus (ut in ſuperiore corollario) (k) in ſyzygiis velocior erit, in quadraturis tardior quam ſuperficies globi, & ſic fluet in alveo refluetque ad modum maris. Aqua, revolvendo circa globi centrum quieſcens, ſi tollatur attractio corporis *S*, nullum acquiret motum fluxus & refluxus. (l) Par eſt ratio globi uniformiter progredientis in directum, & interea revolventis circa centrum ſuum (per legum corol. v.) ut & globi de curſu rectilineo uniformiter tracti, (per legum corol. 6.) Accedat autem corpus *S*, & ab ipſius inæquabili attractione mox turbabitur aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. (m) Vis autem *LM* trahet aquam deorſum in quadraturis, facietque ipſam

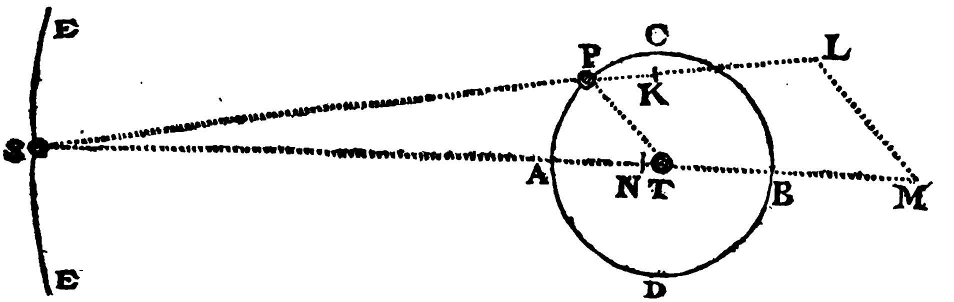
(i) * *Et axis ejus* ſeu recta per centrum annuli ducta ad planum ejus perpendiculariter, cum plano illo *ſingulis revolutionibus oſcillabitur*, hoc eſt, ad planum E S T magis & minus per vices inclinabitur (cor. 10.) *completaque* &c. totum verò corollarium patet ex coroll. 3. 5. 10. 11. 13.

(k) * *In ſyzygiis velocior erit &c.* Per cor. 18. & 3. Nam velocitas uniformis quâ globus circà axem ſuum revolvitur eodem tempore periodico quo pars quælibet fluidi ſuam revolutionem abſolvit, media erit inter maximam velocitatem fluidi in ſyzygiis & minimam in quadraturis.

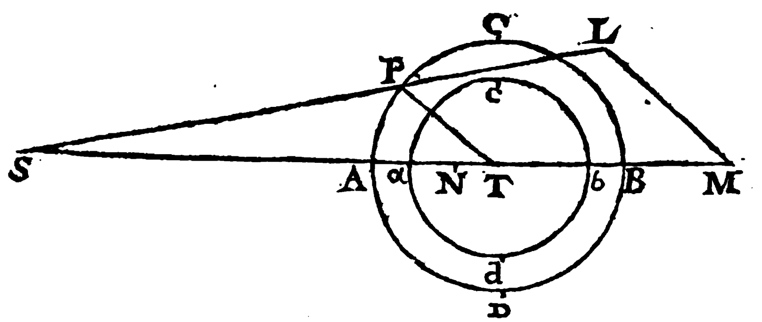
(l) * *Par eſt ratio &c.* Id eſt, excluſâ actione corporis S aqua uniformiter revolvendo circum centrum globi vel uniformiter moti in directum vel de curſu rectilineo per lineas parallelas uniformiter tracti, nullum acquiret motum fluxûs & refluxûs, *accedat autem* &c.

(m) * 514. *Vis autem LM &c.* Patet per coroll. 5. Verum ut totum hoc corollarium 19um. clarius intelligatur, ſit c a d b globi ſolidi æquator hoc eſt, circulus globi maximus ad axem rotationis globi perpendicularis CADB zona fluida ſatis profunda, ſeu annulus fluidus globo circumpoſitus, & ſupponendo quod centrum gravitatis globi ſolidi accuratè vel quamproximè coincidat cum figuræ centro T, globus eodem quamproxime modo trahetur à corpore longinquo S, & trahet ipſe particulam P fluidi (71) ac ſi tota illius

ipſam deſcendere uſque ad ſyzygias; & vis *KL* trahet eandem furſum in ſyzygiis, ſiſtetque deſcenſum ejus & faciet ipſam aſcendere uſque ad quadraturas: niſi quâtenus motus fluendi & refluendi ab alveo aquæ dirigatur, & per frictionem aliquâtenus retardetur.



Corol. 20. Si annulus jam rigeat, & minuatur globus, ceſſabit motus fluendi & refluendi; (n) ſed oſcillatorius ille inclinationis motus & præceſſio nodorum manebunt. Habeat globus eundem axem cum annulo, gyroſque compleat iiſdem temporibus, & ſuperficie ſuâ contingat ipſum interius, eique inhæreat; & participando motum ejus, compages utriuſque oſcillabitur, & nodi regredientur. (o) Nam globus, ut mox dicetur, ad



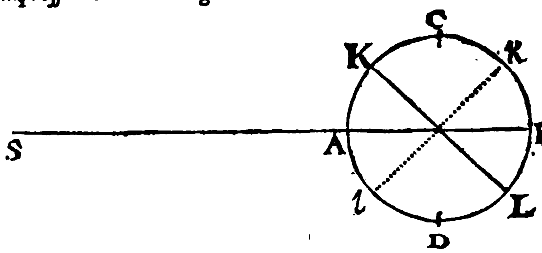
illius maſſa eſſet in centro T coacta (quod quidem accuratè verum eſſe quibuſdam in caſibus poſteà demonſtrabitur), ſed hic approximatio ſufficit; quare fluidi particula quævis P à corpore *S* inæqualiter attracta totuſque proinde annulus movebuntur, ut in coroll. 19°. ex corollariis præcedentibus determinatum eſt.

(n) * *Sed oſcillatorius ille &c.* Patet per cor. 18. & not. ſuperiorem.

(o) * *Nam globus indifferens eſt &c.* Liquet etiam ex legibus 1ª. & 2ª. & not. 9.

ſuſcipiendas impreſſiones omnes indifferens eſt. Annuli globo orbati maximus inclinationis angulus eſt, ubi nodi ſunt in ſyzygiis. Inde in progreſſu nodorum ad quadraturas conatur is inclinationem ſuam minuere, & iſto conatu motum imprimit globo toti. (p) Retinet globus motum impreſſum, uſque dum annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatque motum novum in contrariam partem: Atque (q) hâc ratione maximus decreſcentis inclinationis motus fit in quadraturis nodorum, & minimus inclinationis angulus in octantibus poſt quadraturas; dein maximus reclinationis motus in ſyzygiis, & maximus angulus in octantibus proximis. Et eadem eſt ratio globi annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior eſt paulò quam juxta polos, vel conſtat ex materiâ paulo denſiore. (r) Supplet enim vicem annuli iſte materiæ in æquatoris regionibus exceſſus. Et quanquam, auctâ utcunque globi hujus vi centripetâ, tendere ſupponantur omnes ejus partes deorſum,

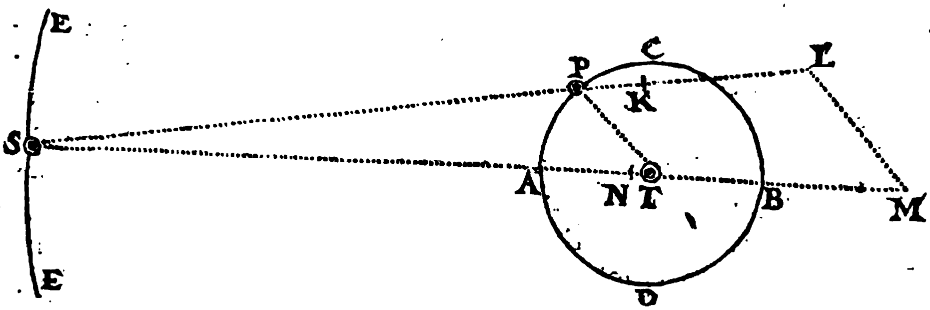
(p) * *Retinet globus motum impreſſum.* Per Leg. 1. & 2.



(q) * *Atque hâc ratione maximus inclinationis motus fit in quadraturis nodorum* (per coroll. 18. & 10.) non ideò tamen ibidem fit minimus inclinationis angulus, ſed in octantibus poſt quadraturas. Sint enim nodi K & L in octantibus poſt ſyzygias A & B, & retrogrediendo accedant ad quadraturas C, D; dum nodus K percurrit arcum KC, & nodus L, arcum LD, inclinatio per actionem vis NM, continuò decreſcit, cumque nodus K, pervenit in C, & tranſit ad octantem k perſeverat, ex inertiâ materiæ, motus inclinationis decreſcentis per totum arcum KC impreſſus; Licet vis NM in contrarium agat per totum arcum Ck=CK; vis enim NM per arcum Ck motum inclinationis decreſcentis iiſdem gradibus diminuit, quibus per arcum KC productus & acceleratus eſt. Quare ille decreſcentis inclinationis motus penitùs non deſtruitur, niſi nodus K pervenerit in k tumque vis NM planum reclinat, hoc eſt, nodo exiſtente in k incipit motus reclinationis ſive motus inclinationis creſcentis & perſeverat uſque ad octantem proximum L atque ibi ceſſat. Liquet igitur minimum angulum inclinationis fieri in octantibus nodorum k, l poſt quadraturas C, D maximum verò dum nodi verſantur in octantibus K & L poſt ſyzygias A, B.

(r) * *Supplet enim vicem annuli &c.* Patet per not. 514. Si materiæ in æquatoris regionibus exceſſus per annulum CcADd, (vid. fig. not. 514) exhibeatur & reliqua globi materia in centro T coacta intelligatur.

ſum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen phænomena hujus & præcedentis corollarii (ſ) vix inde mutabuntur; niſi quod loca maximarum & minimarum altitudinum



aquæ diverſa erunt. Aqua enim jam in orbe ſuo ſuſtinetur & permanet, non per vim ſuam centrifugam, ſed per alveum in quo fluit. Et præterea vis LM trahit aquam deorſum maxime in quadraturis, & vis KL ſeu $NM-LM$ trahit

(ſ) * *Vix indè mutabuntur.* Nam major partium globi in centrum T gravitas non impedit quin annulus fluidus vel ſolidus, impreſſiones virium L M, N M ſuſcipiat, loca tamen maximarum & minimarum altitudinum aquæ diverſa erunt. Hucuſque enim ſuppoſuimus particulas aquæ ex virium centripetæ & centrifugæ æquilibrio, in orbe ſuo ſuſtineri & permanere inſtar corporis ſolitarii *P* circum T in ſpatio libero revolventis; atquè indè ex cor. 5. oſtenſum eſt in cor. 18. maximam aquæ altitudinem in quadraturas incidere, minimam in ſyzygias. Verùm ſi manente eâdem vi centrifugâ augeatur vis centripeta, ſeu gravitas particularum aquæ, particulæ illæ non vi ſuâ centrifugâ, ſed alvei parietibus, ut in mari atque fluminibus telluris contingit, ſuſtinentur & in orbe ſuo permanent ac proinde non amplius ad legem corporis ſolitarii circum centrum T, in ſpatio libero revolventis à centro illo T recedunt, vel ad illud accedunt. Loca igitur maximarum & minimarum altitudinum aquæ diverſa erunt. Velocitas tamen partium aquæ, cæteris paribus, maxima erit in ſyzygiis, minima in quadraturis (per cor. 3). Præterea vis LM addititia trahit aquam deorſum, ſeu ad centrum T, maximè in quadraturis ([illegible]) & vis ablatitia KL trahit eandem ſurſum, maximè in ſyzygiis (501) & ideò ſi globus cum aquâ circumpoſitâ non revolveretur circà centrum T, minimæ aquarum altitudines in quadraturis C & D, maximæ in ſyzygiis A & B eſſent; verum revolvente cum globo aquâ à C ad A, vis addititia poſt quadraturas agens, aquam deorſum ſemper urget, donec vi ablatitiâ vincatur; & ſimiliter hæc vis ablatitia poſt ſyzygias ſurſum trahit aquas, quarum proindè minimæ altitudines non incident in quadraturas, ſed poſt quadraturas, maximæ verò poſt ſyzygias. Inſuper rotatio globi circà proprium axem maximas aquarum altitudines à ſyzygiis A & B verſus quadraturas D & C transfert, intereadum vires LM, NM ſimul junctæ maximas eas aquarum altitudines in ſyzygiis inſtaurare perpetuò nituntur, aqua autem à C & D continuò fluit verſus A & B, dum elevatio ab A verſus D & à B verſus C transfertur, & ideò inter A & D ut & inter B & C dantur duo motus contrarii quibus aqua accumulatur ità ut altitudines maximæ inter hæc puncta incidant fere circà octantes.

DE MOTU CORPORUM.

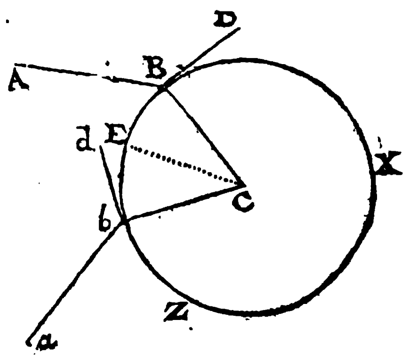
hit eandem ſurſum maximè in ſyzygiis. Et hæ vires conjunctæ deſinunt trahere aquam deorſum & incipiunt trahere aquam ſurſum in octantibus ante ſyzygias, ac deſinunt trahere aquam ſurſum incipiuntque trahere aquam deorſum in octantibus poſt ſyzygias. Et inde maxima aquæ altitudo evenire poteſt in octantibus poſt ſyzygias, & minima in octantibus poſt quadraturas circiter; niſi quâtenus motus aſcendendi vel deſcendendi ab his viribus impreſſus vel per vim inſitam aquæ paulò diutius perſeveret, vel per impedimenta alvei paulò citius ſiſtatur.

Corol. 21. Eâdem ratione, quâ materia globi juxta æquatorem redundans efficit ut nodi regrediantur, atque ideo per hujus incrementum augetur iſte regreſſus, per diminutionem verò diminuitur, & per ablationem tollitur; (t) ſi materia pluſquam redundans tollatur, hoc eſt ſi globus juxta æquatorem vel depreſſior reddatur, vel rarior quam juxta polos, orietur motus nodorum in conſequentia.

Corol. 22. Et inde viciſſim, ex motu nodorum innoteſcit conſtitutio globi. Nimirum ſi globus polos eoſdem conſtanter ſervat, & motus fit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat; ſi in conſequentia, deficit. Pone globum uniformem & perfectè circinatum in ſpatiis liberis primo quieſcere; dein impetu quocunque obliquè in ſuperficiem ſuam facto propelli, & motum inde concipere (u) partim circularem, partim in directum

(t) * *Si materia pluſquam redundans tollatur*, ſeu ſi materia redundans negativa fiat, motus nodorum qui erat in antecedentia, negativus evadet, hoc eſt, orietur motus nodorum in conſequentia.

(u) * *Partim circularem, partim in directum.* Vis A B quâ globus BXZ obliquè impellitur, ſecundum directionem A B, in duas vires reſolvitur, quarum altera ad centrum C juxta radium B C dirigitur, ei motum globi in directum producit, altera ſecundum tangentem B D radio B C normalem agit, & motum rotationis circà axem plano ABDXC perpendicularem inducit.



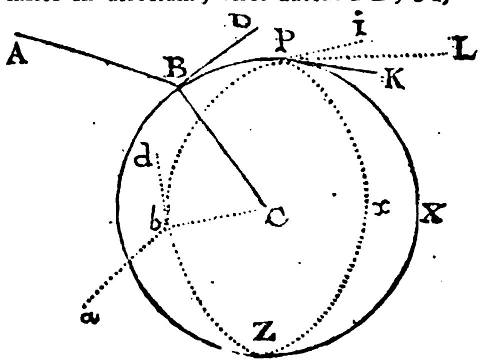
rectum. Quoniam globus iſte ad axes omnes per centrum ſuum tranſeuntes indifferenter ſe habet, neque propenſior eſt in unum axem, unumve axis ſitum, (x) quam in alium quemvis; perſpicuum eſt, quod is axem ſuum, axiſque inclinationem vi propriâ nunquam mutabit. (y) Impellatur jam globus obliquè, in eâdem illâ ſuperficiei parte, quâ prius, impulſu quocunque novo; & cùm citior vel ſerior impulſus effectum nil mutet, manifeſtum eſt, quod hi duo impulſus ſucceſſivè impreſſi eundem producent motum, ac ſi ſimul impreſſi fuiſſent, hoc eſt, eundem, ac ſi globus vi ſimplici ex utroque (per legum corol. 2.) compoſitâ impulſus fuiſſet, atque ideo ſimplicem, circa axem inclinatione datum. (z) Et par eſt ratio impulsûs ſecundi facti in locum alium quemvis in æquatore motus primi; ut & impulſus primi facti in locum quemvis in æquatore motus, quem impulſus ſecundus ſine primo generaret; atque ideo impulſuum amborum factorum in loca quæcunque: (a) genera-

(x) * *Quam in alium quemvis*; antequam motus imprimatur, perſpicuum eſt quod is axem ſuum rotationis axiſque inclinationem ad planum quodvis poſitione datum vi propriâ nunquam mutabit.

(y) * *Impellatur jam globus obliquè, in eâdem illâ ſuperficiei parte* B *quâ priùs &c.*

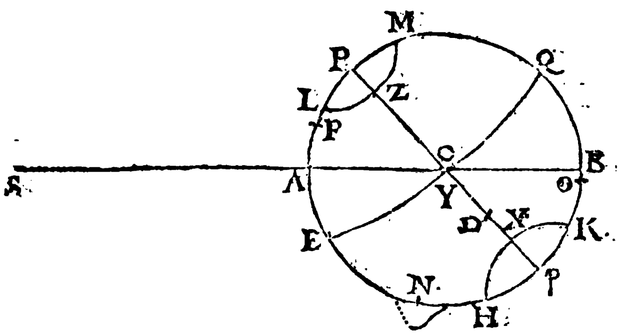
(z) * *Et par eſt ratio impulsûs ſecundi facti in locum alium quemvis b, in æquatore B X Z motûs primi.* Reſolvitur enim vis a b in duas vires, quarum una ad centrum C dirigitur per radium b C; alia ſecundùm tangentem b d agit; & vires duæ utriuſque impulſus ad centrum C per radios B C, b C directæ in unam componentur ſecundùm directionem radii alicujus E C agentem, quâ globus in directum movebitur uniformiter; vires autem B D, b d quæ rotationem globi producunt, eodem modo componuntur ad unicum rotationis motum efficiendum ac ſi fuiſſet vis B D in loco b impreſſa, aut vis b d, in loco B æquatoris B X Z motûs primi; vis enim B D eundem rotationis motum inducit, ſivè imprimatur in B, ſivè in b.

(a) * *Generabunt hi &c.* Globus BPXZb duabus viribus A B, a b obliquè impellatur, iiſque ſingulis in duas alias vires, ſecundùm directiones B C, B D; b c, b d ut ſuprà diviſis, ſit B P X Z æquator quem punctum B vi B D deſcribit, & b P x Z æquator alter quem punctum b vi b d deſcriberet, horum æquatorum communes interſectiones P, Z; vires quæ ſecundum radios B C, b c, agunt in unam componentur, ut ſuprà, quâ globus movebitur uniformiter in directum; vires autem B D, b d,



eoſdem rotationis motus ſeorſim producunt quos producerent, ſi in punctum P ſingulæ agerent ſeorſim, forentque P K, P i; ſed vires duæ P K, P i, in unam P L componuntur quâ globus circà æquatorem unicum rotatur. Quare vires ſeu impulſus A B, a b generabunt motum unicum ſimplicem ac unifor-

bunt hi eundem motum circularem ac ſi ſimul & ſemel in locum interſectionis æquatorum motuum illorum, quos ſeorſim generarent, fuiſſent impreſſi. Globus igitur homogeneus & perfectus non retinet motus plures diſtinctos, ſed impreſſos omnes componit & ad unum reducit, & quatenus in ſe eſt, gyratur ſemper motu ſimplici & uniformi circa axem unicum, inclinatione ſemper invariabili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem axis, aut rotationis velocitatem mutare poteſt. Si globus plano quocunque, per centrum ſuum & centrum in quod vis dirigitur tranſeunte, dividi intelligatur in duo hemiſphæria; urgebit ſemper vis illa utrumque hemiſphærium æqualiter, & propterea globum, quoad motum rotationis, (b) nullam in partem inclinabit. Addatur vero alicubi inter polum & æquatorem materia nova in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi à centro ſui motus, turbabit mo-



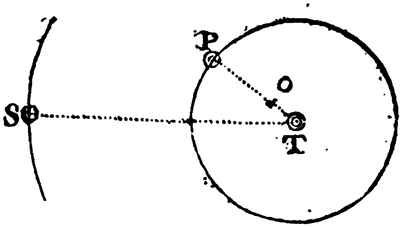
uniformem, tum directum, tum circularem circà axem unicum inclinatione ſemper invariabili datum adeóque & ſibi ſemper parallelum.

(b) * *Nullam in partem inclinabit.* Sit S virium centrum, APQE globus circà axem Pp revolvens, SCB planum per centrum globi C & per centrum virium S tranſiens, globumque dividens in duo hemiſpheria APB, ApB; vis centripeta urgebit ſemper utrumque hemiſpherium æqualiter versùs S, & propterea globum quoad motum rotationis nullam in partem inclinabit, manebitque proinde eadem axis Pp inclinatio. Addatur verò alicubi, v. gr. in N, inter polum p & æquatorem EYQ materia nova in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi à centro ſui motûs D, turbabit motum globi, quod partem globi N, cui adhæret validius trahat quam vis centrifuga partem oppoſitam O, magis depreſſam; & ideò faciet ut poli P, p, errent per ſuperficiem globi & circulos LZM, HXK, circum ſe punctumque ſibi oppoſitum deſcribant. Nam cum materia illa eſt in loco N, ſuâ majori vi centrifugâ facit ut polus p accedat ad H & polus P ad M, ſublato partium globi æquilibrio; unde materiâ illâ revolvente, poli H & M cir-

tum globi, facietque ut poli ejus errent per ipſius ſuperficiem, & circulos circum ſe punctumque ſibi oppoſitum perpetuò deſcribant. Neque corrigetur iſta vagationis enormitas, niſi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in caſu (per corol. XXI.) nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, quâ ratione (per corol. XX.) nodi regredientur; vel denique ex alterâ axis parte addendo materiam novam, quâ mons inter movendum libretur, & hoc pacto nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæcce nova materia ſunt vel polo vel æquatori propiores.

PROPOSITIO LXVII. THEOREMA XXVII.

Poſitis iiſdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, circa interiorum P, T commune gravitatis centrum O, radiis ad centrum illud ductis, deſcribit areas temporibus magis proportionales & orbem ad formam ellipſeos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maximum T, radiis ad ipſum ductis, deſcribere poteſt.



Nam corporis S attractiones verſus T & P componunt ipſius attractionem abſolutam, quæ magis dirigitur in corporum T & P commune gravitatis centrum O, quam in corpus maximum T, quæque quadrato diſtantiæ SO magis eſt proportionalis reciprocè, quam quadrato diſtantiæ ST: (c) ut rem perpendenti facile conſtabit.

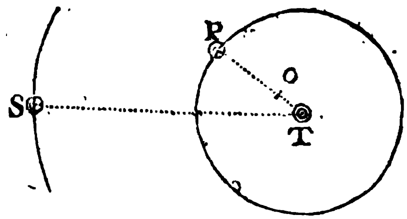
circulos H X K H, M Z L M deſcribunt in ſuperficie globi circà puncta P, p, ſive circa loca polorum antequam materia in N addita eſſet. *Neque corrigetur iſta vagationis enormitas, niſi locando montem illum vel in polo alterutro* p vel P ubi polum non magis in unam partem trahit quam in alteram; *vel in æquatore* E Y Q, ubi polum unum non magis trahit quam alterum, *vel ex alterâ axis parte* in O *addendo materiam novam quâ motus in* N *inter movendum libratur*, ſeu quâ axis in partes oppoſitas æque trahatur, vel etiam addendo materiam novam ex alterâ æquatoris parte in R, quâ polus P tantum trahatur quantum polus p à materiâ in N poſitâ.

(c) * *Ut rem perpendenti facilè conſtabit.* Nam vis acceleratricis compoſitæ quâ corpus S à corporibus T & P trahi-

 tur

PROPOSITIO LXVIII. THEOREMA XXVIII.

Poſitis iiſdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, circa interiorum P & T commune gravitatis centrum O, radiis ad centrum illud ductis, deſcribit areas temporibus magis proportionales, & orbem ad formam ellipſeos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, ſi corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atque cætera agitetur, quam ſi id vel non attractum quieſcat, vel multò magis aut multò minus attractum aut multò magis aut multò minus agitetur.



(d) Demonſtratur eodem fere modo cum prop. LXVI. ſed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Sufficeret rem ſic æſtimare. Ex demonſtratione propoſitionis noviſſimæ liquet centrum, in quod corpus *S* conjunctis viribus urgetur, proximum eſſe communi centro gravitatis duorum illorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, & quieſceret commune centrum gravitatis corporum trium; deſcriberent corpus *S* ex unâ parte, & commune centrum aliorum duorum ex alterâ parte, circa commune omnium centrum quieſcens, ellipſes accuratas. (e) Liquet hoc per corollarium ſecundum propoſitionis LVIII. col-

tur directio cadit inter lineas SP, ST, & cæteris paribus, magis accedit ad ST, quam ad SP (ſi modò corpus majus *T* cæteris paribus magis trahat quam corpus minus *P*) quemadmodum centrum gravitatis O, propius eſt corpori *T* quam corpori P; prætereà manente diſtantiâ ST, vis acceleratrix corporis *S* versùs *P* augetur vel diminuitur, dum decreſcit vel creſcit diſtantia SP, & ſimiliter diſtantia SO, augetur vel diminuitur, prout creſcit vel decreſcit SP; Quare attractio abſoluta (ſeu tota) corporis *S* quadrato diſtantiæ SO magis proportionalis eſt reciprocè, quam quadrato diſtantiæ ST; inſuper commune gravitatis centrum O fere ſpectari poteſt tanquam punctum in quo corporum *T* & *P* vires phyſice uniuntur.

(d) * *Demonſtratur eodem ferè modo &c.* Nimirum reſolvendo ſingulas attractiones corporis *S* versùs P & T in alias quarum duæ ad centrum O dirigantur & aliæ duæ directiones habeant rectæ TP parallelas.

(e) * *Liquet hoc &c.* Nam ſi centrum in quod corpus S conjunctis viribus urgetur

collatum cum demonſtratis in prop. LXIV. & LXV. Perturbatur iſte motus ellipticus aliquantulum per diſtantiam centri duorum à centro, in quod tertium *S* attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, & augebitur perturbatio. Proinde minima eſt perturbatio, ubi commune trium centrum quieſcit; hoc eſt, ubi corpus intimum & maximum *T* lege cæterorum attrahitur: fitque major ſemper, ubi trium commune illud centrum, (f) minuendo motum corporis *T*, moveri incipit, & magis deinceps magiſque agitatur.

Corol. Et hinc, ſi corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quod orbitæ deſcriptæ propius accedent ad ellipticas, & arearum deſcriptiones fient magis æquabiles, ſi corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ ſunt ut eorum vires abſolutæ directè & quadrata diſtantiarum inversè, ſe mutuo trahant agitentque, & orbitæ cujuſque umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum ([g] nimirum umbilicus orbitæ primæ & intimæ in centro gravitatis corporis maximi & intimi; ille orbitæ ſecundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iſte ter-

tur coincideret cum centro O gravitatis communi duorum corporum *P* & *T* hæc duo corpora *P* & *T* ellipſes accuratas ſeorſim deſcriberent circum ſe mutuò & circum centrum illud O (per coroll. 2. prop. 58). Et prætereà corpus S ex unâ parte & duorum aliorum ſyſtema tanquam unum corpus conſideratum, hoc eſt, eorum commune gravitatis centrum O ex alterâ parte ellipſes accuratas deſcriberent circum commune trium *S*, *T*, *P* centrum gravitatis quieſcens (per coroll. 2. prop. 58.). Quod adhuc clarius intelligetur, ſi legantur propoſitiones 64. 65. Perturbatur iſte motus ellipticus aliquantulum per diſtantiam centri O, duorum *P* & *T* à centro in quod tertium *S* trahitur. *Detur præterea motus* non uniformis in directum *communi trium centro*, (quod continget, ſi corpus intimum & maximum *T*, lege cæterorum non attrahitur, ut ex dictis patet) *& augebitur perturbatio, proindè &c.*

(f) * *Minuendo motum corporis T &c.* Quâ ratione fit ut centrum commune trium corporum, intereà dum corpora *S* & *P* moventur, nunc accedat ad corpus *T* nunc ab illo recedat, pro mutatâ corporum illorum diſtantiâ, & hinc magis ac magis perturbabitur motus ellipticus & magis ac magis deinceps agitabitur centrum commune gravitatis trium corporum.

(g) * *Nimirum umbilicus orbitæ primæ & intimæ*, quam v. gr. corpus parvum *P* hic deſcribit *in centro gravitatis corporis maximi & intimi T* quod ferè coincidit cum communi centro O gravitatis duorum *P* & *T* (per caſ. 1. prop. 65.); umbilicus *orbitæ ſecundæ* quam v. gr. corpus *S* deſcribit *in communi centro gravitatis* O, *corporum duorum intimorum P* & *T*; umbilicus *tertiæ* orbitæ quam aliud corpus longius diſtans deſcriberet *in communi centro gravitatis trium interiorum P*, *T*, *S* &c. Nam idem eſt ratiocinium ſeu tria ſeu quatuor aut plura ſint corpora (ut in prop. 64. 65.)

De Motu Corporum.

tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum; & ſic deinceps) quam ſi corpus intimum quieſcat & ſtatuatur communis umbilicus orbitarum omnium.

PROPOSITIO LXIX. THEOREMA XXIX.

In ſyſtemate corporum plurium A, B, C, D, *&c. ſi corpus aliquod* A *trahit cætera omnia* B, C, D, *&c. viribus acceleratricibus quæ ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à trahente; & corpus aliud* B *trahit etiam cætera* A, C, D, *&c. viribus quæ ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à trahente: erunt abſolutæ corporum trahentium* A, B *vires ad invicem, ut ſunt ipſa corpora* A, B, *quorum ſunt vires.*

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium *B*, *C*, *D* verſus *A*, paribus diſtantiis, ſibi invicem æquantur ex hypotheſi; & ſimiliter attractiones acceleratrices corporum omnium verſus *B*, paribus diſtantiis, ſibi invicem æquantur. Eſt autem abſoluta vis attractiva corporis *A* ad vim abſolutam attractivam corporis *B*, (h) ut attractio acceleratrix corporum omnium verſus *A* ad attractionem acceleratricem corporum omnium verſus *B*, paribus diſtantiis; (i) & ita eſt attractio acceleratrix corporis *B* verſus *A*, ad attractionem acceleratricem corporis *A* verſus *B*. Sed attractio acceleratrix corporis *B* verſus *A* eſt ad attractionem acceleratricem corporis *A* verſus *B*, ut maſſa corporis *A* ad maſſam corporis *B*; propterea quod vires motrices, quæ (per definitionem ſecundam, ſeptimam & octavam) ſunt ut vires acceleratrices & corpora attracta conjunctim, hic ſunt (per motus legem tertiam) (k) ſibi invicem æquales. Ergo abſoluta vis attractiva corporis *A* eſt ad abſo-

(h) * *Ut attractio acceleratrix corporum omnium*, ſeu ut attractio acceleratrix uniuſcujuſque corporis verſus A &c. Patet enim quod ſi vis abſoluta dupla vel tripla &c. ſit, actio quoque acceleratrix in diſtantiâ datâ dupla vel tripla erit.

(i) * *Et ita eſt attractio acceleratrix corporis B verſus A, ad attractionem acceleratricem corporis A verſus* B, ob diſtantiam inter B & A, & A & B eandem.

(k) * *Sibi invicem æquales.* Si enim attractio acceleratrix corporis B verſus A dicatur V & attractio acceleratrix corporis A verſus B dicatur v; vis motrix in B, erit $B \times V$; in A erit $A \times v$; & (per leg. 3am.) $B \times V = A \times v$. Unde $V : v = A : B$. Ergò *abſoluta* &c.

* *Vi-*

lutam vim attractivam corporis *B*, ut maſſa corporis *A* ad maſſam corporis *B*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi ſingula ſyſtematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. ſeorſim ſpectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à trahente; erunt corporum illorum omnium vires abſolutæ ad invicem ut ſunt ipſa corpora.

Corol. 2. Eodem argumento, ſi ſingula ſyſtematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. ſeorſim ſpectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ ſunt vel reciprocè, vel directè in ratione dignitatis cujuſcunque diſtantiarum à trahente, quæve ſecundum legem quamcunque communem ex diſtantiis ab unoquoque trahente definiuntur; conſtat quod corporum illorum vires (l) abſolutæ ſunt ut corpora.

Corol. 3. In ſyſtemate corporum quorum vires decreſcunt in ratione duplicatâ diſtantiarum, ſi minora circa maximum in ellipſibus, umbilicum communem in maximi illius centro habentibus, (m) quam fieri poteſt accuratiſſimis revolvantur; & radiis ad maximum illud ductis deſcribant areas temporibus quam maximè proportionales: erunt corporum illorum vires abſolutæ ad invicem, aut accuratè aut quamproximè, in ratione corporum; & (n) contra. Patet per corol. prop. LXVIII. collatum cum hujus corol. 1.

Scho-

(l) * *Vires abſolutæ ſunt ut corpora.* Omnia enim ratiocinia eadem manent in hujus corollarii hypotheſi ac in demonſtratione & hypotheſi propoſitionis.

(m) * *Quam fieri poteſt accuratiſſimis revolvantur*, ut in duobus caſibus prop. 65. expoſitum eſt.

(n) * *Et contrà.* Si vires corporum illorum abſolutæ ſint ad invicem in ratione corporum, & minora corpora circà maximum in ellipſibus umbilicum communem in maximi illius centro habentibus, quam fieri poteſt, accuratiſſimis revolvantur, & radiis ad maximum illud ductis deſcribant areas temporibus quam maximè proportionales, corporum illorum ſeorſim ſpectatorum vires acceleratrices decreſcent in ratione duplicatâ diſtantiarum aut accuratè aut quam proximè; ut liquet ex coroll. 2°. prop. 58. collato cum prop. 64. 65.

De Motu Corporum.

Scholium.

His propoſitionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas, & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi ſolent. Rationi enim conſentaneum eſt, ut vires, quæ ad corpora diriguntur, pendeant ab eorundem naturâ & quantitate, ut fit in magneticis. Et quoties hujuſmodi caſus incidunt, æſtimandæ erunt corporum attractiones, aſſignando ſingulis eorum particulis vires proprias, & colligendo ſummas virium. Vocem attractionis hic generaliter uſurpo pro corporum conatu quocunque accedendi ad invicem: ſive conatus iſte fiat ab actione corporum vel ſe mutuo petentium, vel per ſpiritus emiſſos ſe invicem agitantium; ſive is ab actione ætheris, aut aëris, mediive cujuſcunque ſeu corporei ſeu incorporei oriatur corpora innatantia in ſe invicem utcunque impellentis. Eodem ſenſu generali uſurpo vocem *impulſus*, non ſpecies virium & qualitates phyſicas, ſed quantitates & proportiones mathematicas in hoc tractatu expendens ut in definitionibus explicui. In matheſi inveſtigandæ ſunt virium quantitates & rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuſcunque poſitis conſequentur: deinde, ubi in phyſicam deſcenditur conferendæ ſunt hæ rationes cum phænomenis; ut innoteſcat quænam virium conditiones ſingulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium ſpeciebus, cauſis & rationibus phyſicis tutius diſputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora ſphærica, ex particulis modo jam expoſito attractivis conſtantia, debeant in ſe mutuò agere; & quales motus inde conſequantur.

SEC

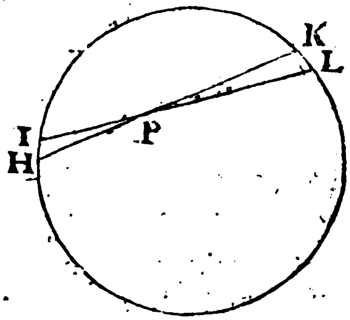
SECTIO XII.

De corporum ſphæricorum viribus attractivis.

PROPOSITIO LXX. THEOREMA XXX.

Si ad ſphæricæ ſuperficiei puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis: dico quod corpuſculum intra ſuperficiem conſtitutum his viribus nullam in partem attrahitur.

Sit *HIKL* ſuperficies illa ſphærica, & *P* corpuſculum intus conſtitutum. Per *P* agantur ad hanc ſuperficiem lineæ duæ *HK*, *IL*, arcus quam minimos *HI*, *KL* intercipientes; &, ob triangula *HPI*, *LPK* (per corol. 3. lem. VII.) (o) ſimilia, arcus illi erunt diſtantiis *HP*, *LP* proportionales; & ſuperficiei ſphæricæ particulæ quævis ad *HI* & *KL*, rectis per punctum *P* tranſeuntibus undique terminatæ, erunt in duplicatâ illâ ratione. Ergo vires harum particularum in corpus *P* exercitæ ſunt inter ſe æquales. Sunt enim ut particulæ directè, & quadrata diſtantiarum inverſe. Et hæ duæ rationes componunt rationem æqualitatis. Attractiones igitur, in contrarias partes æqualiter factæ, ſe mutuo deſtruent. Et ſimili argumento, attractiones omnes per totam ſphæricam ſuperficiem à contrariis attractionibus deſtruuntur. Proinde corpus *P* nullam in partem his attractionibus impellitur. *Q. E. D.*



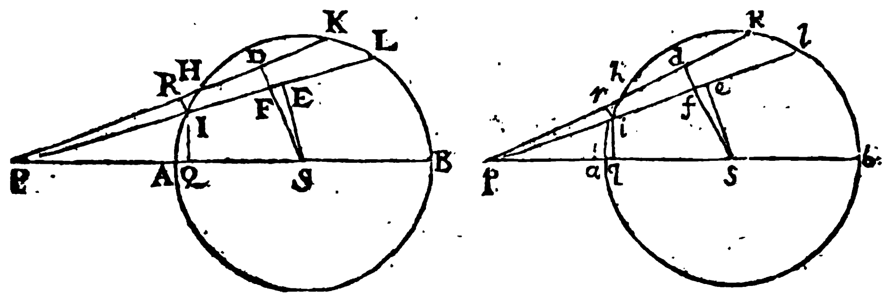
PRO-

(o) * *Similia &c.* Anguli enim HPI, LPK ad verticem oppoſiti, & anguli HIL, LKH eidem arcui inſiſtentes æquantur (per prop. 27. Lib. 3. Elem.) Nam arcus evaneſcentes IH, KL, pro ipſorum chordis uſurpari poſſunt (per cor. 3. Lem. 7.) Quare arcus HI, KL diſtantiis HP, LP proportionales ſunt, & hinc ſi ad ſuperficiem ſphæricam per punctum P ductæ intelligantur innumeræ rectæ ad arcus quamminimos ut HI, KL terminatæ, rectæ illæ figuras ſolidas (pyramides vel conos) ſimiles formabunt quorum baſes in ſuperficie ſphæricâ ſimiles erunt, & proinde (per Lem. 5.) rationem habebunt duplicatam laterum HI, KL ſeu diſtantiarum HP, LP. *Ergo vires &c.*

PROPOSITIO LXXI. THEOREMA XXXI.

Iiſdem poſitis, dico quod corpuſculum extra ſphæricam ſuperficiem conſtitutum attrahitur ad centrum ſphæræ; vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab eodem centro.

Sint *AHKB*, *ahkb* æquales duæ ſuperficies ſphæricæ, centris *S*, *s*, diametris *AB*, *ab* deſcriptæ, & *P*, *p* corpuſcula ſita extrinſecus in diametris illis productis. Agantur à corpuſculis lineæ *PHK*, *PIL*, *phk*, *pil*, auferentes à circulis ma-



ximis *AHB*, *ahb*, æquales arcus *HK*, *hk* & *IL*, *il*: Et ad eas demittantur perpendicula *SD*, *sd*; *SE*, *se*; *IR*, *ir*; quorum *SD*, *sd* ſecent *PL*, *pl* in *F* & *f*: Demittantur etiam ad diametros perpendicula *IQ*, *iq*. Evaneſcant anguli *DPE*, *dpe*: & (p) ob æquales *DS* & *ds*, *ES* & *es*, lineæ *PE*, *PF* & *pe*, *pf* & lineola *DF*, *df* pro æqualibus habeantur; quippe quarum ratio ultima, angulis illis *DPE*, *dpe* ſimul evaneſcentibus, (q) eſt æqualitatis. His itaque conſtitutis, (r) erit *PI* ad *PF* ut *RI* ad *DF*, & *pf* ad *pi* ut *df*, vel *DF* ad *ri*; & ex æquo $PI \times pf$ ad $PF \times pi$ ut *RI* ad *ri*, hoc eſt (per

(p) * *Et ob æquales DS & ds, ES & es* &c. (Per Prop. 14. Lib. 3. Elem.).

(q) * *Eſt æqualitatis.* Nam evaneſcentibus DPE, dpe angulis, puncta F, f coincidunt cum punctis E, e, & iis punctis coincidentibus, æquales ſunt lineæ PE, PF & pe, pf, & lineolæ DF, df ſunt differentiæ linearum DS & ES, ds & es, ac proindè (ob æquales DS & ds, ES & es) æquantur.

(r) * *Erit PI ad PF &c.* Ob parallelas RI, DF & ri, df.

(per corol. 3. lem. VII.) (s) ut arcus IH ad arcum ih. (t) Rurſus PI ad PS ut IQ ad SE, & ps ad pi ut se vel SE ad iq; & ex æquo $PI \times ps$ ad $PS \times pi$ ut IQ ad iq. Et conjunctis rationibus PI *quad.* $\times pf \times ps$ ad pi *quad.* $\times PF \times PS$, ut $IH \times IQ$ ad $ih \times iq$; hoc (u) eſt, ut ſuperficies circularis, quam arcus IH convolutione ſemicirculi AKB circa diametrum AB deſcribet, ad ſuperficiem circularem, quam arcus ih convolutione ſemicirculi akb circa diametrum ab deſcribet: Et vires, quibus hæ ſuperficies ſecundum lineas ad ſe tendentes attrahunt corpuſcula P & p, ſunt (per hypotheſin) ut ipſæ ſuperficies directè, & quadrata diſtantiarum ſuperficierum à corporibus inversè, hoc eſt, ut $pf \times ps$ ad $PF \times PS$. Suntque hæ vires ad ipſarum partes obliquas, quæ (factâ per legum corol. 2. reſolutione virium) ſecundum lineas PS, ps ad centra tendunt, ut PI ad PQ, & pi ad pq; id eſt (ob ſimilia triangula PIQ & PSF, piq & psf) ut PS ad PF, & ps ad pf. Unde, ex æquo, fit attractio corpuſculi hujus P verſus S ad attractionem corpuſculi p verſus s, ut $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ ad $\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, hoc (x) eſt, ut ps *quad.* ad PS *quad.* Et ſimili argumento vires, quibus ſuperficies convolutione arcuum

KL,

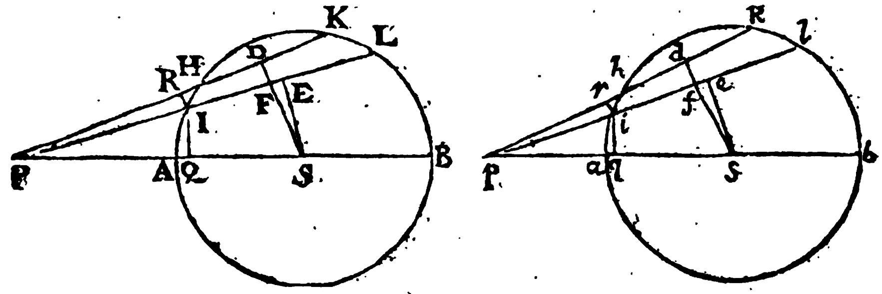
(s) *Ut arcus IH ad arcum ih.* Nam triangula evaneſcentia RHI, rhi ſimilia ſunt ob angulos ad R & r rectos (ex hyp.) & angulos ad H & h æquales, quos nempè metiuntur dimidii arcus æquales HK, hk (per prop. 32. lib. 3. Elem.) arcus enim HI, hi pro tangentibus in H & h uſurpari poſſunt (per Cor. 3. Lem. 7.). Quare RI eſt ad ri, ut arcus IH ad arcum ih.

(t) * *Rurſus &c.* Ob triangula PQI, PES & pqi, pes ſimilia, eſt PI:PS = IQ:SE.

(u) 515 * *Hoc eſt, ut ſuperficies circularis, quam arcus IH convolutione ſemicirculi AKB circà diametrum AB deſcribet.* Nam circularis illa ſuperficies æqualis eſt facto ex peripheriâ circuli cujus radius IQ in arcum evaneſcentem IH, & ſimiliter ſuperficies circularis quam arcus ih, convolutione ſemicirculi akb circà diametrum ab, deſcribet, æquatur facto ex peripheriâ circuli cujus radius iq, in arcum evaneſcentem ih, (152). Cum igitur peripheriæ circulorum ſint ut radii, facta illa erunt inter ſe ut IH × IQ, ad ih × iq.

(x) * *Hoc eſt &c.* Deleto in utrâque quantitate facto PF × pf, erunt attractiones ut $\frac{ps}{PS}$ ad $\frac{PS}{ps}$, ſeu reducendo ad eundem denominatorem, ut $\frac{ps^2}{PS \times ps}$ ad $\frac{PS^2}{ps \times PS}$, hoc eſt, ut ps^2 ad PS^2.

KL, kl deſcriptæ trahunt corpuſcula, erunt ut *ps quad.* ad *PS quad.* inque eâdem ratione erunt vires ſuperficierum omnium circularium in quas utraque ſuperficies ſphærica, capiendo ſem-



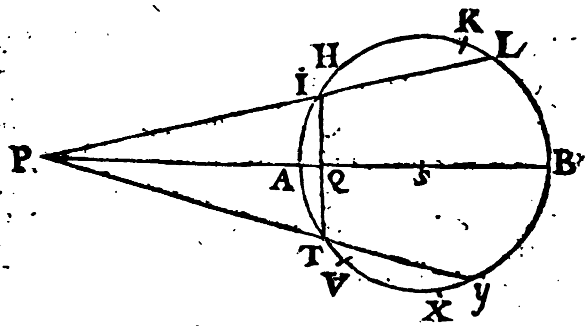
per sd æqualem SD & se æqualem SE, diſtingui poteſt. Et, per compoſitionem, vires totarum ſuperficierum ſphæricarum in corpuſcula exercitæ erunt in eâdem ratione. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXII. THEOREMA XXXII.

Si ad ſphæræ cujuſvis puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis; ac detur tum ſphæræ denſitas, tum ratio diametri ſphæræ ad diſtantiam corpuſculi à centro ejus: dico quod vis quâ corpuſculum attrahitur, proportionalis erit ſemidiametro ſphæræ.

Nam concipe corpuſcula duo ſeorſim à (y) ſphæris duabus attrahi, unum ab unâ & alterum ab alterâ, & diſtantias eo-

516. Scholium. Si ex alterâ parte diametri AB capiatur arcus AT = AI, & arcus TV = IH, vires obliquæ & æquales IQ, TQ ſi bi mutuò opponentur, nullumque motum in corpuſculo *P* producent. Undè patet vires integras in corpuſculum *P* ab utroque hemiſphério AHB, ATB ſeu à totâ ſuperficie ſphæricâ exercitas eſſe omninò viribus ad centrum S tendentibus æquales.



(y) * *A ſphæris duabus* homogeneis, ejuſdemque denſitatis ità nempè ut ſub æqualibus voluminibus æquales materiæ quantitates ubique contineantur, & vis abſoluta attrahens ſit ſemper ut quantitas materiæ.

rum à ſphærarum centris proportionales eſſe diametris ſphærarum reſpectivè, ſphæras autem reſolvi in particulas ſimiles & ſimiliter poſitas ad corpuſcula. Et attractiones corpuſculi unius, factæ verſus ſingulas particulas ſphæræ unius, erunt ad attractiones alterius verſus analogas totidem particulas ſphæræ alterius, in ratione compoſitâ ex ratione particularum directè & ratione duplicatâ diſtantiarum inversè. Sed particulæ ſunt ut ſphæræ, hoc eſt, in ratione triplicatâ diametrorum, & diſtantiæ ſunt ut diametri; & ratio prior directè unà cum ratione poſteriore bis inversè eſt ratio diametri ad diametrum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi corpuſcula in circulis, circa ſphæras ex materiâ æqualiter attractivâ conſtantes, revolvantur; ſintque diſtantiæ à centris ſphærarum proportionales earumdem diametris: Tempora periodica erunt æqualia.

Corol. 2. Et vice versâ, ſi tempora periodica ſunt æqualia; diſtantiæ erunt proportionales diametris. Conſtant hæc duo per corol. 3. prop. IV.

Corol. 3. Si ad ſolidorum duorum quorumvis, ſimilium & æqualiter denſorum, puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis; vires, quibus corpuſcula, (z) ad ſolida illa duo ſimiliter ſita, attrahentur ab iiſdem, erunt ad invicem ut diametri ſolidorum.

PRO-

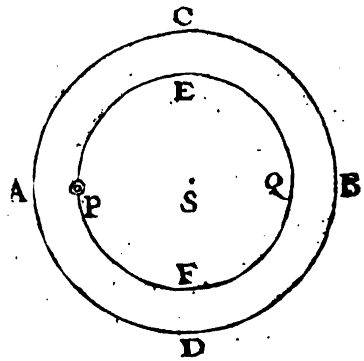
(z) * *Ad ſolida illa duo ſimiliter ſita*, ità ut diſtantiæ corpuſculorum à ſimilibus ſolidorum duorum particulis ſint ut eorum ſolidorum diametri.

517. Scholium. Hinc ſi hujuſmodi ſphæra per centrum perforetur, æqualia erunt tempora omnia, quibus corpus de locis quibuſvis ad centrum uſque cadit, (per cor. 2. prop. 38.) & corpuſculorum in hujuſmodi ſphærâ per ſpatia libera minima revolventium tempora periodica erunt æqualia (per cor. 3. prop. 4.) atque ad hujus generis ſphæram pertinent quæ in prop. 51. 52. hujuſque corollariis demonſtrata ſunt.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO LXXIII. THEOREMA XXXIII.

Si ad ſphæræ alicujus datæ puncta ſingula tendant æquales vires centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis: dico quod corpuſculum intra ſphæram conſtitutum attrahitur vi proportionali diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.



In ſphærâ *ABCD*, centro *S* deſcriptâ, locetur corpuſculum *P*; & centro eodem *S*, intervallo *SP*, concipe ſphæram interiorem *PEQF* deſcribi. Manifeſtum eſt, (per prop. LXX.) quod ſphæricæ ſuperficies concentricæ, ex quibus ſphærarum differentia *AEBF* componitur, attractionibus ſuis per attractiones contrarias deſtructis, nil agunt in corpus *P*. Reſtat ſola attractio ſphæræ interioris *PEQF*. Et (per prop. LXXII.) hæc eſt ut diſtantia *PS*. *Q. E. D.*

Scholium.

Superficies, ex quibus ſolida componuntur, hic non ſunt purè mathematicæ, ſed orbes adeo tenues, ut eorum craſſitudo inſtar nihili ſit; nimirum orbes evaneſcentes, ex quibus ſphæra ultimò conſtat, ubi orbium illorum numerus augetur & craſſitudo minuitur in infinitum. Similiter per puncta, ex quibus lineæ, ſuperficies & ſolida, componi dicuntur, intelligendæ ſunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

PROPOSITIO LXXIV. THEOREMA XXXIV.

Iiſdem poſitis, dico quod corpuſculum extra ſphæram conſtitutum attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.

Nam diſtinguatur ſphæra in ſuperficies ſphæricas innumeras con-

centricas, & attractiones corpuſculi à ſingulis ſuperficiebus oriundæ erunt reciprocè proportionales quadrato diſtantiæ corpuſculi à centro (per prop. LXXI.) Et componendo fiet ſumma attractionum, hoc eſt attractio corpuſculi in ſphæram totam, in eâdem ratione. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc in æqualibus diſtantiis à centris homogenearum ſphærarum attractiones ſunt ut ſphæræ. Nam (per prop. LXXII.) ſi diſtantiæ ſunt proportionales diametris ſphærarum, vires erunt ut diametri. Minuatur diſtantia major in illâ ratione; &, diſtantiis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicatâ illâ ratione; ideoque erit ad attractionem alteram in triplicatâ illâ ratione, hoc eſt, in ratione ſphærarum.

Corol. 2. In diſtantiis quibuſvis attractiones ſunt ut ſphæræ applicatæ ad ([a]) quadrata diſtantiarum.

Corol. 3. Si corpuſculum, extra ſphæram homogeneam poſitum, trahitur vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro, conſtet autem ſphæra ex particulis attractivis; ([b]) decreſcet vis particulæ cujuſque in duplicatâ ratione diſtantiæ à particula.

PROPOSITIO LXXV. THEOREMA XXXV.

Si ad ſphæræ datæ puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ, decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis; dico quod ſphæra quævis alia ſimilaris ab eâdem attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ centrorum.

Nam particulæ cujuſvis attractio eſt reciprocè ut quadratum diſtan-

(a) * *Ad quadrata diſtantiarum.* Nam æqualibus diſtantiis, attractiones ſunt ut ſphæræ (per cor. 1.) & æqualibus ſphæris, attractiones ſunt ut quadrata diſtantiarum à centris reciprocè (per prop. 74.). Quarè variantibus ſphæris & diſtantiis ſimul, attractiones ſunt ut ſphæræ ad quadrata diſtantiarum applicatæ.

(b) * *Decreſcet vis particulæ cujuſque &c.* Nam cum vis attractrix abſoluta quantitati materiæ proportionalis ſupponatur, ſi vis particularum ſphæræ in majori vel minori ratione quam duplicatâ diſtantiarum à particulis decreſceret, corpuſculum extrà ſphæram conſtitutum majori vel minori vi traheretur quam reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ à centro ſphæræ.

De Motu Corporum.

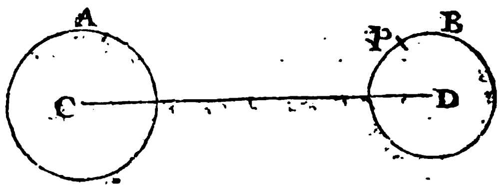
diſtantiæ ſuæ à centro ſphæræ trahentis, (per prop. LXXIV.) & propterea eadem eſt, ac ſi vis tota attrahens manaret de corpuſculo unico ſito in centro hujus ſphæræ. Hæc autem attractio tanta eſt, quanta foret viciſſim attractio corpuſculi ejuſdem, ſi modo illud à ſingulis ſphæræ attractæ particulis eâdem vi traheretur, quâ ipſas attrahit. Foret autem illa corpuſculi attractio (per prop. LXXIV.) reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ ſuæ à centro ſphæræ; ideoque huic æqualis attractio ſphæræ eſt in eâdem ratione. (c) *Q. E. D.*

(d) *Corol.* 1. Attractiones ſphærarum, verſus alias ſphæras homogeneas, ſunt ut ſphæræ trahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum centrorum ſuorum à centris earum, quas attrahunt.

Corol. 2. Idem valet, ubi ſphæra attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta ſingula trahent ſingula alterius eâdem vi, quâ ab ipſis viciſſim trahuntur; ideoque cum in omni attractione urgeatur (per legem 3.) tam punctum attrahens, quam punctum

(c) * *Q. E. D.* Demonſtratio clarius intelligitur appoſitâ figurâ. Sphæra *A* ſphæram ſimilarem *B* attrahat, & vis acceleratrix quâ ſphæræ *B* particula quævis *P* in centrum C ſphæræ *A* urgetur eſt reciprocè ut quadratum diſtantiæ P C à centro ſphæræ trahentis (per prop. 74.) & propterea eadem eſt ac ſi vis tota attrahens manaret de corpuſculo unico C ſito in centro ſphæræ trahentis *A*; vis autem tota acceleratrix quâ ſphæra integra *B* à corpuſculo *C* trahitur, tanta eſt quanta foret viciſſim attractio ejuſdem corpuſculi *C* verſus centrum D ſphæræ *B*, ſi modò illud corpuſculum *C* à ſingulis ſphæræ *B* particulis eâdem vi traheretur quâ ipſas attrahit, ut manifeſtum eſt. Foret autem (in hâc hyp.) illa corpuſculi C verſus centrum D attractio (per prop. 74.) reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ ſuæ C D à centro D ſphæræ *B*; Quarè attractio ſphæræ *B* verſus C ut potè æqualis attractioni ſuppoſitæ corpuſculi C verſus D, eſt in eâdem ratione inverſâ quadrati diſtantiæ C D. Q. E. D.

(d) * *Cor.* 1. Vis acceleratrix quâ



ſphæræ *B* particula quævis *P* verſus centrum C ſphæræ *A* urgetur, eſt ut ſphæra *A* applicata ad quadratum diſtantiæ C P, (per cor. 2. prop. 74.) & propterea eadem eſt ac ſi vis tota attrahens quæ eſſet ut ſphæra *A* manaret de corpuſculo unico C ſito in centro ſphæræ trahentis *A*; & ſimiliter ſphæra tota *B* ad centrum C trahitur ut corpuſculum unicum in centro D ſitum (per prop. 75.) vis autem acceleratrix quâ corpuſculum in centro D poſitum verſus C trahitur, eſt ut vis abſoluta corpuſculi C ſeu ut ſphæra *A* directè & quadratum diſtantiæ C D inverſè. Quarè *attractiones ſphærarum* acceleratrices *verſùs alias ſphæras homogeneas ſunt ut ſphæræ trahentes applicatæ* &c.

tum attractum, (e) geminabitur vis attractionis mutuæ, conſervatis proportionibus.

LIBER PRIMUS. PROP. LXXV. THEOR. XXXV.

Corol. 3. Eadem omnia, quæ ſuperius de motu corporum circa umbilicum conicarum ſectionum (f) demonſtrata ſunt, obtinent, ubi ſphæra attrahens locatur in umbilico: & corpora moventur extra ſphæram.

Corol. 4. Ea vero, quæ de motu corporum circa centrum conicarum ſectionum (g) demonſtrantur, (h) obtinent ubi motus peraguntur intra ſphæram.

PRO-

(e) * *Geminabitur vis attractionis mutuæ* &c. Si ſphæra *A* ſphæram *B* vi propriâ attrahente deſtitutam trahat, erit vis acceleratrix ſphæræ *B* versùs centrum C ſphæræ trahentis *A*, ut $\frac{A}{CD^2}$, (per cor. 2. prop. 75.) jam ſi ſphæræ *B* vis propria attrahens tribuatur, vis acceleratrix ſphæræ *A* versùs *B* indè genita, erit ut $\frac{B}{CD^2}$, & vis illius motrix (15) ut $\frac{B \times A}{CD^2}$, quæ (per Leg. 3.) æquatur vi motrici ſphæræ *B* versùs ſphæram *A* ex reactione ſphæræ *A* genitæ. Quarè dividendo per *B*, vis acceleratrix ſphæræ *B*, versùs centrum C ſphæræ *A*, rursùs erit ut $\frac{A}{CD^2}$, ideóque attractio tota acceleratrix ſphæræ *B*, versùs centrum ſphæræ *A*, erit in diſtantiâ datâ ut ſphæra ipſa *A*, & in diſtantiâ variabili ut ſphæra *A* ad quadratum diſtantiæ applicata. Quod ſimiliter dicendum eſt de attractione ſphæræ *A* versùs centrum ſphæræ *B*. Obſervandum verò eſt quod ſi ſphæræ *A* & *B* æquales ſint & utraque vi propriâ attractivâ quantitati materiæ proportionali prædita ſit, attractio mutua dupla evadit; Si verò ſphærarum una alterâ major ſit vel minor, ver. gr. ſphæra *B* minor quam ſphæra *A*, dum vis attractrix propria ſphæræ *B* accedit, geminatur quidem attractio mutua, ſed non idcircò tamen duplicatur; nam attractio inde genita, cæteris paribus, ſphæræ *B* proportionalis eſt.

(f) * *Demonſtrata ſunt.* (In Sect. 3â. 6â. 7â. 9â. 11â.)

(g) * *Demonſtrantur.* (Prop. 10. 38. 47. 51. 52. 64.)

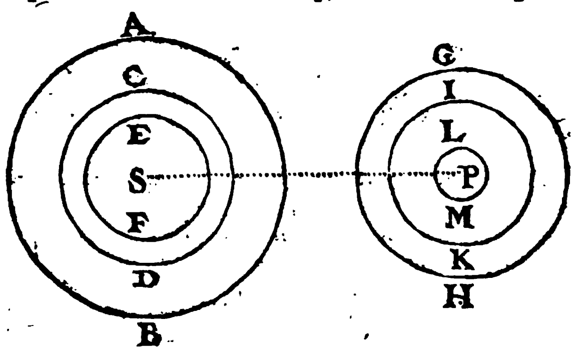
(h) * *Obtinent &c.* (per prop. 73.) ubi motus peraguntur intrà ſphæram, hoc eſt, ubi intrà ſphæram ſolidam via corporibus motis libera conceditur.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO LXXVI. THEOREMA XXXVI.

Si ſphæræ in progreſſu à centro ad circumferentiam (quoad materiæ denſitatem & vim attractivam) utcunque diſſimilares, in progreſſu verò per circuitum ad datam omnem à centro diſtantiam ſunt undique ſimilares; & vis attractiva puncti cujuſque decreſcit in duplicatâ ratione diſtantiæ corporis attracti: dico quod vis tota, quâ hujuſmodi ſphæra una attrahit aliam, ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ centrorum.

Sunto ſphæræ quotcunque concentricæ ſimilares *AB*, *CD*, *EF*, &c. quarum interiores additæ exterioribus componant materiam denſiorem verſus centrum, vel ſubductæ relinquant tenuiorem; & hæ (per prop. LXXV.) trahent ſphæras alias quotcunque concentricas ſimilares *GH*, *IK*, *LM*, &c. ſingulæ ſingulas, viribus reciprocè proportionalibus quadrato diſtantiæ *SP*. Et (i) componendo vel dividendo, ſumma virium illarum omnium, vel exceſſus aliquarum ſupra alias; hoc eſt, vis, quâ ſphæra tota, ex concentricis quibuſcunque vel concentricarum differentiis compoſita *AB*, trahit totam ex concentricis quibuſcunque vel concentricarum differentiis compoſitam *GH*; erit in eâdem ratione. Augeatur



(i) * *Et componendo vel dividendo &c.* Hoc eſt, in datâ diſtantiâ centrorum communium S, P, ſit attractio ſphærarum GH, IK, LM à ſphærâ AB, *a*, *b*, *c*; à ſphærâ CD, *d*, *e*, *f*; à ſphærâ EF, *g*, *h*, *i*: variante verò illâ diſtantiâ communium centrorum S, P vires omnes illæ mutabuntur reſpectivè ſecundum rationem illam inverſam quadrati diſtantiæ Centrorum, ergò ſumma vel differentia virium quibus omnes ſphæræ GH, IK, LM à ſphæris AB, CD, EF attrahuntur in primâ diſtantiâ, erit ad ſummam vel differentiam virium in altero caſu inverſè ut quadrata diſtantiarum.

tur numerus ſphærarum concentricarum in infinitum ſic, ut materiæ denſitas unà cum vi attractivâ, in progreſſu à circumferentiâ ad centrum, ſecundum legem quamcunque creſcat vel decreſcat; &, additâ materiâ non attractivâ, compleatur ubivis denſitas deficiens, eo ut ſphæræ acquirant formam quamvis optatam; & vis, quâ harum una attrahet alteram, erit etiamnum, per argumentum ſuperius, in eâdem illâ diſtantiæ quadratæ ratione inversâ. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi ejuſmodi ſphæræ complures ſibi invicem per omnia ſimiles, ſe mutuò trahant; attractiones acceleratrices ſingularum in ſingulas erunt, in æqualibus quibuſvis centrorum diſtantiis, ut ſphæræ attrahentes.

(k) *Corol.* 2. Inque diſtantiis quibuſvis inæqualibus, ut ſphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum inter centra.

Corol. 3. Attractiones verò motrices, ſeu pondera ſphærarum in ſphæras erunt, in æqualibus centrorum diſtantiis, ut ſphæræ attrahentes & attractæ conjunctim, id eſt, ut contenta ſub ſphæris per multiplicationem producta.

(l) *Corol.* 4. Inque diſtantiis inæqualibus, ut contenta illa directè & quadrata diſtantiarum inter centra inversè.

Corol. 5. Eadem valent, ubi attractio oritur à ſphæræ utriuſque virtute attractiva mutuo exercita in ſphæram alteram.

(k) * *Cor.* 2. Attractiones acceleratrices ſphærarum GH, IK, LM &c. in ſphæras AB, CD, EF, &c. ſingularum versùs ſingulas ſunt (per cor. 1. prop 75.) ut ſphæræ trahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum inter centra S, P. Quarè componendo vel dividendo ſumma attractionum illarum omnium vel exceſſus aliquarum ſuprà alias, hoc eſt, tota attractio acceleratrix ſphæræ compoſitæ GIMH versùs ſphæram compoſitam ACFB erit ut ſumma vel differentia ſphærarum concentricarum ſimilarium AB, CD, EF, &c. ad quadratum diſtantiæ SP applicata. Sed ſi ſphæræ trahentes ſunt ſibi invicem per omnia ſimiles, ſummæ illæ vel differentiæ ſunt ut ſphæræ ipſæ. Quarè patet veritas Coroll. 1. & 2.

(l) * *Cor.* 4. Corollaria 3um. & 4um. ex corollariis 1o. & 2o. manifeſta ſunt; Nam attractionis quantitas motrix, ſeu pondus ſphæræ attractæ in ſphæram trahentem æquipollet facto ex vi acceleratrice ductâ in quantitatem materiæ, ſeu in maſſam ſphæræ attractæ; vis autem acceleratrix (per cor. 2. prop. hujus) eſt ut ſphæra attrahens applicata ad quadratum diſtantiæ inter centra, & quantitates materiæ in ſphæris per omnia ſimilibus, ſunt ut volumina, ſeu ut ſphæræ ipſæ. Quarè attractiones motrices ſeu pondera ſphærarum in ſphæras, ſunt ut contenta ſub ſphæris per multiplicationem producta directè & quadrata diſtantiarum inter centra inverse.

DE MOTU CORPORUM. ram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportione ſervatâ.

Corol. 6. Si hujuſmodi ſphæræ aliquæ circa alias quieſcentes revolvantur, ſingulæ circa ſingulas; ſintque diſtantiæ inter centra revolventium & quieſcentium proportionales quieſcentium diametris; æqualia erunt tempora periodica.

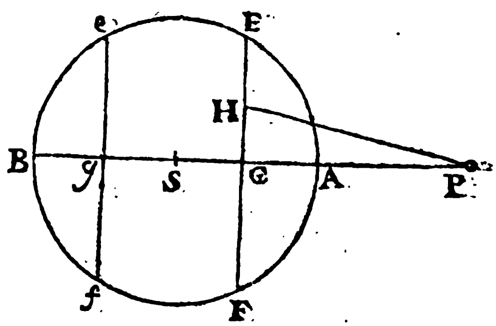
Corol. 7. Et viciſſim, ſi tempora periodica ſunt æqualia; diſtantiæ erunt (m) proportionales diametris.

Corol. 8. Eadem omnia, quæ ſuperius de motu corporum circa umbilicos conicarum ſectionum demonſtrata ſunt, obtinent; ubi ſphæra attrahens formæ & conditionis cujuſvis jam deſcriptæ locatur in umbilico.

Corol. 9. (n) Ut & ubi gyrantia ſunt etiam ſphæræ attrahentes, conditionis cujuſvis jam deſcriptæ.

PROPOSITIO LXXVII. THEOREMA XXXVII.

Si ad ſingula ſphærarum puncta tendant vires centripetæ proportionales diſtantiis punctorum à corporibus attractis: dico quod vis compoſita, quâ ſphæræ duæ ſe mutuo trahent, eſt ut diſtantia inter centra ſphærarum.



Caſ. 1. Sit *AEBF* ſphæra; *S* centrum ejus; *P* corpuſculum attractum, *PASB* axis ſphæræ per centrum corpuſculi tranſiens; *EF*, *ef* plana duo, quibus ſphæra ſecatur, huic axi perpendicularia, & hinc inde æqualiter diſtantia à centro ſphæræ; *G*, *g* interſectiones planorum & axis; & *H* punctum quodvis in plano *EF*. Puncti *H* vis centripeta in corpuſculum *P*, ſecundum lineam *PH* exercita, eſt ut diſtantia *PH*; & (per le-

(m) * *Proportionales diametris.* Cor. 6. & 7. conſtant per cor. 3. prop. 4ᵃ.

(n) * *Ut & ubi gyrantia &c.* Patet per Cor. 2. Prop. 58.

legum corol. 2.) ſecundum lineam PG, ſeu verſus centrum S, ut longitudo PG. Igitur punctorum omnium in plano EF, hoc eſt plani totius vis, quâ corpuſculum P trahitur verſus centrum S, eſt ut diſtantia PG multiplicata per numerum punctorum, id eſt, ut ſolidum quod continetur ſub plano ipſo EF & diſtantia illa PG. Et ſimiliter vis plani ef, quâ corpuſculum P trahitur verſus centrum S, eſt ut planum illud ductum in diſtantiam ſuam Pg, ſive ut huic æquale planum EF ductum in diſtantiam illam Pg; & ſumma virium plani utriuſque ut planum EF ductum in ſummam diſtantiarum $PG+Pg$, id eſt, ut planum illud ductum in duplam centri & (o) corpuſculi diſtantiam PS, hoc eſt, ut duplum planum EF ductum in diſtantiam PS, vel ut ſumma æqualium planorum $EF + ef$ ducta in diſtantiam eandem. Et ſimili argumento, vires omnium planorum in ſphærâ totâ, hinc inde æqualiter à centro ſphæræ diſtantium, ſunt ut ſumma planorum ducta in diſtantiam PS, hoc eſt, ut ſphæra tota & ut diſtantia PS conjunctim. *Q. E. D.* (p)

Caſ. 2. Trahat jam corpuſculum P ſphæram $AEBF$. Et eodem argumento probabitur quod vis, quâ ſphæra illa trahitur, erit ut diſtantia PS. *Q. E. D.*

Caſ. 3. Componatur jam ſphæra altera ex corpuſculis innumeris P; & quoniam vis, quâ corpuſculum unumquodque trahitur, eſt ut diſtantia corpuſculi à centro ſphæræ primæ, & (q) ut ſphæra eadem conjunctim, atque ideo eadem eſt, ac ſi prodiret tota de corpuſculo unico in centro ſphæræ; vis tota, quâ corpuſcula omnia in ſphæra ſecunda trahuntur, hoc eſt, quâ ſphæra illa tota trahitur, eadem erit, ac ſi ſphæra illa traheretur vi prodeunte de corpuſculo unico in centro ſphæræ primæ, & (r) propterea proportionalis eſt diſtantiæ inter centra ſphærarum. *Q. E. D.*

Caſ.

(o) * *Et corpuſculi diſtantiam PS.* Eſt enim $Pg = PG + 2GS$, adeoque $Pg + PG = 2PG + 2GS = 2PS$.

(p) * *Q. E. D.* Obſervandum eſt vires obliquas GH, in plano quovis EF, ex utrâque axis PB parte in æqualibus diſtantiis ſumptas eſſe æquales & oppoſitas, nullumque proindè motum producere.

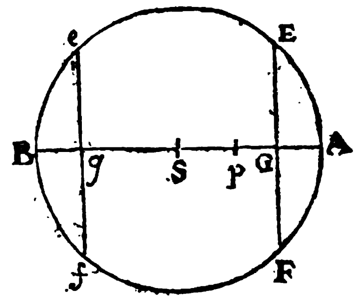
(q) * *Et ut ſphæra eadem conjunctim;* per caſ. 1.

(r) * *Et propterea proportionalis eſt diſtantiæ &c.* Si data eſt ſphæra prima trahens per caſ. 2.

De Motu Corporum.

Caſ. 4. Trahant ſphæræ ſe mutuo, & vis geminata proportionem priorem ſervabit. *Q. E. D.*

Caſ. 5. Locetur jam corpuſculum *p* intra ſphæram *AEBF*; & quoniam vis plani *ef* in corpuſculum eſt ut ſolidum contentum ſub plano illo & diſtantiâ *pg*; & vis contraria plani *EF* ut ſolidum contentum ſub plano illo & diſtantiâ *pG*; (f) erit vis ex utrâque compoſita ut differentia ſolidorum, hoc eſt, ut ſumma æqualium planorum ducta in ſemiſſem differentiæ diſtantiarum, id eſt, ut ſumma illa ducta in *pS* diſtantiam corpuſculi à centro ſphæræ. Et ſimili argumento, attractio planorum omnium *EF*, *ef* in ſphærâ totâ, hoc eſt, attractio ſphæræ totius, eſt conjunctim ut ſumma planorum omnium, ſeu ſphæra tota, & ut *pS* diſtantiâ corpuſculi à centro ſphæræ. *Q. E. D.*



Caſ. 6. Et ſi ex corpuſculis innumeris *p* componatur ſphæra nova, intra ſphæram priorem *AEBF* ſita; probabitur ut prius quod attractio, ſive ſimplex ſphæræ unius in alteram, ſive mutua utriuſque in ſe invicem, erit ut diſtantia centrorum *pS*. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXVIII. THEOREMA XXXVIII.

Si ſphæræ in progreſſu à centro ad circumferentiam ſint utcunque diſſimilares & inæquabiles, in progreſſu vero per circuitum ad datam omnem à centro diſtantiam ſint undique ſimilares; & vis attractiva puncti cujuſque ſit ut diſtantia corporis attracti: dico quod vis tota quâ hujuſmodi ſphæræ duæ ſe mutuo trahunt ſit proportionalis diſtantiæ inter centra ſphærarum.

Demonſtratur ex propoſitione præcedente eodem modo,

(f) * *Erit vis ex utrâque compoſita ut differentia ſolidorum, hoc eſt, ut* $ef \times pg - EF \times pG$. Eſt autem $Sg = SG$, adeóque $pg - pG = pS + SG - pG = 2pS$; Quare cum ſit etiam $EF = ef$, erit $ef \times pg - EF \times pG = ef \times \overline{pg - pG} = 2ef \times pS = \overline{ef + EF} \times pS$. Si punctum G eſt inter p & S ſitum, vis tota erit ut $ef \times pg + EF \times pG$, & quoniam eſt ſemper $Sg = SG$, atque in hoc caſu $pg + pG = pS + SG + pG = 2pS$, ſimiliter invenietur vis tota ut $\overline{ef + EF} \times pS$.

quo propoſitio LXXVI. ex propoſitione LXXV. demonſtrata fuit. (§)

Corol. Quæ ſuperius in propoſitionibus X. & LXIV. de motu corporum circa centra conicarum ſectionum demonſtrata ſunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi corporum ſphæricorum conditionis jam deſcriptæ, & attracta corpora ſunt ſphæræ conditionis ejuſdem.

Scholium.

Attractionum caſus duos inſigniores jam dedi expoſitos; nimirum ubi vires centripetæ decreſcunt in duplicatâ diſtantiarum ratione, vel creſcunt in diſtantiarum ratione ſimplici; efficientes in utroque caſu ut corpora gyrentur in conicis ſectionibus, & componentes corporum ſphæricorum vires centripetas eâdem lege, in receſſu à centro, decreſcentes vel creſcentes cum ſeipſis: Quod eſt notatu dignum. Caſus cæteros, qui concluſiones minus elegantes exhibent, ſigillatim percurrere longum eſſet. Malim cunctos methodo generali ſimul comprehendere ac determinare ut ſequitur.

LEM-

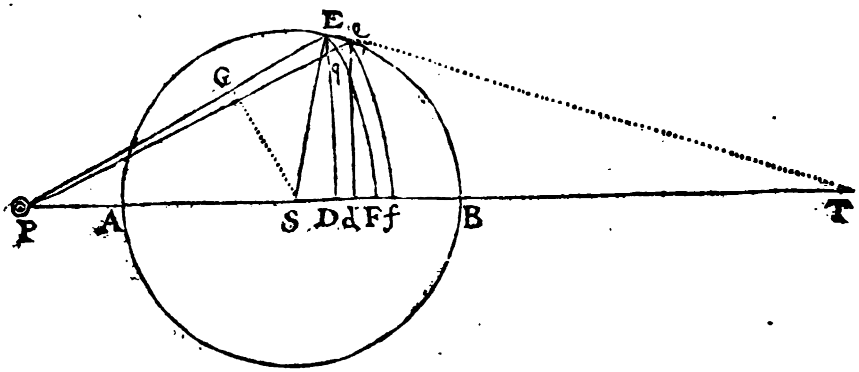
(§) Quæ in corollariis prop. 76. ubi attractio ſphæræ versùs ſphæram erat quadrato diſtantiæ centrorum reciprocè proportionalis, demonſtrata ſunt, ea, mutatis mutandis, ad caſum hujus propoſitionis 78. transferri poſſunt. Nimirum ſi ejuſmodi ſphæræ complures per omnia ſimiles ſe mutuò trahant, attractiones acceleratrices ſingularum in ſingulas erunt ut ſphæræ trahentes & diſtantiæ inter centra conjunctim; attractiones verò motrices ut ſphæræ attrahentes & attractæ & diſtantiæ inter centra conjunctim, eademque valent ubi attractio oritur à ſphæræ utriuſque virtute attractivâ mutuò exercitâ in ſphæram alteram.

De Motu Corporum.

LEMMA XXIX.

Si deſcribantur centro S *circulus quilibet* AEB, *& centro* P *circuli duo* EF, ef, *ſecantes priorem in* E, e, *lineamque* PS *in* F, f; *& ad* PS *demittantur perpendicula* ED, ed: *dico quod, ſi diſtantia arcuum* EF, ef *in infinitum minui intelligatur, ratio ultima lineæ evaneſcentis* Dd *ad lineam evaneſcentem* Ff *ea ſit, quæ lineæ* PE *ad lineam* PS.

Nam ſi linea *Pe* ſecet arcum *EF* in *q*; & recta *Ee*, quæ cum arcu evaneſcente *Ee* coincidit, producta occurrat rectæ *PS* in *T*; & ab *S* demittatur in *PE* normalis *SG*: ob (t) ſimilia triangula *DTE*, *dTe*, *DES*; erit *Dd* ad *Ee*, ut *DT*



ad *TE*, ſeu *DE* ad *ES*; & ob (u) triangula *Eeq*, *ESG* (per lem. VIII. & corol. 3. lem. VII.) ſimilia, erit *Ee* ad *eq* ſeu *Ff* ut *ES* ad *SG*; & ex æquo, *Dd* ad *Ff* ut *DE* ad *SG*; hoc eſt (ob ſimilia triangula *PDE*, *PGS*) ut *PE* ad *PS*. *Q. E. D.*

PRO-

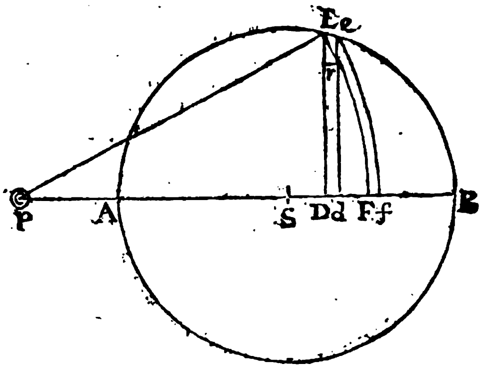
(t) * *Ob ſimilia triangula* DTE, dTe, DES. Ob parallelas DE, de, triangula DTE, dTe ſimilia ſunt; & quoniam recta TE circulum AEB tangit in E, erit angulus SET rectus, & proinde demiſſo ex puncto E ad baſim ST perpendiculo ED, erit triangulum DES ſimile triangulo DTE (prop. 8. Lib. 6. Elem.).

(u) * *Et ob triangula* Eeq, ESG *&c.* Anguli ad G & q recti ſunt & proinde æquales; & quoniam anguli PEq, SEe ſunt quoque recti & æquales, (ex naturâ circuli) detracto communi angulo SEq, anguli reſidui GES, qEe, erunt etiam æquales. Quare triangula Eeq, ESG ſunt ſimilia (prop. 4. lib. 6. Elem.).

PROPOSITIO LXXIX. THEOREMA XXXIX.

Si ſuperficies ob latitudinem infinitè diminutam jamjam evaneſcens EFfe, *convolutione ſui circa axem* PS, *deſcribat ſolidum ſphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod vis, quâ ſolidum illud trahit corpuſculum ſitum in* P, *eſt in ratione compoſitâ ex ratione ſolidi* DEq×Ff, *& ratione vis quâ particula data in loco* Ff *traheret idem corpuſculum.*

Nam ſi primò conſideremus vim ſuperficiei ſphæricæ *FE*, quæ convolutione arcus *FE* generatur, & à linea *de* ubivis ſecatur in *r*; erit ſuperficiei pars annularis, convolutione arcus *rE* genita, ut lineola *Dd*, manente ſphæræ radio *PE* (uti (x) demonſtravit *Archimedes* in lib. de *Sphærâ* & *Cylindro.*) Et hujus vis, ſecundum lineas *PE* vel *Pr* undique in (y) ſuperficie conicâ ſitas exercita, ut hæc ipſa ſuperficiei pars annularis; hoc eſt, ut lineola *Dd*, vel, quod perinde eſt, ut rectangulum ſub dato ſphæræ radio *PE* & lineola illa *Dd*: at ſecundum lineam *PS* ad centrum *S* tendentem minor in ratione *PD* ad *PE*, (z) ideoque ut *PD* × *Dd*. Dividi jam intelliga-



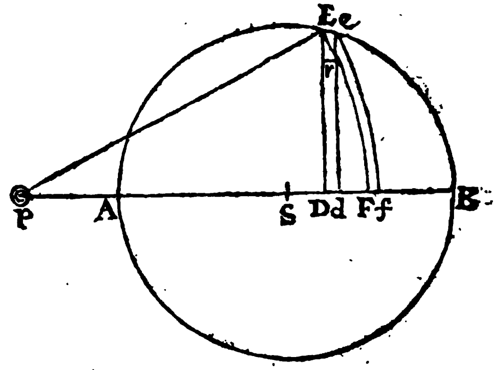
(x) 518. *Uti demonſtravit Archimedes &c.* Facilis eſt demonſtratio. Quoniam enim angulus PEr rectus eſt (ex naturâ circuli) erit angulus DEr æqualis angulo DPE, ob ſummam angulorum DPE + PED recto PEr æqualem. Undè ſi ex puncto r in lineam DE demiſſum intelligatur perpendiculum quod æquale erit lineæ Dd, conſtituetur triangulum evaneſcens ſimile triangulo EPD, eritque adeò DE : PE = Dd : Er = $\frac{PE \times Dd}{DE}$, ſed (515) zona circularis convolutione arcûs rE genita, eſt ut rectangulum rE × DE; Quarè ſi in hoc rectangulo loco rE ſubſtituatur valor ipſius modò inventus, erit zona ut PE × Dd, hoc eſt, ob datum radium PE, ut Dd. Q. E. D.

(y) * *In ſuperficie conicâ.* Nam in convolutione puncti E, linea PE ſuperficiem conicam deſcribit.

(z) * *Ideóque ut PD × Dd.* Nam ſi vis ſecundum directionem PE agens per lineam PE exponatur, vis illius pars quæ agit

De Motu Corporum.

tur linea DF in particulas innumeras æquales, quæ ſingulæ nominentur Dd; & ſuperficies FE dividetur (a) in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut ſumma omnium $PD \times Dd$, hoc eſt, ut $\frac{1}{2}PFq - \frac{1}{2}PDq$, ideoque ut (b) DE *quad.* Ducatur jam ſuperficies FE in altitudinem Ff; & fiet ſolidi $EFfe$ vis exercita in corpuſculum P ut $DEq \times Ff$: puta ſi detur vis quam particula aliqua data Ff in diſtantia PF exercet



agit ſecundùm directionem PS, exponetur per lineam PD; erit PE ad PD ut rectangulum $PE \times Dd$ ad rectangulum $PD \times Dd$, quod proindè vim illam ſecundùm directionem PD exhibebit, vires autem obliquæ ED ab utrâque axis PB parte ſe mutuò deſtruunt.

(a) * *Dividetur in totidem æquales annulos.* (Per not. 518.).

(b) * *Et ſuperficies FE dividetur in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut ſumma omnium $PD \times Dd$, hoc eſt, ut $\frac{1}{2}PFq - \frac{1}{2}PDq$, ideoque ut DE quad.* Scilicet omnes PD, dum ex PD in PF mutantur uniformiter creſcendo progreſſionem Arithmeticam faciunt, quoniam omnes particulæ Dd quibus lineæ PD ſucceſſive augentur ſunt æquales: ergo omnium PD ſumma eâ ratione invenitur quâ ſummæ progreſſionum Arithmeticarum obtinentur, nempe primum & ultimum progreſſionis terminum ſimul junctos multiplicando per numerum terminorum progreſſionis, & dimidium facti ſumendo; Progreſſionis verò hujuſce primus terminus eſt PD, ultimus PF numerus vero terminorum DF, ſiquidem DF eſt ſumma incrementorum æqualium evaneſcentium lineæ PD, ergo ſumma omnium PD eſt $\frac{\overline{PF+PD} \times DF}{2}$ ſive (quia DF eſt differentia linearum PF & PD) eſt ſumma omnium $PD = \frac{\overline{PF+PD} \times \overline{PF-PD}}{2}$ ſed (per 6. 2. Elem.) factum ſummæ & differentiæ duarum linearum æquatur differentiæ quadratorum ipſorum, ergo $\frac{\overline{PF+PD} \times \overline{PF-PD}}{2} = \frac{1}{2}PF^2 - \frac{1}{2}PD^2$ & ſumma omnium $PD \times Dd = \overline{\frac{1}{2}PF^2 - \frac{1}{2}PD^2} \times Dd$, ſed Dd eſt particula quæ in omnibus hiſce caſibus ut eadem aſſumitur, ergo vires totius ſuperficiei FE quæ ſunt ut ſumma omnium $PD \times Dd$ ſunt ut $\frac{1}{2}PF^2 - \frac{1}{2}PD^2$ ſive ut $PF^2 - PD^2$: ſed PF^2 eſt æquale PE^2 per conſtr. & $PE^2 - PD^2 = DE^2$ (per 47. 1. El.) ergo vires ſuperficiei FE, ſunt ut DE^2. Q. E. D.

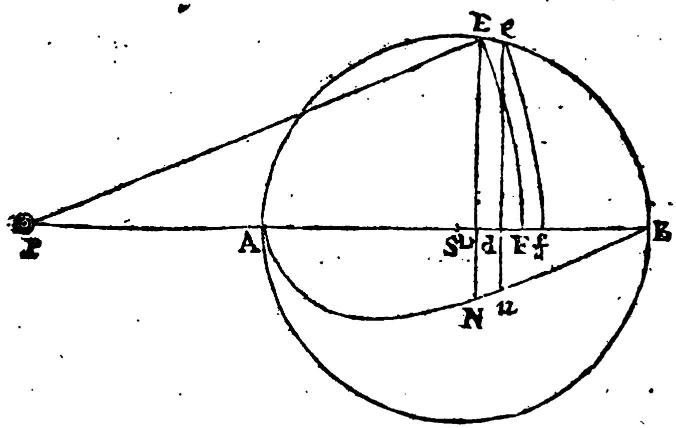
Idem aliter. Sit radius datus $PE = a$, variabilis $FD = x$, erit fluxio $Dd = dx$, & $PD = a - x$, atquè adeò $PD \times Dd = adx - xdx$, & ſumptis utrinque fluentibus (165) S. $PD \times Dd = ax - \frac{1}{2}xx = \frac{2ax - xx}{2} = \frac{DE^2}{2}$, (prop. 13. lib. 6. Elem.). Quarè vis ſuperficiei convolutione arcûs FE genitæ erit ut DE^2.

cet in corpuſculum *P*. ([c]) At ſi vis illa non detur, fiet vis ſolidi *EFfe* ut ſolidum *DEq*×*Ff* & vis illa non data conjunctim. *Q. E. D.*

LIBER PRIMUS. PROP. LXXX. THEOR. XL.

PROPOSITIO LXXX. THEOREMA XL.

Si ad ſphæræ alicujus ABE, *centro* S *deſcriptæ, particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ, & ad ſphæræ axem* AB, *in quo corpuſculum aliquod* P *locatur, erigantur de punctis ſingulis* D *perpendicula* DE, *ſphæræ occurrentia in* E, *& in ipſis capiantur longitudines* DN, *quæ ſint ut quantitas* $\frac{DEq \times PS}{PE}$ *& vis, quam ſphæræ particula ſita in axe ad diſtantiam* PE *exercet in corpuſculum* P, *conjunctim: dico quod vis tota, quâ corpuſculum* P *trahitur verſus ſphæram, eſt ut area* ANB *comprehenſa ſub axe ſphæræ* AB, *& lineâ curvâ* ANB, *quam punctum* N *perpetuo tangit.*



Etenim ſtantibus quæ in lemmate & theoremate noviſſimo

(c) * *At ſi vis illa non detur &c.* Zona convolutione arcûs E genita ducatur in datam altitudinem Ff, & erit annuli ſolidi inde geniti vis ſecundum lineam PE undique exercita ut hic ipſe annulus & vis lineolæ Ff conjunctim, hoc eſt, ſi vis lineolæ Ff dicatur *V*, ut PE×Dd×Ff×*V* (518). At vis annuli ſecundum lineam PS minor erit in ratione PD ad PE, ideòque erit ut PD×Dd×Ff×*V*. Et quoniam variante PD, manet factum Ff×*V* quod nimirum vis *V* in ſingulis particulis datis Ff, æqualis ſupponatur; Si ſumantur fluentes, ut ſupra, erit vis tota ſolidi EFfe, in corpuſculum P ſecundum lineam PS exercita ut DE^2×Ff×*V*.

conſtucta ſunt, concipe axem ſphæræ AB dividi in particulas innumeras æquales. Dd & ſphæram totam dividi in totidem laminas ſphæricas concavo-convexas $EFfe$; & erigatur perpendiculum dn. Per theorema ſuperius vis, quâ lamina $EFfe$ trahit corpuſculum P, eſt ut $DEq \times Ff$ & vis particulæ unius ad diſtantiam PE vel PF exercita conjunctim. Eſt autem (per lemma noviſſimum) Dd ad Ff ut PE ad PS, & inde Ff æqualis $\frac{PS \times Dd}{PE}$; & $DEq \times Ff$ æquale Dd in $\frac{DEq \times PS}{PE}$, & propterea vis laminæ $EFfe$ eſt ut Dd in $\frac{DEq \times PS}{PE}$ & vis particulæ ad diſtantiam PF exercita conjunctim, hoc eſt (ex hypotheſi) ut $DN \times Dd$, ſeu area evaneſcens $DNnd$. Sunt igitur laminarum omnium vires, in corpus P exercitæ, ut areæ omnes $DNnd$, hoc eſt, ſphæræ vis tota ut area tota ANB. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi vis centripeta, ad particulas ſingulas tendens, eadem ſemper maneat in omnibus diſtantiis, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PE}$; erit vis tota, quâ corpuſculum à ſphæra attrahitur, (d) ut area ANB.

Corol. 2. Si particularum vis centripeta ſit reciprocè ut diſtantia corpuſculi à ſe attracti, & fiat (e) DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEq}$; erit vis, quâ corpuſculum P à ſphærâ totâ attrahitur, ut area ANB.

Corol. 3. Si particularum vis centripeta ſit reciprocè ut cubus diſtantiæ corpuſculi à ſe attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEqq}$; erit vis, quâ corpuſculum à totâ ſphærâ attrahitur, ut area ANB.

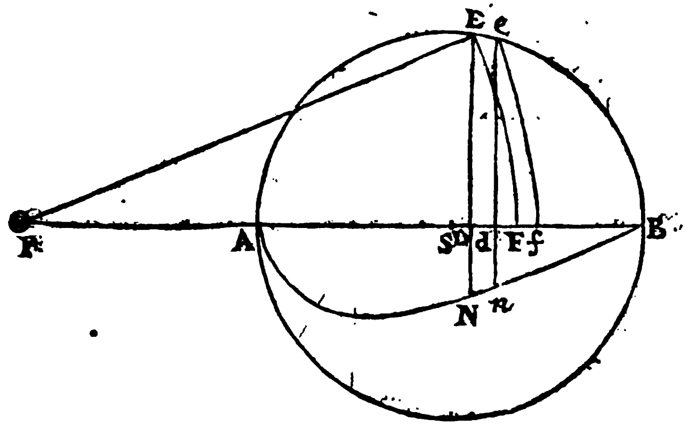
Co-

(d) * *Ut area ANB.* Nulla enim habenda eſt ratio vis particulæ Ff quæ eadem in omnibus diſtantiis manet ex hyp.

(e) * *Fiat DN &c.* Subſtitutâ quantitate $\frac{1}{PE}$ loco vis particulæ Ff.

Corol. 4. Et univerſaliter ſi vis centripeta ad ſingulas ſphæræ particulas tendens ponatur eſſe reciprocè ut quantitas V, fiat

LIBER PRIMUS. PROP. LXXX. THEOR. XL.



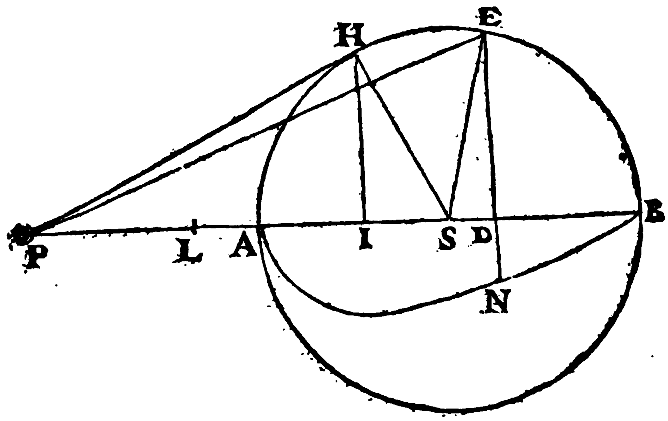
autem DN ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$; erit vis, quâ corpuſculum à ſphærâ totâ attrahitur, ut area *ANB*.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO LXXXI. THEOREMA XLI.

Stantibus jam poſitis, menſuranda eſt area ANB.

A puncto *P* ducatur recta *PH* ſphæram tangens in *H*, & ad axem *PAB* demiſſa normali *HI*, biſecetur *PI* in *L*; & erit (per prop. XII. lib. 2. elem.) PEq æquale $PSq + SEq + 2PSD$. Eſt autem SEq ſeu SHq (ob (f) ſimilitudinem



triangulorum *SPH*, *SHI*) æquale rectangulo *PSI*. Ergo PEq æquale eſt contento ſub *PS* & $PS + SI + 2SD$, hoc (g) eſt, ſub *PS* & $2LS + 2SD$, id eſt, ſub *PS* & $2LD$. Porro *DE quad.* æquale eſt $SEq - SDq$, ſeu (†) $SEq - LSq + 2SLD - LDq$; id eſt, $2SLD - LDq - ALB$. Nam $LSq - SEq$ ſeu $LSq - SAq$ (per prop. VI. lib 2. elem.) æquatur rectangulo *ALB*. Scribatur itaque $2SLD - LDq - ALB$ pro DEq; & quantitas $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$, quæ ſecundum corollarium

quar-

(f) * *Ob ſimilitudinem triangulorum &c.* (Per prop. 13. lib. 6. Elem.)

(g) * *Hoc eſt ſub PS & $2LS + 2SD$.* Ob $PS + SI = PI + 2SI = 2LI + 2SI = 2LS$.

(†) * *Seu $SE^2 - LS^2$ &c.* Ob $SD = LD - LS$, adeóque $SD^2 = LD^2 - 2SLD + LS^2$.

quartum propoſitionis præcedentis eſt ut longitudo ordinatim applicatæ DN, reſolvet ſeſe in tres partes $\frac{2SLD \times PS}{PE \times V} - \frac{LDq \times PS}{PE \times V} - \frac{ALB \times PS}{PE \times V}$: ubi ſi pro V ſcribatur ratio inverſa vis centripetæ, & pro PE medium proportionale inter PS & $2LD$; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, (h) quarum areæ per methodos vulgatas innoteſcunt. *Q. E. F.*

Exem-

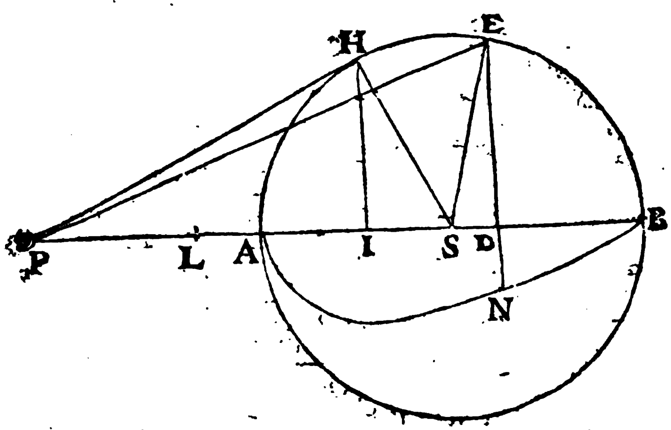
(h) 519. *Quarum area per methodos vulgatas innoteſcunt.* Sint variabiles $PE = z$, $LD = x$, adeoque $Dd = dx$, ſint conſtantes $PA = a$, $PB = b$, $PS = c$, & $LS = m$, $LA = p$, $LB = q$, & erit areæ AND fluxio $DN \times dx$ ut $\frac{2mcxdx}{zV} - \frac{cxxdx}{zV} - \frac{pqcdx}{zV}$: quoniam verò PE^2 $(zz) = 2PS \times LD$ $(2cx)$, eſt $x = \frac{zz}{2c}$ & $dx = \frac{zdz}{c}$, quibus valoribus loco x & dx in formula ſubſtitutis illa in hanc mutatur $\frac{mz^2dz}{cV} - \frac{z^4dz}{4c^2V} - \frac{pqdz}{V}$.

Sit vis attractiva ut diſtantiæ z dignitas $\frac{1}{z^n}$ erit $V = z^n$, quo valore loco V in formulâ poſito, fiet $DN \times dx$ ut $\frac{mz^{2-n}dz}{c} - \frac{z^{4-n}dz}{4c^2} - pqz^{-n}dz$, unde ſumptis ſingulorum terminorum fluentibus (165) erit S. $DN \times dx$, ſeu area AND, ut $\frac{mz^{3-n}}{\overline{3-n} \times c} - \frac{z^{5-n}}{\overline{5-n} \times 4c^2} - \frac{pqz^{1-n}}{1-n} + Q$. *conſtans.* Sed fluens illa evaneſcere debet dum fit PE $(z) = PA$ (a) eſt ergo $Q = \frac{a^{5-n}}{\overline{5-n} \times 4c^2} + \frac{pqa^{1-n}}{1-n} - \frac{ma^{3-n}}{\overline{3-n} \times c}$ ac proinde fluens accurata ubi PE $(z) = PB$ (b) erit $\frac{mb^{3-n}}{\overline{3-n} \times c} - \frac{b^{5-n}}{\overline{5-n} \times 4c^2} - \frac{pqb^{1-n}}{1-n} + \frac{a^{5-n}}{\overline{5-n} \times 4c^2} + \frac{pqa^{1-n}}{1-n} - \frac{ma^{3-n}}{\overline{3-n} \times c}$:

520. Cum ſit ſemper $PE^2 = 2PS \times LD$; & ubi PE fit PB ſit $LD = LB$, ubi verò PE fit PA ſit $LD = LA$, erit PB^2 $(b^2) = 2PS \times LB$ $(2cq)$ & PA^2 $(a^2) = 2PS \times LA$ $(2cp)$ quibus valoribus loco, b^2 & a^2 ſubſtitutis, formula fit $\frac{2mqb^{1-n}}{3-n} - \frac{q^2b^{1-n}}{5-n} - \frac{pqb^{1-n}}{1-n} + \frac{p^2a^{1-n}}{5-n} + \frac{pqa^{1-n}}{1-n} - \frac{2mpa^{1-n}}{3-n}$. & reſtitutis litteris figuræ $\frac{2SLB \times PB^{1-n}}{3-n} - \frac{LB^2 \times PB^{1-n}}{5-n} - \frac{ALB \times PB^{1-n}}{1-n} + \frac{AL^2 \times PA^{1-n}}{5-n} + \frac{ALB \times PA^{1-n}}{1-n} - \frac{2SLA \times PA^{1-n}}{3-n}$.

521. Cor. 1. Hinc liquet aream ANB, ſeu attractionem cui proportionalis eſt, ſemper poſſe algebraicè inveniri, tribus tantum caſibus exceptis in quibus eſt $n = 1$ vel 3, vel 5, ſeu in quibus vis attractiva decreſcit in ratione diſtantiæ ſimplici, vel triplicatâ vel quintuplicatâ. In his enim caſibus tribus diviſores $1-n$, $3-n$, $5-n$, evaneſcunt; ſed tum fluens per logarithmos, aut quod idem eſt, per quadraturam hyperbolæ obtinetur, ut exemplis infrà poſitis patebit.

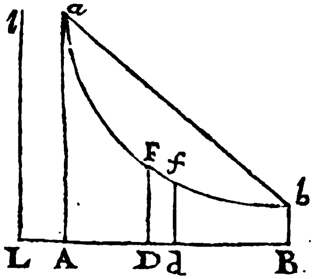
Exempl. 1. Si vis centripeta ad ſingulas ſphæræ particulas tendens ſit reciprocè ut diſtantia; pro V ſcribe diſtantiam PE; dein $2PS \times LD$ pro PEq, & fiet DN ut $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{ALB}{2LD}$. Pone DN æqualem ejus duplo $2SL - LD - \frac{ALB}{LD}$: & ordinatæ pars data $2SL$ ducta in longitudinem AB deſcribet aream rectangulam $2SL \times AB$; & pars indefinita LD ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, eâ lege ut inter movendum creſcendo vel decreſcendo æquetur ſemper longitudini LD, (i) deſcribet aream $\frac{LBq - LAq}{2}$, (†) id eſt, aream $SL \times AB$; quæ ſubducta de areâ



(i) 522. *Deſcribet aream* $\frac{LBq - LAq}{2}$. Area quam deſcribet erit trapezium, nam ſi à puncto L in longitudinem AB ſemper erigantur perpendicula æqualia LD, omnes terminabuntur in recta linea ducta à puncto L in terminum perpendiculi in B erecti & æquali LB, ſicque formabitur Triangulum cujus pars ſecundum AB ſita eſt area quæſita, & ea erit Trapezium cujus latera in A & B perpendicularia, inter ſe parallela ſunt, & latus puncto A inſiſtens erit æquale LA, latus verò oppoſitum in B erectum erit æquale LB, hujus ergo trapezii ſuperficies erit $\frac{LA + LB}{2} \times AB$, ſed $AB = LB - LA$, ergo per 6. 2. El. $\frac{LA + LB}{2} \times LB - LA = \frac{LB^2 - LA^2}{2}$: (quod trapezium eſt æquale Trapezio AabB in figura Newtoniana deſcripto ut liquet per ejus figuræ conſt.).

(†) *Id eſt, aream SL×AB*, cum enim hæc area ſit

priore $2SL \times \frac{1}{2}AB$ relinquit aream $SL \times AB$. Pars autem tertia $\frac{ALB}{LD}$, ducta itidem per motum localem normaliter in eandem longitudinem, deſcribet aream hyperbolicam; quæ ſubducta de areâ $SL \times AB$ relinquet aream quæſitam ANB. Unde talis emergit problematis conſtructio. Ad puncta L, A, B erige perpendicula Ll, Aa, Bb, quorum Aa ipſi LB, & Bb ipſi LA æquetur. Aſymptotis Ll, LB per puncta ab deſcribatur hyperbola ab. Et acta chorda ba claudet aream aba areæ quæſitæ ANB æqualem.



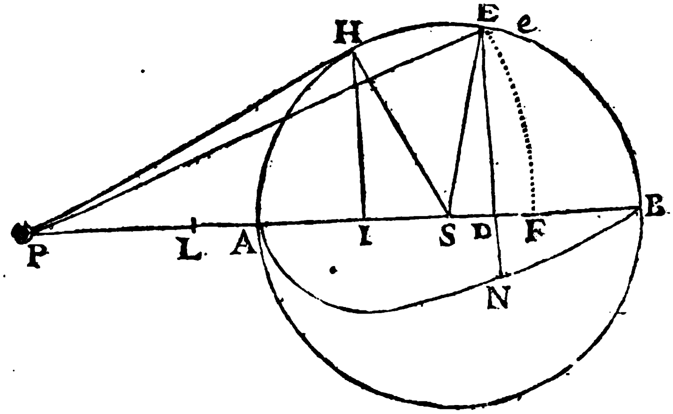
Exempl. 2. Si vis centripeta ad ſingulas ſphæræ particulas tendens ſit reciprocè ut cubus diſtantiæ, vel (quod perinde eſt) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; ſcribe $\frac{PE\ cub.}{2ASq}$ pro V, dein $2PS \times LD$ pro PEq; & fiet DN

ſit $= \frac{LA + LB}{2} \times AB$, ſitque $LB = LA + 2AS$ erit $LA + LB = 2LA + 2AS = 2LS$ unde $\frac{LA + LB}{2} \times AB = LS \times AB$. Unde etiam ſequitur Trapezium AabB rectangulo $LS \times AB$ eſſe æquale.

Cæterum per methodos vulgares caſus iſte ſequenti ratione ſolvitur. Sit $AD = x$, $Dd = dx$ erit areæ AND fluxio $DN \times Dd = 2SL \times dx - LA \times dx - x\,dx - \frac{ALB \times dx}{LD}$. Primi termini $2SL \times dx$, fluens (165) eſt $2SL \times x = 2SL \times AB$, ubi AD, ſeu $x = AB$. Secundi termi $LA \times dx + x\,dx$, fluens eſt $LA \times x + \frac{1}{2}xx = \frac{\overline{2LA + AB} \times AB}{2} = LS \times AB$, quandò x, ſeu AD, ſit AB. Quarè duorum priorum terminorum fluens eſt $2SL \times AB - SL \times AB$ ſive $SL \times AB$. Jam ut tertii termini $\frac{ALB \times dx}{LD}$ fluens inveniatur deſcribatur hyperbola AB, prout Newtonus præſcribit, & ſuper aſymptoto LB erigantur perpendicula duo infinitè propinqua, DF, df, hyperbolæ occurrentia in F & f, ſitque $AD = x$, $Dd = dx$, & erit (per theor. 4. de hyperbolâ) $LA \times Aa = LD \times DF$, adeóque $DF = \frac{LA \times Aa}{LD} = \frac{ALB}{LD}$, & $DF \times Dd$, ſeu fluxio areæ $AaFD = \frac{ALB \times dx}{LD}$. Quarè area hyperbolicâ AaFD, æqualis eſt fluenti tertii termini, & area hyperbolica AabB, eſt ejuſdem termini fluens, ubi x, ſeu $AD = AB$. Hæc igitur ſubducta de rectangulo $SL \times AB$, ſive de trapezio AabB ipſi æquali, relinquet aream quæſitam ANB. Relinquitur autem area aFba; undè patet conſtructio.

523. Cor. 1. Si diſtantia corpuſculi P à ſphærâ evaneſcat, erit $Bb = LA = 0$ ideoque hyperbola AFb cum ſuis aſymptotis Ll, LB congruet nullaque erit ejus area. Quarè corpuſculo poſito in A, ſeu in contactu ſphæræ attractio erit ut rectangulum $SL \times AB = 2AS^2$, ut etiam demonſtrari poſſet eodem modo ac demonſtrata fuit Prop. 72.

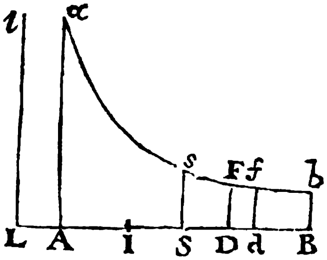
ut $\frac{SL \times ASq}{PS \times LD} - \frac{ASq}{2PS} - \frac{ALB \times ASq}{2PS \times LDq}$, id (k) eſt (ob continuè proportionales PS, AS, SI) ut $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2}SI - \frac{ALB \times SI}{2LDq}$. Si ducantur hujus partes tres in longitudinem AB, prima $\frac{LSI}{LD}$ generabit aream hyperbolicam; ſecunda $\frac{1}{2}SI$ aream $\frac{1}{2}AB \times SI$; tertia $\frac{ALB \times SI}{2LDq}$ aream $\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB}$, id eſt $\frac{1}{2}AB \times SI$. De primâ ſub-



524. Cor. 2. Vis quâ corpuſculum P, versùs portionem ſphæræ convolutione ſuperficiei A E F, genitam trahitur eſt ut $LB - \frac{1}{2}x \times x - AaFD$; Nam (per not. 522.) vis illa eſt ut $2SL \times x - LA \times x - \frac{1}{2}xx - AaFD$, & $2SL = 2LA + 2AS$ & $2SL - LA = LA + 2AS = LB$, unde vis illa eſt $LB - \frac{1}{2}x \times x - AaFD$; ſed P poſito in contactu ſphæræ eſt $LB = AB$ & areâ hyperbolicâ evaneſcit, vis ergo fit in contactu $AB - \frac{1}{2}x \times x$, ſive $AB - \frac{1}{2}AD \times AD$.

525. Cor. 3. Quoniam attractio corpuſculi P versùs ſphæram totam eſt ut $SL \times AB - AabB$, ejuſdem attractio versùs portionem ſphæræ convolutione ſuperficiei F E e B (fig. prop. 80.) genitam, erit ut $SL \times AB - LB \times x + \frac{1}{2}xx + AaFD - AabB = SL \times AB - LB \times AD + \frac{1}{2}AD^2 - DFbB$, ſive ſubſtitutis $LA + \frac{1}{2}AB$ pro SL, $LA + AB$ loco LB, & pro $AB - AD$ poſito BD fiet ut $LA + \frac{1}{2}BD \times BD - DFbB$, & corpuſculo in contactu poſito, erit ut $\frac{1}{2}BD^2$.

(k) * *Id eſt, ob continuè proportionales* &c. Per prop. 8. l. 6. El. undè $AS^2 = PS \times SI$.



ducatur ſumma ſecundæ & tertiæ, & manebit area quæſita *ANB*. (1) Unde talis emergit problematis conſtructio. Ad puncta *L*, *A*, *S*, *B* erige perpendicula *Ll*, *Aa*, *Ss*, *Bb*, quorum *Ss* ipſi *SI* æquetur, perque punctum *s* aſymptotis *Ll*, *LB* deſcribatur hyperbola *asb* occurrens perpendiculis *Aa*, *Bb* in *a* & *b*; & rectangulum 2*ASI* ſubductum de area hyperbolica *AasbB* relinquet aream quæſitam *ANB*.

Exem-

(1) 526. * *Unde talis emergit problematis conſtructio.* Sit, ut ſuprà $AD = x$, $Dd = dx$, erit areæ AND, fluxio $DN \times Dd$, ut $\frac{LSI \times dx}{LD} - \frac{1}{2} SI \times dx - \frac{ALB \times SI \times dx}{2\,\overline{LA + x}^2}$.

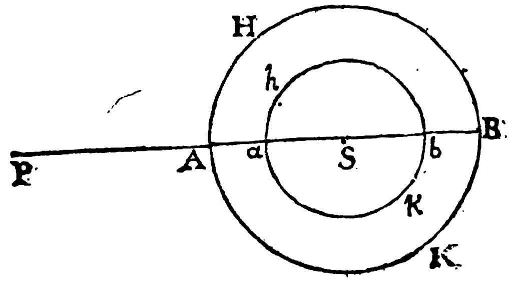
Jam ut primi termini $\frac{LSI \times dx}{LD}$, fluens habeatur, deſcribatur hyperbola aSb, eo modo quo jubet Newtonus, erectiſque perpendiculis DF, df, ſit $AD = x$, $Dd = dx$, & quoniam (per theor. 4. de hyperbolâ) $LS \times SI = LD \times DF$, erit $DF = \frac{LSI}{LD}$, & $DF \times Dd = \frac{LSI \times dx}{LD}$. Patet igitur (ut in not. 522.) aream Hyperbolicam AasbB, æqualem eſſe fluenti primi termini, dum AD ſeu $x = AB$; ſecundi termini $\frac{1}{2} SI \times dx$, fluens eſt $\frac{1}{2} SI \times AD = \frac{1}{2} SI \times AB$, dum fit $AD = AB$; tertii tandem termini fluens hoc modo invenitur. Quantitatis $\frac{dx}{(LA + x)^2}$ fluens (165) eſt $-\frac{1}{LA + x} + Q$ *conſtans*; & quoniam fluens illa evaneſcere debet ubi $x = 0$, erit $Q = \frac{1}{LA}$. Quarè fluens accurata eſt $\frac{1}{LA} - \frac{1}{LD} = \frac{1}{LA} - \frac{1}{LB}$, ubi $x = AB$. Eſt igitur tertii termini $\frac{1}{2} ALB \times SI \times \frac{dx}{\overline{LA + x}^2}$ fluens $= \frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB} = \frac{1}{2} LB \times SI - \frac{1}{2} LA \times SI = \frac{1}{2} AB \times SI$, undè ſumma 2[i] & 3[i] termini eſt $AB \times SI = 2AS \times SI$. Quarè rectangulum 2ASI ſubductum de areâ hyperbolicâ AasbB relinquet aream quæſitam ANB.

527. Cor. 1. Si corpus P ſphæram tangat in A, attractio evadet infinita, nam in hoc caſu $LA = 0$ & Aa cum aſymptoto Ll coincidit, ac proindè attractio per aream hyperbolæ infinitam BLlasb exponitur.

528. Coroll. 2. Vis quâ corpuſculum P in ſphæræ portionem convolutione ſuperficiei AEF, genitam trahitur, eſt ut $AaFD - \frac{1}{2} SI \times AD - \frac{1}{2} LB \times SI + \frac{ALB \times SI}{2LD}$, ut ex notâ 526. manifeſtum eſt. Quarè in contactu ubi $LA = 0$, erit vis illa ut area infinita AaFD, cujus reſpectu aliæ finitæ quantitates evaneſcunt.

529. Cor. 3. Et quoniam corpuſculi P attractio in ſphæram totam eſt ut area hyperbolica $AasbB - 2ASI$, ejuſdem attractio versùs portionem concavo convexam, convolutione ſuperficiei FEeB, genitam, erit ut $AasbB - AaFD - 2ASI + \frac{1}{2} AD \times SI + \frac{1}{2} LB \times SI - \frac{ALB \times SI}{2LD} = DFbB + \overline{\tfrac{1}{2} LA - \tfrac{1}{2} BD} \times SI - \frac{ALB \times SI}{2LD}$, ponendo AB pro 2AS, $\frac{1}{2} LA + \frac{1}{2} AB$ pro $\frac{1}{2} LB$, & $\frac{1}{2} BD$ pro $\frac{1}{2} AB - \frac{1}{2} AD$.

Exempl. 3. Si vis centripeta, ad ſingulas ſphæræ particulas tendens, decreſcit in quadruplicatâ ratione diſtantiæ à particulis; ſcribe $\frac{PEqq}{2AScub.}$ pro V, dein $\sqrt{2PS \times LD}$ (m) pro PE, & fiet DN ut $\frac{SIq \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDc}} - \frac{SIq}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD}} - \frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDqc}}$. (n) Cujus tres partes ductæ in longi-

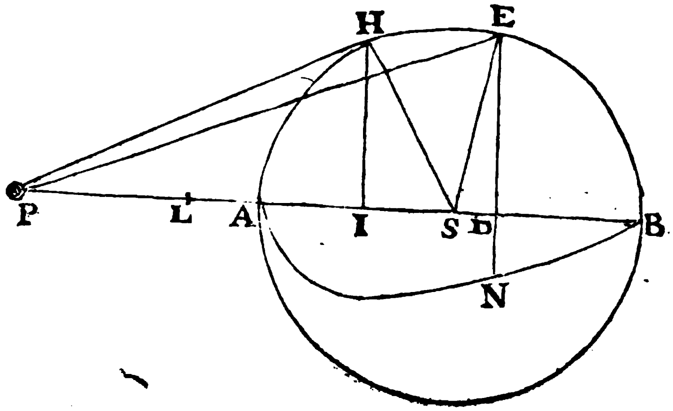


530. Cor. 4. Simili modo inveniri poteſt vis quâ corpus P trahitur versùs ſphæram concavam A a H B K a, ſi ex attractione in ſphæram totam ſolidam detrahatur attractio in ſphæram interiorem a h b k. Patet autem corpuſculi P in A, ſeu in contactu poſiti attractionem versùs ſphæram cavam A a H B K a, interiori concentricam, infinitam eſſe; Nam ſi ex vi infinitâ quâ versùs ſphæram ſolidam A H B K S, trahitur, ſubducatur vis finita quâ versùs ſphæram interiorem a h b k s urgetur, relinquetur attractio infinita versùs ſphæram concavam A a H B K a; quin imò, ſi ex ſphærâ concavâ detrahatur pars quævis à contactu remota ut H h B K k, attractio corpuſculi in contactu A poſiti versùs reſiduam H h A a K k, adhuc infinita erit, ut patet (per cor. 2. & 3.).

(m) * *Pro PE.* Erit $PE^5 = 4PS^2 \times LD^2 \times \sqrt{2PS \times LD}$, & $AS^3 = PS \times SI \times \sqrt{PS \times SI}$. Undè fiet $\frac{2SLD \times PS}{PE \times V} = \frac{4SLD \times PS \times AS^3}{PE^5} = \frac{4SL \times LD \times PS^2 \times SI\sqrt{PS \times SI}}{4PS^2 \times LD^2 \times \sqrt{2PS \times LD}} = \frac{SL \times SI\sqrt{SI}}{LD\sqrt{2LD}} = \frac{SL \times SI^2}{LD\sqrt{2SI \times LD}} = \frac{SI^2 \times SL}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD^3}}$. Et ità de cæteris terminis.

(n) * *Cujus tres partes &c.* Sit $AD = x$ fluxio $AD = dx$, & erit areæ AND fluxio $DN \times dx$, ut $\frac{SI^2 \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{dx}{\overline{LA+x}^{\frac{3}{2}}} - \frac{SI^2}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{dx}{\overline{LA+x}^{\frac{1}{2}}} - \frac{SI^2 \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{dx}{\overline{LA+x}^{\frac{5}{2}}}$, quantitatis $\frac{dx}{\overline{LA+x}^{\frac{3}{2}}}$, ſeu $\overline{LA+x}^{-\frac{3}{2}}dx$ fluens eſt

longitudinem AB, producunt areas totidem, *viz.* $\frac{2SIq\times SL}{\sqrt{2SI}}$ LIBER PRIMUS. PROP. LXXXI. PROB. XLI.



in $\frac{1}{\sqrt{LA}}-\frac{1}{\sqrt{LB}}$; $\frac{SIq}{\sqrt{2SI}}$ in $\sqrt{LB}-\sqrt{LA}$; & $\frac{SIq\times ALB}{2\sqrt{2SI}}$

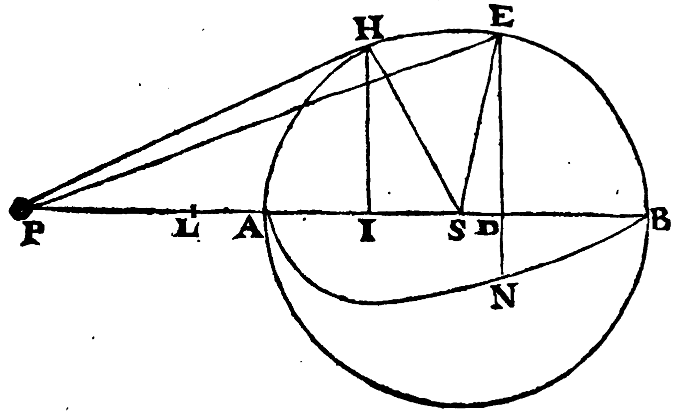
in:

$\frac{-2}{\overline{LA+x}|^{\frac{1}{2}}}+Q$ *conſt.* (165) quæ evaneſcere debet ubi $x=0$; Quarè erit $Q=\frac{2}{\sqrt{LA}}$, & fluens accurata $=\frac{2}{\sqrt{LA}}-\frac{2}{\sqrt{LB}}$, dum fit $x=AB$. Primi igitur termini fluens erit $\frac{2SI\times SL}{\sqrt{2SI}}$, in $\frac{1}{\sqrt{LA}}-\frac{1}{\sqrt{LB}}$. Quantitatis $\frac{dx}{\overline{LA+x}|^{\frac{1}{2}}}$, fluens eſt $2(LA+x)^{\frac{1}{2}}+Q$ *conſt.* & factâ $x=0$, invenitur $Q=-2\sqrt{LA}$; quarè fluens accurata eſt $2\sqrt{LB}-2\sqrt{LA}$, dum $x=AB$. Secundi igitur termini fluens erit $\frac{SI^2}{\sqrt{2SI}}$, in $\sqrt{LB}-\sqrt{LA}$.

Quantitatis $\frac{dx}{\overline{LA+x}|^{\frac{5}{2}}}$, fluens eſt $\frac{-2}{3(LA+x)^{\frac{3}{2}}}+Q$, & $Q=\frac{2}{3\sqrt{LA^3}}$, undè fluens integra erit $\frac{2}{3\sqrt{LA^3}}-\frac{2}{3\sqrt{LB^3}}$, ubi $x=AB$, & proindè tertii termini fluens eſt $\frac{SI^2\times ALB}{3\sqrt{2SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA^3}}-\frac{1}{\sqrt{LB^3}}$.

 Et

in $\frac{1}{\sqrt{LA\, cub.}} - \frac{1}{\sqrt{LB\, cub.}}$. Et (o) hæ poſt debitam re-



ductionem fiunt $\frac{2\, SIq \times SL}{LI}$, SIq, & $SIq + \frac{2\, SI\, cub.}{3\, LI}$. Hæ vero, ſubductis poſterioribus de priore, evadunt $\frac{4\, SI\, cub.}{3\, LI}$. Proin-

(o) * *Et hæ poſt debitam reductionem &c.* Eſt $PS \times SI = AS^2$ (per prop. 8. Lib. 6. Elem.) ſed $PS = LS + LI$, ob $PL = LI$, (per conſtr.) & $SI = LS - LI$, ergò $PS \times SI = LS^2 - LI^2 = AS^2$, & hinc $LI^2 = LS^2 - AS^2 = \overline{LS + AS} \times \overline{LS - AS} = LB \times LA$. Quarè LI ſive $LS - LI = \sqrt{LA \times LB}$, & $2\,LS - 2\,SI = 2\sqrt{LA \times LB}$, & $2\,SI = 2\,LS - 2\sqrt{LA \times LB} = LB - 2\sqrt{LB \times LA} + LA$, & extractâ utrinque radice quadratâ $\sqrt{2\,SI} = \sqrt{LB} - \sqrt{LA}$. His poſitis, facilis eſt terminorum reductio; erit enim $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}} = \frac{\sqrt{LB} - \sqrt{LA}}{\sqrt{LB \times LA}} = \frac{\sqrt{2\,SI}}{LI}$. Quarè patet primum fluentis terminum eſſe $\frac{2\,SI^2 \times SL}{LI}$; ſecundum verò eſſe SI^2. Tertius terminus, reductione ad communem denominatorem factâ, eſt $\frac{SI^2 \times LA \times LB}{3\sqrt{2\,SI}} \times \frac{\sqrt{LB^3} - \sqrt{A^3}}{LA \times LB \sqrt{LA \times LB}} = \frac{SI^2 \times \sqrt{LB^3} - \sqrt{LA^3}}{3\,LI \times \sqrt{LB} - \sqrt{LA}}$. Peractâ diviſione invenitur $\frac{LB^{\frac{3}{2}} - LA^{\frac{3}{2}}}{LB^{\frac{1}{2}} - LA^{\frac{1}{2}}} = LB +$

LB

Proinde vis tota, quâ corpuſculum P in ſphæræ centrum trahitur, eſt ut $\frac{SI\,cub.}{PI}$, (p) id eſt, reciprocè ut $PS\,cub. \times PI$. *Q. E. I.*

LIBER PRIMUS. PROP. LXXXI. PROBL. XLI.

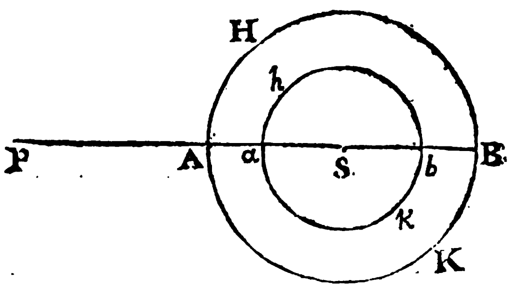
Eâdem methodo determinari poteſt attractio corpuſculi ſiti intra ſphæram, ſed expeditius per theorema ſequens.

PRO-

$LB^{\frac{1}{2}} \times LA^{\frac{1}{2}} + LA = LB + LI + LA = 2SI + 3LI$, ob $LB + LA = 2LS = 2SI + 2LI$. Quarè tertius terminus eſt $\frac{SI^2 \times \overline{2SI + 3LI}}{3LI} = SI^2 + \frac{2SI^3}{3LI}$, unde tres fluentes ad communem denominatorem reducti fiunt $\frac{6SI^2 \times SL - SI^2 \times 3LI - SI^2 \times 3LI - 2SI^3}{3LI} = \frac{6SI^2 \times \overline{SL - LI} - 2SI^3}{3LI}$, ſed quia $SL - LI = SI$ fiunt $\frac{6SI^3 - 2SI^3}{3LI} = \frac{4}{3}\frac{SI^3}{LI}$.

(p) * *Id eſt reciprocè ut $PS^3 \times PI$.* Nam cum ſit $PS \times SI = AS^2$, ideóque $SI = \frac{AS^2}{PS}$, hinc, dato radio AS, eſt SI ut $\frac{1}{PS}$, SI^3, ut $\frac{1}{PS^3}$; Eſt verò $= \frac{1}{2}$ PI ideóque etiam & LI ut PI, unde erit $\frac{4SI^3}{3LI}$ ut $\frac{1}{PS^3 \times PI}$, neglectâ fractione $\frac{4}{3}$.

531. Cor. 1. In acceſſu corporis P ad ſphæram, ità creſcit illiùs attractio, ut in contactu infinita evadat, dum enim coincidit P cum A, puncta H & I cum eodem puncto A coincidunt, fitque $PI = 0$, & proindè quantitas $\frac{1}{PS^3 \times PI}$, infinita.



532. Cor. 2. Attractio corpuſculi in contactu A poſiti versùs ſphæram cavam AaHBKa, infinita eſt. Hæc enim attractio habetur, ſi ex attractione infinitâ versùs ſphæram ſolidam AHBKS, ſubducatur attractio finita versùs ſphæram interiorem ahbkS.

533. Hic adjungemus ſolutionem caſûs tertii qui pendet à quadraturâ hyperbolæ, ubi nempè vis eſt ut PE^5 reciprocè (520). Scribe igitur $\frac{PE^5}{2AS^4}$, pro V; dein $8PS^3 \times LD^3$ pro PE^6, & $PS \times SI$ pro AS^2, unde eſt $\frac{PS}{PE \times V} = \frac{SI^2}{4LD^3}$ & fiet DN, ut $\frac{SL \times SI^2}{2LD^2} - \frac{SI^2}{4LD} - \frac{ALB \times SI^2}{4LD^3}$ ſeu, ut $\frac{SL \times SI^2}{LD^2} - \frac{1}{2}\frac{SI^2}{LD} - \frac{1}{2}\frac{ALB \times SI^2}{LD^3}$; undè fluxio $DN \times Dd$, erit ut $\frac{SL \times SI^2 \times dx}{\overline{LA + x}^2}$

PROPOSITIO LXXXII. THEOREMA XLI.

In ſphærâ centro S *intervallo* SA *deſcriptâ, ſi capiantur* SI, SA, SP *continuè proportionales: dico quod corpuſculi intra ſphæram, in loco quovis* I, *attractio eſt ad attractionem ipſius extra ſphæram, in loco* P, *in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione diſtantiarum à centro* IS, PS, *& ſubduplicatâ ratione virium centripetarum, in locis illis* P *&* I, *ad centrum tendentium.*

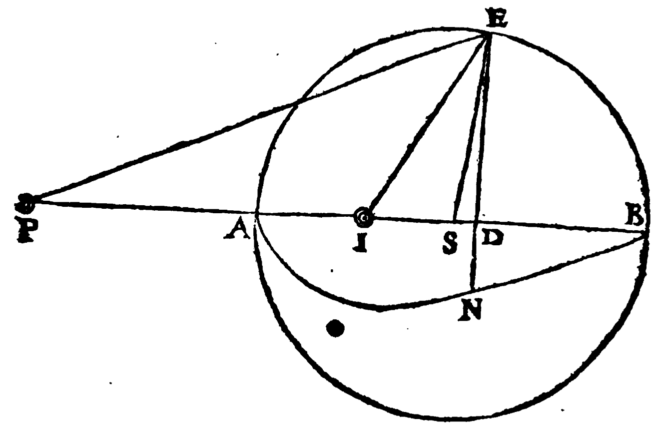
Ut, ſi vires centripetæ particularum ſphæræ ſint reciprocè ut diſtantiæ corpuſculi à ſe attracti; vis, quâ corpuſculum ſitum in *I* trahitur à ſphærâ totâ, erit ad vim, quâ trahitur in *P*, in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione diſtantiæ *SI* ad diſtantiam *SP*, & ratione ſubduplicatâ vis centripetæ in loco *I*, à particulâ aliquâ in centro oriundæ, ad vim centripetam in loco *P* ab eâdem in centro particulâ oriundam, id eſt, ratione ſubduplicatâ diſtantiarum *SI*, *SP* ad invicem reci-

$-\frac{1}{2}\frac{SI^2 \times dx}{\overline{LA+x}}-\frac{1}{2}\frac{ALB \times SI^2 \times dx}{\overline{LA+x}^3}$, poſitâ $AD = x$.

Quantitatis $\frac{dx}{\overline{LA+x}^2}$, fluentem ſuprà (526) invenimus eſſe $\frac{1}{LA}-\frac{1}{LB}=\frac{LB-LA}{LA \times LB}=\frac{AB}{LI^2}$ ubi x ſeu $AD = AB$. Quarè primi termini fluens erit $\frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}$.

Quantitatis $\frac{dx}{\overline{LA+x}^3}$ fluens $=\frac{-1}{2\,\overline{LA+x}^2}+Q$ *conſt.* quæ evaneſcere debet poſitâ x, ſeu $AD = 0$, quarè erit $Q=\frac{1}{2\,LA^2}$ & fluens accurata, ubi $AD = AB$, erit $\frac{1}{2\,LA^2}-\frac{1}{2\,LB^2}=\frac{LB^2-LA^2}{2LA^2 \times LB^2}=\frac{2SL \times AB}{2\,LI^4}=\frac{SL \times AB}{LI^4}$; undè tertii termini fluens erit $\frac{1}{2}\frac{ALB \times SI^2 \times SL \times AB}{LI^4}=\frac{1}{2}\frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}$, & differentia fluentium primi & tertii termini erit $\frac{1}{2}\frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}$. Secundi termini $\frac{1}{2}SI^2 \times \frac{dx}{\overline{LA+x}}$, fluens eſt area hyperbolæ quæ ità deſcribitur. Ad puncta L, A, B, vid. (fig. exempli 2[i].) erige perpendicula Ll, Aa, Bb, & aſymptotis Ll, LB, deſcribe Hyperbolam æquilateram cujus ſit dignitas $\frac{1}{2}SI^2$, & quoniam eſt (theor. 4. Hyp.) $LD \times DF = \frac{1}{2}SI^2$ ideóque $DF = \frac{1}{2}\frac{SI^2}{LD}$, erit $DF \times Dd = \frac{1}{2}\frac{SI^2 \times dx}{\overline{LA+x}}$ poſitâ $AD = x$. Quapropter area hyperbolica AabB, æqualis eſt fluenti ſecundi termini ubi $AD = AB$. Hæc igitur area ſubducta de rectangulo $\frac{1}{2}\frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}$ relinquet aream quæſitam ANB.

reciprocè. Hæ duæ rationes ſubduplicatæ componunt rationem æqualitatis, & propterea attractiones in *I* & *P* à ſphærâ totâ factæ æquantur. Simili computo, ſi vires particularum ſphæræ ſunt reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiarum, colligetur quod attractio in *I* ſit ad attractionem in *P*, ut diſtantia *SP* ad ſphæræ ſemidiametrum *SA*: ſi vires illæ ſunt reciprocè



in triplicatâ ratione diſtantiarum, attractiones in *I* & *P* erunt ad invicem ut *SP quad.* ad *SA quad.*: Si in quadruplicatâ, ut *SP cub.* ad *SA cub.* Unde cum attractio in *P*, in hoc ultimo caſu, inventa fuit reciprocè ut *PS cub.*×*PI*, attractio in *I* erit reciprocè ut *SA cub.*×*PI*, id eſt (ob datum *SA cub.*) reciprocè ut *PI*. Et (q) ſimilis eſt progreſſus in infinitum. Theorema verò ſic demonſtratur. Stan-

(q) * *Similis eſt progreſſus in infinitum.* Vires centripetæ acceleratrices à particulâ aliquâ in centro poſitâ oriundæ, ſint inter ſe in diſtantiis IS, PS reciprocè ut harum diſtantiarum poteſtates IS^n, PS^n, & vis quâ corpuſculum ſitum in I trahitur à ſphærâ totâ, erit ad vim quâ trahitur in loco P ut $IS^{\frac{1}{2}}$ ad $PS^{\frac{1}{2}}$ & $PS^{\frac{n}{2}}$ ad $IS^{\frac{n}{2}}$ conjunctim, hoc eſt, ut $PS^{\frac{n-1}{2}}$ ad $IS^{\frac{n-2}{2}}$. Quarè cum ſit, (ex Hyp.) PS:AS=AS:SI, adeóque $IS=\frac{AS^2}{PS}$, & $IS^{\frac{n-1}{2}}=\frac{AS^{n-1}}{PS^{\frac{n-1}{2}}}$, vires illæ erunt ad invicem ut $PS^{\frac{n-1}{2}}$ ad $\frac{AS^{n-1}}{PS^{\frac{n-1}{2}}}$, ſeu ut PS^{n-1} ad AS^{n-1}. Hinc ſi $n=1$, vires erunt in ratione æqualitatis, ſi $n=2$, erunt ut PS ad AS; Si $n=3$ ut PS^2 ad AS^2, ſi $n=4$ ut PS^3 ad AS^3, & ità porrò in infinitum.

DE MOTU CORPORUM.

Stantibus jam ante conſtructis, & exiſtente corpuſculo in loco quovis P, ordinatim applicata DN (r) inventa fuit ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$. Ergo ſi agatur IE, ordinata illa pro alio quovis corpuſculi loco I, (ſ) mutatis mutandis, evadet ut $\frac{DEq \times IS}{IE \times V}$. Pone vires centripetas, è ſphæræ puncto quovis E manantes, eſſe ad invicem in diſtantiis IE, PE, ut PE^n ad IE^n (ubi numerus n deſignet indicem poteſtatum PE & IE) & (t) ordinatæ illæ fient ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times PE^n}$ & $\frac{DEq \times IS}{IE \times IE^n}$, quarum ratio ad invicem eſt ut $PS \times IE \times IE^n$ ad $IS \times PE \times PE^n$. Quoniam ob continuè proportionales SI, SE, SP, (u) ſimilia ſunt triangula SPE, SEI, & inde fit IE ad PE ut IS ad SE vel SA; pro ratione IE ad PE ſcribe rationem IS ad SA; & ordinatarum ratio evadet $PS \times IE^n$ ad $SA \times PE^n$. (x) Sed PS ad SA ſubduplicata eſt ratio diſtantiarum PS, SI; &

(r) * *Ordinatim applicata DN inventa fuit &c.* (cor. 4. prop. 80.)

(ſ) * *Mutatis mutandis.* Nempè corpore in I ſito, radio IE, deſcribendus arcus circuli, & in formulâ attractionis $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$, loco PS & PE, ſcribe IS, & IE.

(t) * *Et ordinatæ illæ &c.* Si loco V ſcribantur PE^n, & IE^n, quæ ſunt reciprocè ut vires acceleratrices in locis P & I, (per cor. 4. prop. 80.)

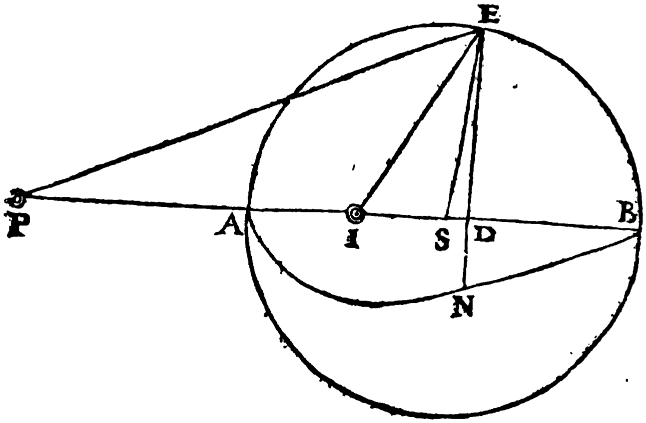
(u) * *Similia ſunt triangula SPE, SEI*, per prop. 6. Lib. 6. Elem.

(x) * *Sed PS ad SA ſubduplicata eſt ratio diſtantiarum PS, SI*, ob continuè proportionales PS, SA, SI. Porrò vires in diſtantiis PS, IS, ſunt ad invicem ut IS^n, ad PS^n (ex Hyp.) & $IS : PS = IS^2 : AS^2 = IE^2 : PE^2$, (ob proportionales $IE : PE = IS : AS$), atque adeò $IS^n : PS^n = IE^{2n} : PE^{2n}$, & $IS^{\frac{n}{2}} : PS^{\frac{n}{2}} = IE^n : PE^n$. Quarè IE^n eſt ad PE^n in ratione ſubduplicatâ virium in diſtantiis PS, IS, & ordinatarum ratio $PS \times IE^n$, ad $SA \times PE^n$ æqualis eſt rationi $PS^{\frac{1}{2}} \times IS^{\frac{n}{2}}$, ad $IS^{\frac{1}{2}} \times PS^{\frac{n}{2}}$.

534. Scholium. Iiſdem poſitis quæ in prop. 82. ſi centro I radio IA ſphæra ACMD deſcripta ſit, vis quâ corpuſculum in I ſitum à totâ ſphærâ majore AHBK versùs centrum S trahitur, æqualis eſt vi quâ ſubductâ ſphæra minore ACMD traheretur. Nam corpuſculum in centro I ſphæræ ACMD poſitum, æqualiter undiquè ab hujus ſphæræ minoris partibus trahitur.

535. Cor. 1. Si centro S radio SI deſcripta ſit ſphæra Ihbk, & vis centripeta in receſſu corporis attracti decreſcat in triplicatâ ratione diſtantiarum à particulis materiæ trahentibus, corpuſculum in I ſitum ſeu in contactu ſphæræ cavæ AIHBKI, ſubductâ ſphærâ interiore Ihbk, vi infinitâ retrahitur à centro S versùs A. Nam vis quâ corpuſculum

& IE^n ad PE^n (ob proportionales *IE* ad *PE* ut *IS* ad *SA*) ſubduplicata eſt ratio virium in diſtantiis *PS*, *IS*. Ergo ordina-

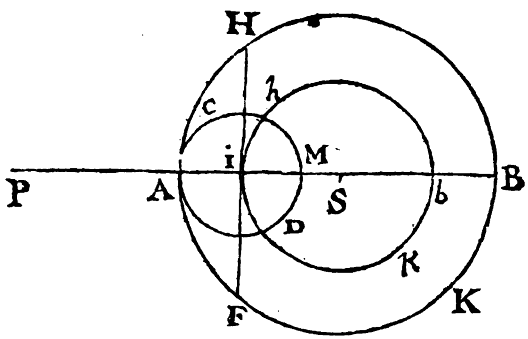


tæ, & propterea areæ quas ordinatæ deſcribunt hiſque proportionales attractiones, ſunt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatis illis rationibus. *Q. E. D.*

PRO-

lum in contactu I à ſphærâ interiore I h b k verſùs centrum S trahitur, infinita eſt (520. 527.) reſpectu vis illius quâ extrà contactum traheretur. Sed vis quâ à ſphærâ totâ ſolidâ A H B K S, verſus idem centrum S trahitur finita eſt, ut potè quæ rationem finitam habeat ad vim finitam, quâ corpuſculum in loco P urgeretur (prop. 82.) ergò vis quâ à ſphærâ cavâ AIHBKI, retrahitur à centro versùs A infinita eſt; vis enim quâ in centrum S, à ſphærâ ſolidâ A H B K S in centrum trahitur, æqualis eſt vi ſphæræ interioris I h b k s, demptâ vi contrariâ ſphæræ cavæ A I H B K I.

536. Cor. 2. Ductâ per I rectâ H F ad A B perpendiculari & ſphæræ occurrente in H & F vis quâ ſphæræ ſegmentum A H F corpuſculum in contactu, I ſitum verſus A trahit, eſt etiam infinita in eâdem virium hypotheſi. Nam partes omnes ſegmenti cavi I H b B K F I, corpus in I poſitum ad centrum S trahunt, ideòque à ſolo ſegmento A H F à centro verſus A retrahitur, ſed vi infinitâ à centro retrahitur 535. Ergo &c.

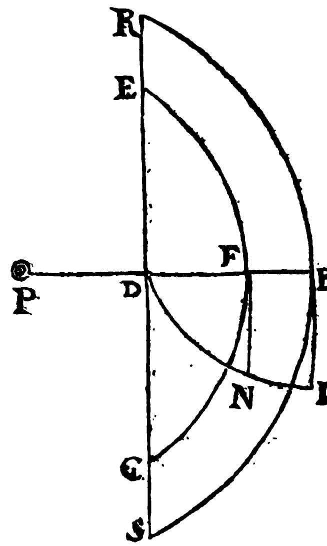


De Motu Corporum.

PROPOSITIO LXXXIII. PROBLEMA XLII.

Invenire vim quâ corpuſculum in centro ſphæræ locatum ad ejus ſegmentum quodcunque attrahitur.

Si *P* corpus in centro ſphæræ, & *RBSD* ſegmentum ejus plano *RDS* & ſuperficie ſphæricâ *RBS* contentum. Superficie ſphæricâ *EFG* centro *P* deſcriptâ ſecetur *DB* in *F*, ac diſtinguatur ſegmentum in partes *BREFGS*, *FEDG*. Sit autem ſuperficies illa non purè mathematica, ſed phyſica, profunditatem habens quam minimam. Nominetur iſta profunditas O, & erit hæc ſuperficies (per (y) demonſtrata *Archimedis*) ut $PF \times DF \times O$. Ponamus præterea vires attractivas particularum ſphæræ eſſe reciprocè ut diſtantiarum dignitas illa, cujus index eſt *n*; & vis, quâ ſuperficies *EFG* trahit corpus *P*, erit (per prop. LXXIX.) ut $\frac{DEq \times O}{PF^n}$, id (z) eſt, ut $\frac{2DF \times O}{PF^{n-1}} - \frac{DFq \times O}{PF^n}$.



Huic proportionale ſit perpendiculum *FN* ductum in O; & (a) area curvilinea *BDI*, quam ordinatim applicata *FN* in

(y) * *Per demonſtrata Archimedis.* Nam (515) elementum ſuperficiei EFG, eſt ut PF ducta in elementum lineæ DF, adeóque ob datam PF, reſpectu ſuperficiei totius EFG, ſuperficies illa (165.) erit ut $PF \times DF$, & proinde lamina ex hâc ſuperficie & profunditate O, genita erit ut $PF \times DF \times O$.

(z) * *Id eſt* &c. Nam (per prop. 13. Lib. 6. Elem.) $DE^2 = 2PF - DF \times DF = 2PF \times DF - DF^2$. Quarè $\frac{DE^2 \times O}{PF^n} = \frac{2DF \times O}{PF^{n-1}} - \frac{DF^2 \times O}{PF^n}$.

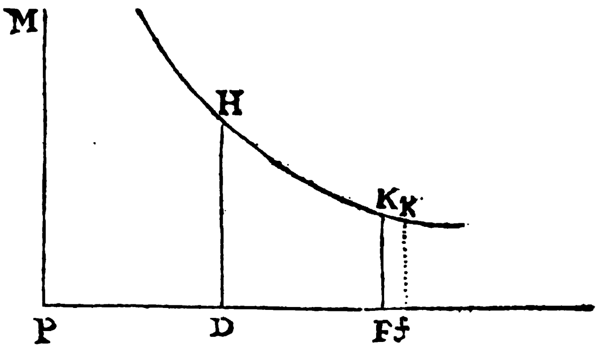
(a) 537. * *Et area curvilinea &c.* Si ſegmentum RBSDR, in laminas innumeras profunditatis evaneſcentis O diviſum intelligatur, & capiatur ſemper perpendiculum FN, vi ſingularum laminarum proportionale; manifeſtum eſt (per Lem. 4.) ſummam elementorum $FN \times O$, ſeu aream curvilineam DNIB, proportionalem fore ſummæ virium. Sit igitur $PD = a$, $PF = x$.

in longitudinem DB per motum continuum ducta deſcribit, erit ut vis tota quâ ſegmentum totum $RBSD$ trahit corpus P. $Q.E.I.$

$=x$, DF $=x-a$, & erit laminæ ſphæricæ EFG vis attractiva ut $\frac{2xdx-2adx}{x^{n-1}} = \frac{xxdx-2axdx+aadx}{x^{n}} = \frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{aadx}{x^{n}} = x^{2-n}dx - aax^{-n}dx$, cujus fluens $= \frac{x^{3-n}}{3-n} - \frac{aax^{1-n}}{1-n} + Q$ *conſt.* Sed poſita $x=a$, ſegmentum & vis illius evaneſcunt, ergò erit $Q = -\frac{a^{3-n}}{3-n} + \frac{a^{3-n}}{1-n} = \frac{2a^{3-n}}{\overline{3-n}\times\overline{1-n}}$, & fluens accurata $= \frac{x^{3-n}}{3-n} - \frac{aax^{1-n}}{1-n} + \frac{2a^{2-n}}{\overline{3-n}\times\overline{1-n}}$.

538. Cor. Hinc patet vim quâ corpus in P locatum, à ſegmento trahitur ſemper poſſe algebraicè exponi, duobus caſibus exceptis in quibus n eſt 1 vel 3. tùm autem per logarithmos vel areas hyperbolicas habetur. In 1°. caſu areæ DNI, fluxio erit $xdx - \frac{aadx}{x}$. Primi termini fluens eſt $\frac{1}{2}xx + Q$, quæ evaneſcere debet poſitâ $x=a$, quare erit $Q = -\frac{1}{2}aa$, & fluens accurata $= \frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}aa$. Ut ſecundi termini fluens obtineatur, per punctum P agatur PM ad PF normalis, & aſymptotis PM, PF, deſcribatur Hyperbola æquilatera cujus ſit dignitas PD²; per puncta D, F, f erigantur perpendicula DH, FK, fk hyperbolæ occurrentia in H, K, k, ſintque puncta F, f, infinitè propinqua, & erit area hyperbolica DHKF, æqualis fluenti ſecundi termini; nam (per theor. 4. de hyperbolâ) $PD \times DH = PD^2 = PF \times FK$, & ideò $FK = \frac{PD^2}{PF}$, ac $FK \times Ff = \frac{PD^2 \times dx}{x}$ & area DHKF evaneſcit, ubi PF ſeu $x = PD$.

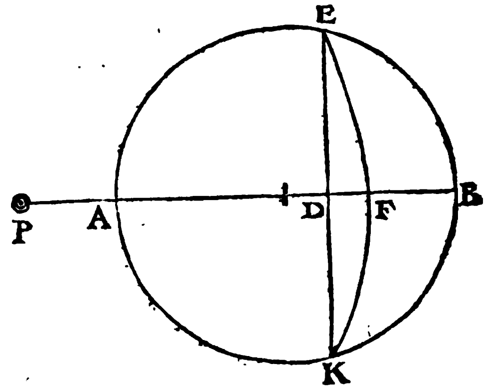
In 2°. caſu areæ DNI, fluxio eſt $\frac{dx}{x} - \frac{aadx}{x^3}$. Secundi termini fluxio eſt $\frac{aa}{2xx} + Q$, & invenitur $Q = -\frac{1}{2}$, poſitâ $x=a$, atque adeò fluens accurata, erit $\frac{aa}{2ax} - \frac{1}{2}$. Ponatur $a=1$, & primi termini $\frac{dx}{x}$, fluens, erit area hyperbolica DHKF $= S. \frac{aadx}{x}$. Quarè area DNI eſt ut, DHKF $+ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}xx$.



DE MOTU CORPORUM.

PROPOSITIO LXXXIV. PROBLEMA XLIII.

Invenire vim, quâ corpuſculum, extra centrum ſphæræ in axe ſegmenti cujuſvis locatum, attrahitur ab eodem ſegmento.



A ſegmento *E B K* trahatur corpus *P* in ejus axe *A D B* locatum. Centro *P* intervallo *P E* deſcribatur ſuperficies ſphærica *E F K*, quâ diſtinguatur ſegmentum in partes duas *E B K F E* & *E F K D E*. (b) Quæratur vis partis prioris per prop. LXXXI. & vis partis poſterioris per prop. LXXXIII.; & ſumma virium erit vis ſegmenti totius *E B K D E*. *Q. E. I.*

Scholium.

Explicatis attractionibus corporum ſphæricorum, jam pergere liceret ad leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis ſimiliter conſtantium corporum; ſed iſta particulatim tractare minus ad inſtitutum ſpectat. Sufficerit propoſitiones quaſdam generaliores de viribus hujuſmodi corporum deque motibus inde oriundis, ob (c) earum in rebus philoſophicis aliqualem uſum, ſubjungere.

SEC-

(b) * *Quæratur vis partis prioris.* 525. 529.

(c) * *Ob earum in rebus philoſophicis aliqualem uſum.* Vide quæſtiones Lib 4. opticæs Newtoni. 30 theoremata ad calcem aſtronomiæ clariſſ. Keillii, Phyſicam Clariſſ. s'Graveſandii, Diſſertationem Clariſſ. De Maupertuis in commentariis Pariſ. 1732. ubi has Newtoni ſectiones clarè exponit.

SECTIO XIII.

De corporum non ſphæricorum viribus attractivis.

PROPOSITIO LXXXV. THEOREMA XLII.

Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum eſt, attractio longè fortior ſit, quam cum vel minimo intervallo ſeparantur ab invicem: vires particularum trahentis, in receſſu corporis attracti, decreſcunt in ratione pluſquam duplicatâ diſtantiarum à particulis.

Nam ſi vires decreſcunt in ratione duplicatâ diſtantiarum à particulis; attractio verſus corpus ſphæricum, propterea quod (per. prop. LXXIV.) ſit reciprocè ut quadratum diſtantiæ attracti corporis à centro ſphæræ, haud ſenſibiliter augebitur ex contactu; atque adhuc minus augebitur ex contactu, ſi attractio in receſſu corporis attracti decreſcat in ratione minore. Patet igitur propoſitio de ſphæris attractivis. Et (d) par eſt ratio orbium ſphæricorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res conſtat in orbibus corpora interius conſtituta trahentibus, cum attractiones paſſim per orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per prop. LXX.) tollantur, ideoque vel in ipſo contactu nullæ ſunt. Quod ſi ſphæris hiſce orbibuſque ſphæricis partes quælibet à loco contactus remotæ auferantur, & partes novæ ubivis addantur: mutari poſſunt figuræ horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additæ vel ſubductæ, cum ſint à loco contactus remotæ, augebunt notabiliter attractionis exceſſum, qui ex contactu oritur. Conſtat igitur propoſitio de corporibus figurarum omnium. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXXVI. THEOREMA XLIII.

Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in receſſu corporis attracti decreſcunt in triplicatâ vel pluſquam triplicatâ ratione diſtantiarum à particulis, attractio longe fortior erit in contactu, quam cum trahens & attractum intervallo vel minimo ſeparantur ab invicem.

Nam attractionem in acceſſu attracti corpuſculi ad hujuſ-

(d) * *Et par eſt ratio orbium ſphæricorum concavorum.* (Per prop. 71.).

DE MOTU CORPORUM.

modi ſphæram trahentem (e) augeri in infinitum, conſtat per ſolutionem problematis XLI. in exemplo ſecundo ac tertio exhibitam. Idem, per exempla illa & theorema XLI. inter ſe collata, facile (f) colligitur de attractionibus corporum verſus orbes concavo-convexos, ſive corpora attracta collocentur extra orbes, ſive intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel auferendo his ſphæris & orbibus ubivis extra locum contactus materiam quamlibet attractivam, eò ut corpora attractiva induant figuram quamvis aſſignatam, conſtabit propoſitio de corporibus univerſis. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXXVII. THEOREMA XLIV.

Si corpora duo ſibi invicem ſimilia, & ex materiâ æqualiter attractivâ conſtantia, ſeorſim attrahant corpuſcula ſibi ipſis proportionalia & ad ſe ſimiliter poſita: attractiones acceleratrices corpuſculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpuſculorum in eorum particulas totis proportionales, & in totis ſimiliter poſitas.

Nam ſi corpora diſtinguantur in particulas, quæ ſint totis proportionales, & in totis ſimiliter ſitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correſpondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas ſingulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas ſingulas correſpondentes; & componendo, ita attractio in totum primum corpus (g) ad attractionem in totum ſecundum. *Q. E. D.*

Co-

(e) * *Augeri in infinitum conſtat &c.* (521. 527. 531.).

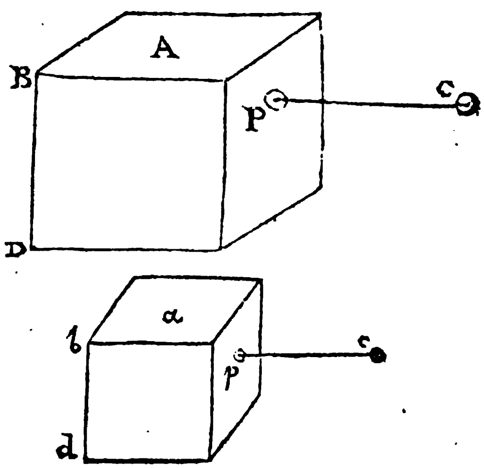
(f) * *Facilè colligitur de attractionibus &c.* 528. 530. 532. 535. 536.

(g) 539. * *Ad attractionem in totum ſecundum.* Corpora ſimilia A, a, ſeorſim attrahant corpuſcula C, c ſibi ipſis proportionalia & ad ſe ſimiliter poſita, ſintque P, p particulæ totis A, a, proportionales & in totis ſimiliter ſitæ & attractio decreſcat in ratione dignitatis diſtantiarum, cujus ſit index n; erit attractio corpuſculi C in particulam P ad attractionem corpuſculi c in particulam p, ut $P \times pc^n$, ad $p \times PC^n$. Undè ſi corpora A & a in particulas innumeras ut P & p diviſâ intelligantur, erit, componendo, attractio corpuſculi C in totum corpus A ad attractionem corpuſculi c in totum corpus a, ut $P \times pc^n$ ad $p \times PC^n$, quod par-

Corol. 1. Ergo ſi vires attractivæ particularum, augendo diſtantias corpuſculorum attractorum, decreſcant in ratione dignitatis cujuſvis diſtantiarum; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directè, & diſtantiarum dignitates illæ inversè. Ut ſi vires particularum decreſcant in ratione duplicatâ diſtantiarum à corpuſculis attractis, corpora autem ſint ut *A cub.* & *B cub.* ideoque tum corporum latera cubica, tum corpuſculorum attractorum diſtantiæ à corporibus, ut *A* & *B*: attractiones acceleratrices in corpora erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ quad.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ quad.}$, id eſt, ut corporum latera illa cubica *A* & *B*. Si vires particularum decreſcant in ratione triplicatâ diſtantiarum à corpuſculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ cub.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ cub.}$, id eſt, æquales. Si vires decreſcant in ratione quadruplicatâ; attractiones in corpora erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ q\ q.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ q\ q.}$, id eſt, reciprocè ut latera cubica *A* & *B*. Et ſic in cæteris.

Co-

particulæ omnes P, p ſint ubique totis ſimiles & in iis ſimiliter ſitæ, & diſtantiæ earum à corpuſculis C, c ſemper maneant proportionales diſtantiis PC, pc. Cum igitur ſit P ad p ut A ad a, & diſtantiæ pc, PC ſint lateribus homologis bd, BD proportionales (ex Hyp.) erit attractio corpuſculi C, in totum corpus A, ad attractionem corpuſculi c in totum corpus a, ut $A \times pc^n$ ad $a \times PC^n$, atque etiam ut $A \times bd^n$ ad $a \times BD^n$, & ut $BD^3 \times bd^n$, ad $bd^3 \times BD^n$, hoc eſt, ut bd^{n-3} ad BD^{n-3}, ob proportionales $A : a = BD^3 : bd^3$, (per Hyp.) ex quibus patet corollarium 1um. quod ſequitur; Nam ſi $n = 2$, erunt attractiones ut BD ad bd; ſi $n = 3$, erunt æquales; ſi, $n = 4$, erunt ut bd, ad BD, hoc eſt, reciprocè ut latera cubica corporum.



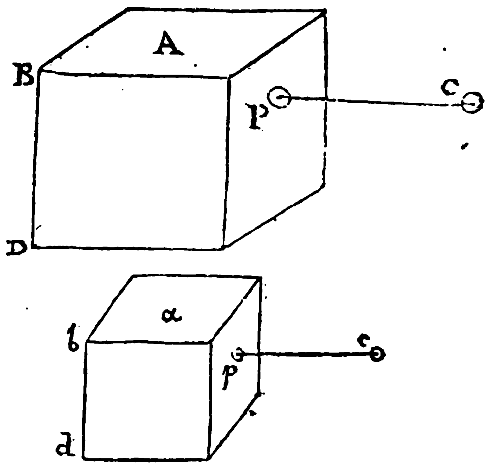
De Motu Corporum.

Corol. 2. (h) Unde viciſſim, ex viribus, quibus corpora ſimilia trahunt corpuſcula ad ſe ſimiliter poſita, colligi poteſt ratio decrementi virium particularum attractivarum in receſſu corpuſculi attracti; ſi modo decrementum illud ſit directè vel inversè in ratione aliquâ diſtantiarum.

PROPOSITIO LXXXVIII. THEOREMA XLV.

Si particularum æqualium corporis cujuſcunque vires attractivæ ſint ut diſtantiæ locorum à particulis: vis corporis totiùs tendet ad ipſius centrum gravitatis; & eadem erit cum vi globi ex materiâ conſimili & æquali conſtantis, & centrum habentis in ejus centro gravitatis.

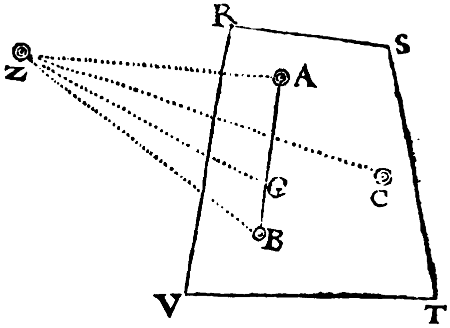
Corporis *RSTV* particulæ *A*, *B* trahant corpuſculum aliquod *Z* viribus, quæ, ſi particulæ æquantur inter ſe, ſint ut diſtantiæ *AZ*, *BZ*; ſin particulæ ſtatuantur inæquales, ſint ut hæ particulæ & ipſarum diſtantiæ *AZ*, *BZ* conjunctim,



(h) 540. * *Undè viciſſim &c.* Nam ſi experimentis inventum ſit attractionem corpuſculi C in corpus A, eſſe ad attractionem corpuſculi c, in corpus a, ut eſt BD ad bd, vel ut 1 ad 1, vel ut bd ab BD, vires particularum attractivarum decreſcunt in ratione diſtantiarum duplicatâ, vel triplicatâ, vel quadruplicatâ (539). Et generatim, ſi experimentis inventa fuerit attractio corpuſculi C in A ad attractionem corpuſculi c in a, ut numerus N ad numerum n, ponaturque vim particularum attractivarum in receſſu corpuſculi attracti decreſcere in ratione dignitatis diſtantiarum cujus ſit index x erit (539) $n : N = BD^{x-3} : bd^{x-3}$, adeóque (ſi L logarithmum ſignificet quantitatis cui præponitur) erit $L. \frac{n}{N} = L. \frac{BD^{x-3}}{bd^{x-3}} = \overline{x-3} \times L. \frac{BD}{bd}$. Quarè erit $x \times L. \frac{BD}{bd} = L. \frac{n}{N} + 3. L. \frac{BD}{bd}$, & $x = \frac{L. \frac{n}{N}}{L. \frac{BD}{bd}} + 3$. Invenietur itaque dignitatis index x, per tabulas logarithmicas. Exempli causâ. Si $\frac{n}{N} = \frac{bd}{BD}$, erit $L. \frac{bd}{BD} = - L. \frac{BD}{bd}$, & ideò $x = -1 + 3 = 2$. Si $\frac{n}{N} = 1$, erit $L. \frac{n}{N} = 0$, & proindè $x = 3$. Si $\frac{n}{N} = \frac{BD}{bd}$, erit $x = 4$, prorsùs ut ſuprà. Si $\frac{n}{N} = \frac{BD^p}{bd^p}$, erit $L. \frac{n}{N} = p \times L. \frac{BD}{bd}$, & $x = p + 3$. Sed ſi $\frac{n}{N} =$

bd

ſive (ſi ita loquar) ut hæ particulæ in diſtantias ſuas *AZ*, *BZ* reſpectivè ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta illa $A \times AZ$ & $B \times BZ$. Jungatur *AB*, & ſecetur ea in *G* ut ſit *AG* ad *BG* ut particula *B* ad particulam *A*; & erit *G* commune centrum gravitatis particularum *A* & *B*. Vis $A \times AZ$ (per legum corol. 2.) reſolvitur in vires $A \times GZ$ & $A \times AG$, & vis $B \times BZ$ in vires $B \times GZ$ & $B \times BG$. Vires autem $A \times AG$ & $B \times BG$, ob proportionales *A* ad *B* & *BG* ad *AG*, æquantur; ideoque cum dirigantur in partes contrarias, ſe mutuo deſtruunt. Reſtant vires $A \times GZ$ & $B \times GZ$. Tendunt hæ ab *Z* verſus centrum *G*, & vim $\overline{A+B} \times GZ$ componunt; hoc eſt, vim eandem ac ſi particulæ attractivæ *A* & *B* conſiſterent in eorum communi gravitatis centro *G*, globum ibi componentes.



Eodem argumento, ſi adjungatur particula tertia *C*, & componatur hujus vis cum vi $\overline{A+B} \times GZ$ tendente ad centrum *G*; vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis globi illius in *G* & particulæ *C*; hoc eſt, ad commune centrum gravitatis trium particularum *A*, *B*, *C*; & eadem erit, ac ſi globus & particula *C* conſiſterent in centro illo communi, globum majorem ibi componentes. Et ſic pergitur in infinitum. Eadem eſt igitur vis tota particularum omnium corporis cujuſcunque *RSTV*, ac ſi corpus illud, ſervato gravitatis centro, (i) figuram globi indueret. *Q. E. D.*

Corol. Hinc motus corporis attracti *Z* idem erit, ac ſi corpus attrahens *RSTV* eſſet ſphæricum: & propterea ſi corpus il-

$\frac{bdp}{BDp}$, invenietur $x = 3 - p$. Si $\frac{BD}{bd} = 10$, erit $x = \frac{L\frac{n}{N}}{1.0000000} + 3 = L\frac{n}{N} + 3$.

(i) * *Figuram globi indueret.* Per prop. 77.

lud attrahens vel quieſcat, vel progrediatur uniformiter in directum; corpus attractum (k) movebitur in ellipſi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

PROPOSITIO LXXXIX. THEOREMA XLVI.

Si corpora ſint plura ex particulis æqualibus conſtantia, quarum vires ſunt ut diſtantiæ locorum à ſingulis: vis ex omnium viribus compoſita, quâ corpuſculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis; & eadem erit, ac ſi trahentia illa, ſervato gravitatis centro communi, coirent & in globum formarentur.

Demonſtratur eodem modo, atque propoſitio ſuperior.

Corol. Ergo motus corporis attracti idem erit, ac ſi corpora trahentia, ſervato communi gravitatis centro, coirent & in globum formarentur. Ideoque ſi corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quieſcit, vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; corpus attractum movebitur in ellipſi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

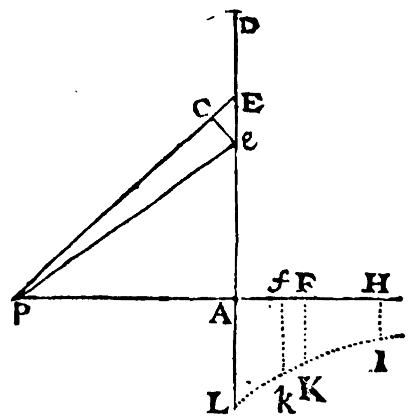
PROPOSITIO XC. PROBLEMA XLIV.

Si ad ſingula circuli cujuſcunque puncta tendant vires æquales centripetæ, creſcentes vel decreſcentes in quâcunque diſtantiarum ratione: invenire vim, quâ corpuſculum attrahitur ubivis poſitum in rectâ, quæ plano circuli ad centrum ejus perpendiculariter inſiſtit,

Centro *A* intervallo quovis *AD*, in plano, cui recta *AP* perpendicularis eſt, deſcribi intelligatur circulus; & invenienda ſit vis, quâ corpuſculum quodvis *P* in eundem attrahitur. A circuli puncto quovis *E* ad corpuſculum attractum *P* agatur recta *PE*. In rectâ *PA* capiatur *PF* ipſi *PE* æqualis, &

(k) * *Movebitur in ellipſi &c.* Per cor. prop. 78. & per cor. 1. prop. 10.

& erigatur normalis FK, quæ ſit ut vis quâ punctum E trahit corpuſculum P. Sitque IKL curva linea quam punctum K perpetuò tangit. Occurrat eadem circuli plano in L. In PA capiatur PH æqualis PD, & erigatur perpendiculum HI curvæ prædictæ occurrens in I; & erit corpuſculi P attractio in circulum ut area $AHIL$ ducta in altitudinem AP. *Q. E. I.*

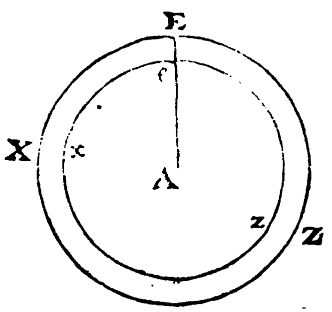


Etenim in AE capiatur linea quam minima Ee. Jungatur Pe & in PE, PA capiantur PC, Pf ipſi Pe æquales. Et quoniam vis, quâ annuli centro A intervallo AE in plano prædicto deſcripti punctum quodvis E trahit ad ſe corpus P, ponitur eſſe ut FK, & inde vis quâ punctum illud trahit corpus P verſus A, (l) eſt ut $\frac{AP \times FK}{PE}$, & vis, quâ annulus totus trahit corpus P verſus A, ut annulus & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim; (m) annulus autem iſte eſt ut rectangulum ſub radio AE & latitudine Ee, & hoc (n) rectangulum (ob proportionales PE & AE, Ee & CE) æquatur rectangulo $PE \times CE$ ſeu $PE \times Ff$; erit vis, quâ annulus iſte trahit corpus P verſus A, ut $PE \times Ff$ & AP

(l) * *Eſt ut* $\frac{AP \times FK}{PE}$, per leg. cor. 2.

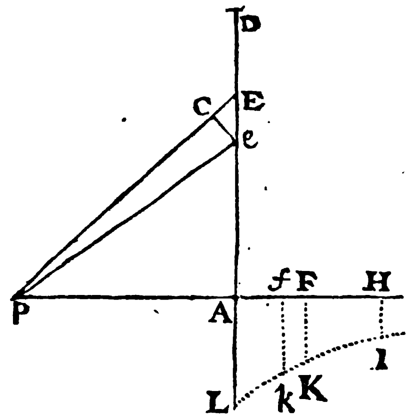
(m) * *Annulus autem iſte &c.* Nam annulus E Z X e, æqualis eſt differentiæ circulorum A E Z X, A e z x, hoc eſt, $\frac{AE \times EZXE - Ae \times ezxe}{2}$, & quoniam evaneſcente E e, fit E Z X E = e z x e, erit annulus evaneſcens ut $\overline{AE - Ae} \times EZXE$, hoc eſt, ut E e × E Z X E ſive quia radius AE eſt ut peripheria EZXE, ut E e × A E'.

(n) * *Et hoc rectangulum &c.* Anguli enim ad C & A recti æquantur, &.



DE MOTU CORPORUM.

$\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim, id eſt, ut contentum $Ff \times FK \times AP$, ſive ut area $FKkf$ ducta in AP. Et (o) propterea ſumma virium, quibus annuli omnes in circulo, qui centro A & intervallo AD deſcribitur, trahunt corpus P verſus A, eſt ut area tota $AHIKL$ ducta in AP. *Q. E. D.*



Corol. 1. Hinc ſi vires punctorum decreſcunt in duplicatâ diſtantiarum ratione, hoc eſt, ſi ſit FK ut $\frac{1}{PF\ quad.}$, (p) atque ideo area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$; erit attractio corpuſculi P in circulum ut $1 - \frac{PA}{PH}$, id eſt, ut $\frac{AH}{PH}$.

Corol. 2. Et univerſaliter, ſi vires punctorum ad diſtantias D ſint reciprocè ut diſtantiarum dignitas quælibet D^n, hoc eſt, ſi ſit FK ut $\frac{1}{D^n}$, (q) ideoque area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA^{n-1}}$

angulus PEA utrique triangulo CEc, AEP communis eſt, adeóque triangula hæc ſimilia ſunt, & latera habent proportionalia. (Per prop. 4. lib. 6. Elem.)

(o) * *Et propterea ſumma virium &c.* Per cor. lem. 4.

(p) * *Atque ideò area &c.* Sit enim $PF = x$, $Ff = dx$, & erit $FK \times Ff$, ut $\frac{dx}{xx}$ (ex hyp.) cujus fluens eſt $-\frac{1}{x} + Q\ conſt.$ (165); Et quoniam area ALKF evaneſcere debet, ubi $PF = PA$, erit $Q = \frac{1}{PA}$ & area ALKF ut $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PF} = \frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$ ubi $PF = PH$. Cùm igitur attractio corpuſculi P, in circulum ſit ut $AHIKL \times PA$, erit quoque ut $1 - \frac{PA}{PH} = \frac{PH - PA}{PH} = \frac{AH}{PH}$.

(q) * *Ideóque area &c.* Si enim D dicatur x, erit $PK \times Ff$ ut $\frac{dx}{x^n}$, (ex hyp.) & (165.) area AFKL, ut $\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + Q\ conſt.$ poſitâ x ſeu $PF = PA$, invenitur $Q = \frac{1}{(n-1)PA^{n-1}}$, ideóque area AFKL, ut $\frac{1}{(n-1)PA^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$ hoc

$-\frac{1}{PH^{n-1}}$; erit attractio corpuſculi P in circulum ut $\frac{1}{PA^{n-2}}$ $-\frac{PA}{PH^{n-1}}$.

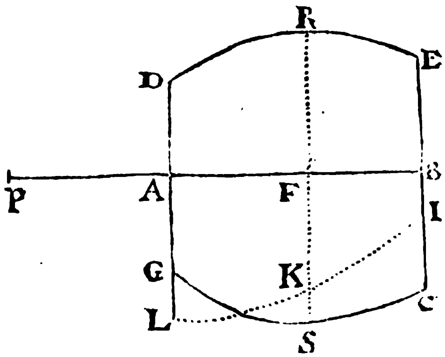
LIBER PRIMUS. PROP. XC. PROBL. XLIV.

Corol. 3. Et ſi diameter circuli augeatur in infinitum, & numerus n ſit unitate major; attractio corpuſculi P in planum totum infinitum erit reciprocè ut PA^{n-2}, propterea quod (r) terminus alter $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ evaneſcet.

PROPOSITIO XCI. PROBLEMA XLV.

Invenire attractionem corpuſculi ſiti in axe ſolidi rotundi, ad cujus puncta ſingula tendunt vires æquales centripetæ in quâcunque diſtantiarum ratione decreſcentes.

In ſolidum (ſ) $DECG$ trahatur corpuſculum P, ſitum in ejus axe AB. Circulo quolibet RFS ad hunc axem perpendiculari ſecetur hoc ſolidum, & in ejus ſemidiametro FS, in plano aliquo $PALKB$ per axem tranſeunte, capiatur (per prop. xc.) longitudo FK vi, quâ corpuſculum P in circulum illum attrahitur, proportionalis.



Tangat autem punctum K curvam lineam LKI, planis extimorum circulorum AL & BI occurrentem in L & I; & erit attractio corpuſculi P in ſolidum ut (t) area $LABI$. *Q. E. I.*

Co-

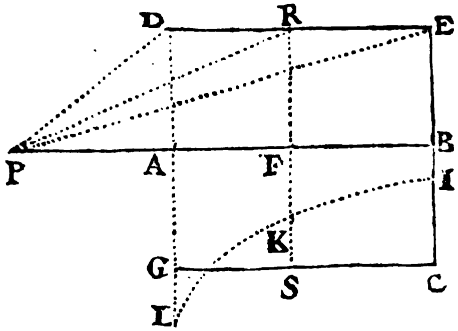
hoc eſt, ob datam quantitatem $n-1$, ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$ ubi $PF = PH$.

(r) * *Terminus alter evaneſcet.* Ob PH, infinitam.

(ſ) * *In ſolidum DECG &c.* Convolutione ſuperficiei ADREB circà axem AB genitum.

(t) * *Ut area LABI.* Patet per cor. lem. 4. Nam area illa eſt ut ſumma virium ſingulorum circulorum, qui per omnia puncta lineæ AB deſcribi poſſunt.

541. Scholium. Sit abſciſſa $PF = x$, ejus fluxio dx, ordinatim applicata $FR = y$, $PR = \sqrt{yy + xx}$, & vis reciprocè ut



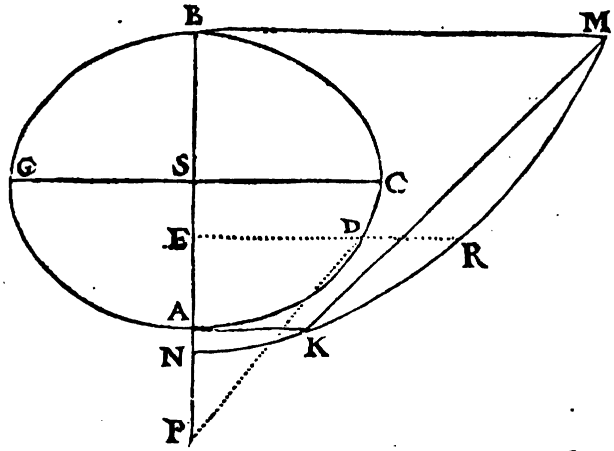
Corol. 1. Unde ſi ſolidum cylindrus ſit, parallelogrammo $ADEB$ circa axem AB revoluto deſcriptus, & vires centripetæ in ſingula ejus puncta tendentes ſint reciprocè ut quadrata diſtantiarum à punctis: (u) erit attractio corpuſculi P in hunc cylindrum ut $AB - PE + PD$. Nam ordinatim applicata FK (per corol. 1. prop. xc.) erit ut $1 - \frac{PF}{PR}$. Hujus pars 1 ducta in longitudinem AB, deſcribit aream $1 \times AB$: & pars altera $\frac{PF}{PR}$ ducta in longitudinem PB, deſcribit aream 1 in $\overline{PE - AD}$, id quod ex curvæ LKI quadraturâ facilè oſtendi poteſt; & ſimiliter pars eadem ducta in longitudinem PA deſcribit aream 1 in $\overline{PD - AD}$, ductaque in ipſarum PB, PA differentiam AB deſcribit arearum differentiam 1 in $\overline{PE - PD}$. De contento primo $1 \times AB$ auferatur contentum poſtremum 1 in $\overline{PE - PD}$, & reſtabit area $LABI$ æqualis 1 in $\overline{AB - PE + PD}$. Ergo vis, huic areæ proportionalis, eſt ut $AB - PE + PD$.

Co-

ut diſtantiæ dignitas cujus index n, erit FK ut $\frac{1}{PF^{n-2}} - \frac{PF}{PR^{n-1}} = \frac{1}{x^{n-2}} - \frac{x}{(yy + xx)^{\frac{n-1}{2}}}$ (per cor. 2. prop. 90.) Quarè areæ AFKL fluxio erit ut $\frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{-xdx}{(yy + xx)^{\frac{n-1}{2}}}$, & hujus fluens ut vis quâ corpuſculum P in ſolidum DRSG trahitur. Datâ verò curvæ DRE naturâ, inveniendus eſt valor ordinatæ y per abſciſſam x, & indè fluens determinanda.

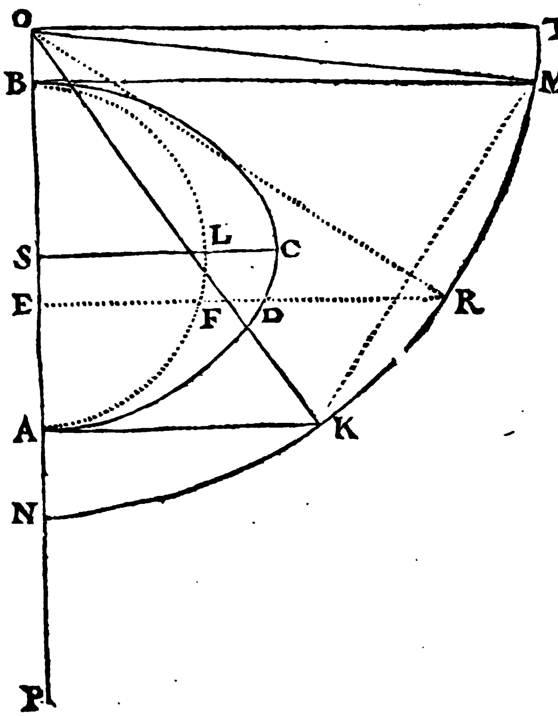
(u) * *Erit attractio corpuſculi P &c.* Si ordinatim applicata FR, dicatur b, patet (429) areæ AFKL, elementum fore ut $dx - \frac{xdx}{(bb + xx)^{\frac{1}{2}}}$. Fiat $bb + xx = zz$, & erit $xdx = zdz$, & proindè elementum prædictum ut $dx - dz$. Quarè AFKL erit ut $x - z + Q$, & quoniam hæc area evaneſcit, ubi PF, ſeu $x = PA$, & PR ſeu $z = PD$, erit $Q = PD - PA$, & area AFKL, ſeu attractio corpuſculi P, in cylindrum DRSG, ut $PF - PR + PD - PA = AF - PR + PD = AB - PE + PD$, ubi fit $PF = PB$, & $PR = PE$.

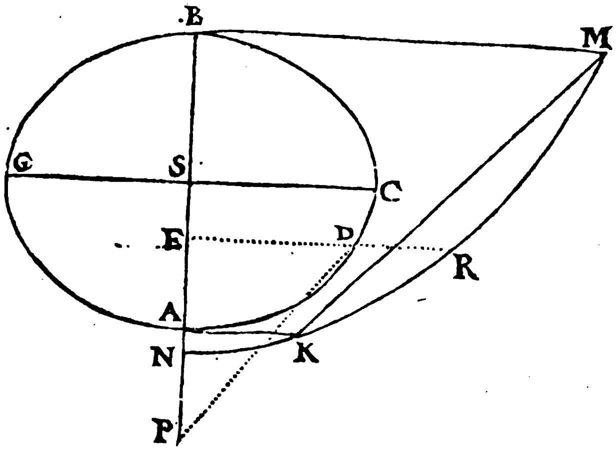
Corol. 2. Hinc etiam vis innoteſcit, quâ ſphærois *AGBC* attrahit corpus quodvis *P*, exterius in axe ſuo *AB* ſitum. (x) Sit *NKRM* ſectio conica cujus ordinatim applicata *ER*, ipſi *PE* perpendicularis, æquetur ſemper longitudini *PD*, quæ ducitur ad punctum illud *D*, in quo applicata iſta ſphæroidem ſecat.



(x) 542. *Sit NKRM ſectio conica cujus ordinatim applicata ER æquetur ſemper longitudini PD &c.* Sit $AP = a$, curvæ datæ ACB cujus convolutione generatur ſphærois ſit ſemiaxis $AS = b$, alter ſemiaxis $SC = c$, $AE = x$, erit $PE = a + x$, & (ex naturâ Ellipſeos) erit $BD^2 = \frac{cc}{bb} \times \overline{2bx - xx}$; unde quadratum ER ordinatæ ad curvam NKRM ſive $PD^2 = PE^2 + ED^2 = a^2 + 2ax + xx + \frac{cc}{bb} \times 2bx - \frac{cc}{bb} xx$; cum ergo hæc Æquatio ad curvam NKRM, ultrà ſecundum gradum non aſſurgat conſtat eam curvam eſſe ex Sectionibus Conicis: erit autem Ellipſis ſi quantitas $xx - \frac{cc}{bb} xx$ ſit negativa, quod evenit ubi SC (ſive c) major eſt quàm AS (ſive b); Erit verò Parabola ſi ea quantitas evaneſcat, ideoque ſi $c = b$ quod evenit ubi curva ACB eſt circulus; Denique erit Hyperbola ſi ea quantitas ſit poſitiva, hoc eſt, ſi AS ſit longior axis.

543. Sit ACB Ellipſis cujus axis CS ſit major axi AS, quo caſu curva NKRM erit Ellipſis, hac ratione ejus curvæ NKRM determinabuntur Axes & Vertex. Dicatur ejus Ellipſeos NKRM ſemiaxis $ON = s$, alter ſemiaxis OT dicatur t, diſtantia verticis N à vertice A curvæ ACB, dicatur





ſecat. A ſphæroidis verticibus A, B ad ejus axem AB erigantur perpendicula AK, BM ipſis AP, BP æqualia reſpectivè, & propterea ſectioni conicæ occurrentia in K & M; & jungatur KM auferens ab eâdem ſegmentum $KMRK$. Sit autem

ſphæ-

p, abſciſſa NE erit $= p + x$, & ordinatæ ER quadratum erit ex Ellipſeos natura $\frac{tt}{ss} \times \overline{2sp + 2sx - pp - 2px - xx}$, quod ex conſtructionis Hypotheſi fuit repertum (542) $= a^2 + 2ax + xx + \frac{cc}{bb} 2bx - \frac{cc}{bb} xx$. Conferantur horum valorum termini homogenei, ſcilicet conſtantes cum conſtantibus, eos qui unam variabilem includunt cum ſimilibus &c. fient tres iſtæ Æquationes (variabilibus deletis) $a^2 = \frac{tt}{ss} \times \overline{2sp - pp}$; $a + \frac{cc}{b} = \frac{tt}{ss} \times \overline{s - p}$; $1 - \frac{cc}{bb} = - \frac{tt}{ss}$. Ex hac tertiâ Æquatione, mutatis ſignis utrinque, reducto primo membro ad communem denominatorem, & inverſis terminis fit $\frac{ss}{tt} = \frac{bb}{cc - bb}$ & $ss = \frac{bbt^2}{cc - bb}$. Tum ſecundæ Æquationis $a + \frac{cc}{b} = \frac{tt}{ss} \overline{\times s - p}$ multiplicatis terminis per $\frac{ss}{tt}$, reductione factâ primi membri ad eumdem denominatorem, & ſubſtitutione factâ valoris $\frac{ss}{tt}$ ſupra inventi fit $s - p = \frac{b}{cc - bb} \times \overline{ba + cc}$.

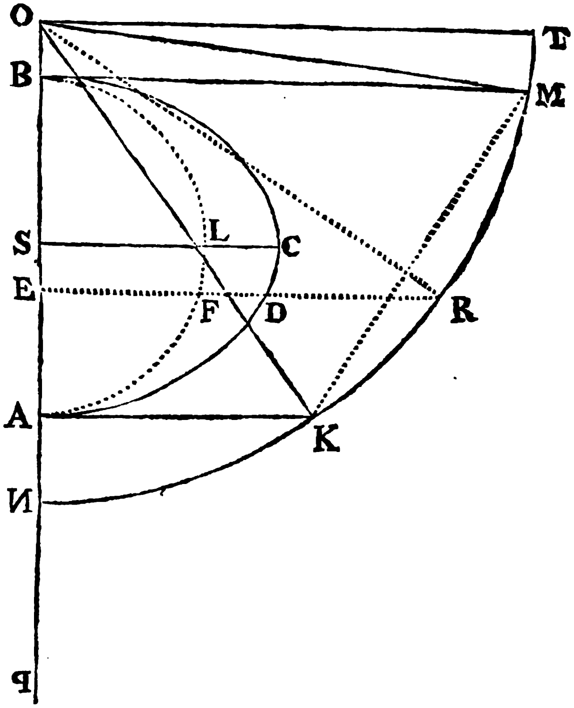
Denique, primæ Æquationis $a^2 = \frac{tt}{ss} \times \overline{2sp - pp}$ multiplicatis membris per $\frac{ss}{tt}$, ſubſtituto ejus valore, utrinque mutatis ſignis & addito ss, fit tandem $ss - \frac{b^2}{c^2 - b^2} a^2 = ss - 2sp + pp$, in quâ novâ Æquatione cum ſecundum membrum ſit ipſum quadratum quantitatis $s - p$, ſubſtituto ejus valore prius reperto, & loco ss in primo membro ſubſtituto etiam ejus valore, fit $\frac{bb}{c^2 - b^2} \times \overline{t^2 - a^2} = \frac{bb}{\overline{c^2 - b^2}^2} \times \overline{ba + cc}^2$ & diviſo utroque membro per $\frac{b^2}{c^2 - b^2}$ tranſponendo a^2, & reducendo ſecundum membrum ad communem denominatorem, deletiſque terminis ſeſe deſtruentibus eſt $t^2 = \frac{c^2}{c^2 - b^2} \times \overline{a^2 + 2ab + c^2}$, ſive quia $PS = a + b$ eſt $PS^2 - b^2 = a^2 + 2ab$, ideoque eſt $t^2 = \frac{c^2}{c^2 - b^2} \times \overline{PS^2 - b^2 + c^2}$ nempe $OT^2 = \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2} \times \overline{PS^2 - AS^2 + CS^2}$ qui termini ſunt omnes dati, hoc ergo invento cætera ad Ellipſim pertinentia commodè invenientur.

In gratiam notæ ſequentis, ex his valorem

ſphæroidis centrum S & ſemidiameter maxima SC: & vis, quâ ſphæ-

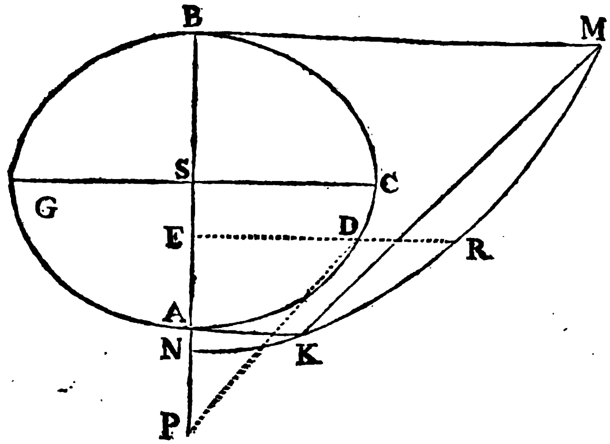
lorem quantitatis $\frac{t^2+s^2-PO^2}{t^2}$ determinabimus, quam eſſe æqualem quantitati $\frac{CS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$, ita ex valoribus ſupra inventis ſtatuitur; Eſt $ss=\frac{bbt^2}{c^2-b^2}$ ex tertiâ Æquatione, unde erit $s^2+t^2=\frac{b^2t^2+c^2t^2-b^2t^2}{c^2-b^2}=\frac{c^2t^2}{c^2-b^2}$, ideoque $\frac{s^2+t^2}{t^2}=\frac{c^2}{c^2-b^2}=\frac{CS^2}{CS^2-AS^2}$. Eſt verò $AO=s-p$, & $PO=PA+AO=a+s-p$, & cum ſit $s-p=\frac{b}{cc-bb}\times\overline{ba+cc}$ (ex ſecundâ Æquatione) eſt $PO=a+\frac{b}{cc-bb}\times\overline{ba+cc}$, quo valore reducto ad communem denominatorem, deletiſque terminis ſeſe deſtruentibus eſt $PO=\frac{cc}{c^2-b^2}\times\overline{a+b}$ ſive $=\frac{CS^2}{CS^2-AS^2}\times PS$, cumque ſit $t^2=\frac{CS^2}{CS^2-AS^2\times\overline{PS^2-AS^2+CS^2}}$ eſt $\frac{PO}{t^2}=\frac{PS}{PS^2-AS^2+CS^2}$ & $\frac{PO^2}{t^2}=\frac{CS^2}{CS^2-AS^2}\times\frac{PS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$. Unde tandem eſt $\frac{s^2+t^2-PO^2}{t^2}=\frac{CS^2}{CS^2-AS^2}-\frac{CS^2}{CS^2-AS^2}\times\frac{PS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$ ſive $=\frac{CS^2}{CS^2-AS}\times\overline{1-\frac{PS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}}$ reducendoque ad eumdem denominatorem, deletiſque terminis ſeſe deſtruentibus $=\frac{CS^2}{CS^2-AS^2}\times\frac{-AS^2+CS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}=\frac{CS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$ diviſo numeratore & denominatore per CS^2-AS^2. Eſt ergo $\frac{s^2+t^2-PO^2}{t^2}=\frac{CS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$ Q. E. D.

544. Sit autem curvâ data ACB circulus, ita ut ſphærois ejus convolutione genita, ſit accurata ſphæra, erit curva NKRM Parabola, ſtantibus enim quæ in n°. 542. dicta ſunt, erit ut prius $PE=a+x$, & ex naturâ Circuli $EF^2=2bx-xx$, unde erit PF^2 quadratum $=PE^2+EF^2=a^2+2ax+xx+2bx-xx=a^2+2ax+2bx$; cum ergo ordinata ER ad curvam NKRM



ſumatur æqualis PF, ejus ordinatæ quadratum erit æquale abſciſſæ ipſi per quantitates conſtantes ductæ, ſed ultra primum gradum non aſſurgenti, quæ eſt Parabolæ proprietas. Dicatur ergo ejus Parabolæ latus rectum l, diſtantiâ verticis N à vertice A curvæ ACB dicatur p, abſciſſa NE erit $p+x$ & ex Parabolæ natura erit ordinatæ ER quadratum $=lp+lx$ conferatur hic valor cum valore ejuſdem ER^2 ſupra invento $a^2+2ax+2bx$, termini conſtantes cum conſtantibus & qui variabilem includunt cum ſimilibus, fient duæ Æquationes $lp=a^2$, & $l=2a+2b=2PS$, ideo-

ſphærois (†) trahit corpus P, erit ad vim, quâ ſphæra diametro AB deſcripta trahit idem corpus, ut $\frac{AS \times CSq - PS \times KMRK}{PSq + CSq - ASq}$



ad $\frac{AS\ cub.}{3\,PS\ quad.}$. Et eodem computandi fundamento invenire licet vires ſegmentorum ſphæroidis.

ideoque $p = \frac{a^2}{2a+2b} = \frac{PA^2}{2PS}$; & cum ex natura Parabolæ, ſit $ER^2 = l \times \overline{p+x}$ erit $p+x = NE = \frac{ER^2}{2PS}$; Cumque area Parabolica inter abſciſſam, ordinatam, & curvam intercepta ſit æqualis duobus tertiis Rectanguli abſciſſæ per ordinatam, erit area Parabolica $NER = \frac{\frac{2}{3}ER^3}{2PS} = \frac{ER^3}{3PS}$, & quoniam, ex conſtructione, ordinatæ in A & B erectæ ſunt æquales PA & PB, erit area Parabolica $PAK = \frac{PA^3}{3PS}$ & area Parabolica $PBM = \frac{PB^3}{3PS} = \frac{\overline{PA+2AS}^3}{3PS}$ & differentiâ harum arearum AKRMB reſpondens axi Sphæræ AB, erit $\frac{6PA^2 \times AS + 12PA \times AS^2 + 8AS^3}{3PS}$, & denique dempto trapezio AKMB, ſegmentum Parabolicum reſiduum KRM erit æquale $\frac{2AS^3}{3PS}$, trapezium enim AKMB eſt æquale $\frac{1}{2}AB \times \overline{AK+BM}$ ſive (quia $\frac{1}{2}AB = AS$, $AK = PA$ & $BM = PB = PA + 2AS$) eſt æquale $2AS \times PA + 2AS^2$, & reducendo ad denominatorem $3PS$ ſive $3PA + 3AS$ eſt æquale $\frac{6AS \times PA^2 + 12AS^2 \times PA + 6AS^3}{3PS}$ quod deductum ex area AKRMB $= \frac{6PA^2 \times AS + 12PA \times AS^2 + 8AS^3}{3PS}$ remanet $\frac{2AS^3}{3PS}$. Q. E. D.

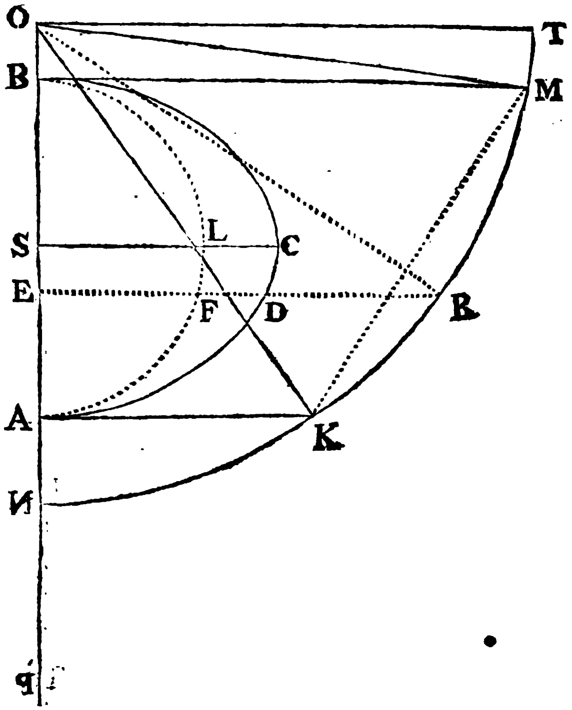
(†) 545. *Vis quâ ſphærois trahit corpus P eſt ad vim quâ ſphæra Diametro AB deſcripta trahit idem corpus ut* $\frac{AS \times CS^2 - PS \times KMRK}{PS^2 + CS^2 - AS^2}$ ad $\frac{AS^3}{3PS^2}$.

Supponatur juxta ſolutionem hujuſce Problematis, curvam deſcribi ſecundum AB, cujus

jus ordinatæ ſingulo puncto F applicatæ ſint æquales vi quâ corpus P à circulo cujus radius eſt ED trahitur; ea vis eſt per Cor. 1. Prop. XC. ut $1-\frac{PE}{PD}$, ſit CE hujus curvæ abſciſſa ſumpta à puncto O (centro curvæ NKRM juxta notam 543. determinatæ) dicaturque z, ejus fluxio erit dz, fluxio itaque areæ curvæ quæ exhibet vim ſphæroidis erit $dz-\frac{PE}{PD}dz$, cumque ſit $PE=PO-OE=PO-z$ & $PD=ER$ ordinatæ curvæ NKRM, per conſtructionem, ſitque ER (ut facile deducitur ex n°. 543) $=\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}$, fluxio ejus areæ erit $dz-\frac{PO\,dz}{\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}}+\frac{z\,dz}{\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}}$.

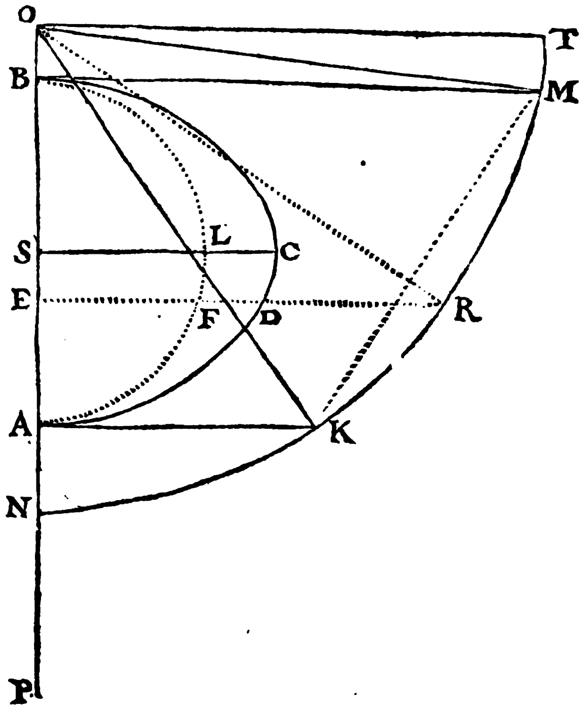
Terminorum poſitivorum $dz+\frac{z\,dz}{\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}}$ fluens eſt $z-\frac{s}{t}\sqrt{ss-zz}$ (165) ſed ut $z=OE$ & $\frac{s}{t}\sqrt{ss-zz}=\frac{ss}{tt}\times\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}=\frac{ss}{tt}ER$ fluxio terminis poſitivis reſpondens eſt $OE-\frac{ss}{tt}ER$, & area toti lineæ OA reſpondens eſt $OA-\frac{s^2}{t^2}AK$, ex quâ demenda area parti OB reſpondens ſecundum quam curva quæ vim ſphæroidis exprimit non ducitur quæque eſt $OB-\frac{s^2}{t^2}BM$, utque per conſtructionem $AK=AP$, & $BM=PB=BA+AP$ erit vera fluens $OA-OB-\frac{s^2}{t^2}\times\overline{AK-BA-AP}=AB+\frac{s^2}{t^2}AB=AB\times\frac{s^2+t^2}{t^2}$.

Tertii termini $\frac{PO\,dz}{\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}}$ fluens ſic invenitur, Sectoris Elliptici TOK fluxio eſt (424) $\frac{\frac{1}{2}\,s\,dz}{\sqrt{ss-zz}}$ multiplicetur per $\frac{2PO}{tt^2}$ naſcetur terminus propoſitus $\frac{PO\,dz}{\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}}$ unde fluens termini propoſiti erit Sector ille Ellipticus TOK per $\frac{2PO}{t^2}$ multiplicatus, ſed quoniam area quæſita non reſpondet toti OA, ſed tantum ejus parti AB, vera fluens areæ quæſitæ ex tertio termino inveniendo eſt ſector $TOK\times\frac{2PO}{t^2}$ dempto ſectore $TOM\times\frac{2PO}{t^2}$ ſive ſector $MOK\times\frac{2PO}{t^2}$; Dividitur autem ſector MOK in figuram rectilineam MOK & mixtilineam MRK; Triangulum MOK valet $\frac{1}{2}PO\times AB$, nam producatur recta MK pertinget ad P, propter $PA=AK$ & $PB=BM$, totum verò Triangulum $OMP=\frac{1}{2}OP\times BM=\frac{1}{2}OP\times PB$, & Triangulum $OKP=\frac{1}{2}OP\times AK=\frac{1}{2}OP\times AP$, unde ſublato Triang. OKP ex Triang. OMP, remanet Triang. OMK =



DE MOTU CORPORUM.

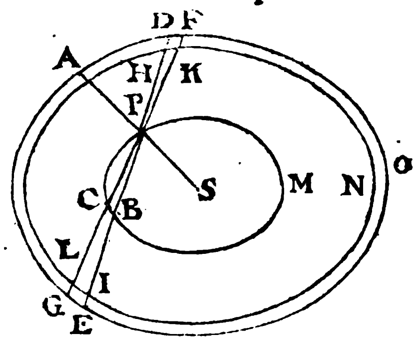
$=\frac{1}{2}OP\times PB-AP=\frac{1}{2}OP\times AB$. Unde tandem fluens quæſita hujus tertii termini eſt $\frac{2PO}{t^2}\times\frac{1}{2}OP\times AB+\frac{2PO}{t^2}\times MRK=\frac{PO^2}{t^2}\times AB+\frac{2PO}{t^2}\times MRK$, quæ detracta ex fluente terminorum poſitivorum $AB\times\frac{s^2+t^2}{t^2}$ fit $AB\times\frac{s^2+t^2-PO^2}{t^2}-\frac{2PO}{t^2}\times MRK$, cum ergo ſit $\frac{s^2+t^2-PO^2}{t^2}=\frac{CS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$ & $\frac{PO}{t^2}=\frac{PS}{PS^2-AS^2+CS^2}$ (543) eſt fluens quæſita (quia $AB=2AS$) $\frac{2AS\times CS^2-2PS\times MRK}{PS^2-AS^2+CS^2}$.



Si autem curva ACB ſit circulus, ſphærois in ſphæram veram mutatur, fit $CS=AS$ & ſegmentum MRK fit $\frac{2AS^3}{3PS}$ (544) ideoque mutatur hæc formula in iſtam $\frac{2AS\times AS^2-\frac{2PS\times 2AS^3}{3PS}}{PS^2-AS^2+AS^2}$ $=\frac{2AS^3-\frac{4}{3}AS^3}{PS^2}=\frac{2AS^3}{3PS^2}$ quæ exprimet vim ſphæræ; itaque diviſa expreſſione vis ſphæroidis & vis ſphæræ per communem multiplicatorem 2; Erit *vis ſphæroidis ad vim ſphæræ ut* $\frac{AS\times CS^2-PS\times MRK}{PS^2-AS^2+CS^2}$ *ad* $\frac{AS^3}{3PS^2}$. Q. E. D.

Poteſt etiam determinari vis ſphæræ, hoc calculo, ſit ut prius $PA=a$, $AB=2b$, abſciſſa $AE=x$, $PF=v$, erit $PE^2=a^2+2ax+xx$, & $EF^2=2bx-xx$ (ex naturâ circuli) ideoque $PF^2\,(vv)=a^2+2ax+2bx$, unde invenitur $x=\frac{vv-a^2}{2\times\overline{a+b}}$ & $dx=\frac{2vdv}{2\times\overline{a+b}}=\frac{vdv}{a+b}$ & $PE=a+x=\frac{a^2+2ab+vv}{2\times\overline{a+b}}$ & $\frac{dx}{PF}=\frac{dv}{a+b}$. Itaque, cum fluxio areæ quæ exprimit vim ſphæræ ſit per Cor. 1. Prop. xc. ut $dx-\frac{PE\,dx}{PF}$, erit ea fluxio ut $dx-\frac{a^2+2ab+vv}{2\times\overline{a+b}^2}dv$ cujus fluens eſt $x-\frac{a^2v+2abv+\frac{1}{3}v^3}{2\times\overline{a+b}^2}+Q$ *conſt.*, quæ evaneſcere debet ubi $x=0$ & $v=a$ ideoque eſt $-\frac{a^3+2a^2b+\frac{1}{3}a^3}{2\times\overline{a+b}^2}+Q=0$, & $Q=\frac{\frac{4}{3}a^3+2a^2b}{2\times\overline{a+b}^2}$: Vis autem totius Sphæræ obtinetur ſi fiat $x=AB\,(2b)$ & $v=PB\,(a+2b)$, eſtque ideo $2b+\frac{\frac{4}{3}a^3+2a^2b-a^3-4a^2b-4ab^2-\frac{1}{3}a^3-2a^2b-4ab^2-\frac{8}{3}b^3}{2\times\overline{a+b}^2}$ $=2b-\frac{4a^2b+8ab^2+\frac{8}{3}b^3}{2\times\overline{a+b}^2}=2b\times 1-\frac{2a^2+4ab+\frac{4}{3}b^2}{2\times\overline{a+b}^2}$, & reducendo ad eumdem denominatorem $=2b\times\frac{2a^2+4ab+2b^2-2a^2-4ab-\frac{4}{3}b^2}{2\times\overline{a+b}^2}$ $=2b\times\frac{\frac{2}{3}b^2}{2\times\overline{a+b}^2}$ ſive ponendo AS pro b, & PS pro $a+b$ dividendoque numeratorem & denominatorem per 2, vis tota Sphæræ eſt $\frac{2AS^3}{3PS^2}$. Q. E. I.

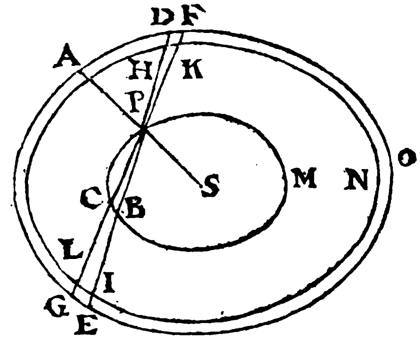
Corol. 3. Quod ſi corpuſculum intra ſphæroidem in axe collocetur, attractio erit ut ipſius diſtantia à centro. Id quod facilius hoc argumento colligitur, ſive particula in axe ſit, ſive in aliâ quâvis diametro datâ. Sit *AGOF* ſphærois attrahens, *S* centrum ejus, & *P* corpus attractum. Per corpus illud *P* agantur tum ſemidiameter *SPA*, tum rectæ duæ quævis *DE*, *FG* ſphæroidi hinc inde occurrentes in *D* & *E*, *F* & *G*; ſintque *PCM*, *HLN* ſuperficies ſphæroidum duarum interiorum, exteriori ſimilium & concentricarum, quarum prior tranſeat per corpus *P*, & ſecet rectas *DE* & *FG* in *B* & *C*, poſterior ſecet eaſdem rectas in *H*, *I* & *K*, *L*. Habeant autem ſphæroides omnes axem communem, & erunt rectarum partes hinc inde interceptæ *DP* & *BE*, *FP* & *CG*, *DH* & *IE*, *FK* & *LG* ſibi mutuò æquales; (y) propterea quod rectæ *DE*, *PB* & *HI* biſecantur in eodem puncto, ut & rectæ *FG*, *PC* & *KL*. Concipe jam *DPF*, *EPG* deſignare conos oppoſitos, angulis verticalibus *DPF*, *EPG* infinitè parvis deſcriptos, & lineas etiam *DH*, *EI* infinitè parvas eſſe; & conorum particulæ ſphæroidum ſuperficiebus abſciſſæ *DHKF*, *GLIE*, ob æqualitatem linearum *DH*, *EI*, (z) erunt ad invicem ut quadrata diſtantiarum ſuarum à corpuſculo



(y) * *Propterea quod rectæ* DE, PB, *&c.* Cum enim tres ellipſes AGO, HLN, PCM ſimiles ſint, idemque centrum & axes communes ac proinde communes etiam diametros homologas habeant, patet lineas DE, HI, PB eſſe in tribus illis ellipſibus ad communem diametrum ordinatas, idemque dicendum eſſe de tribus lineis FG, KL, PC. Nam ſi per punctum A, in ellipſi AGO homologum puncto P in ellipſi PCM ducta intelligatur recta ipſi PB, ſeu DE parallela, hæc linea ordinata erit ad eandem ellipſeos AGO diametrum ad quam in ellipſi PCM ordinata eſt linea PB, atque adeò rectæ DE, PB ſunt ad eandem diametrum ordinatæ, idemque eodem modo de cæteris lineis oſtendi poteſt. Quare ab illâ communi diametro rectæ DE, PB, & HI, biſecantur in eodem puncto, ut & rectæ FG, PC, & KL a ſuâ communi diametro.

(z) * *Erunt ad invicem &c.* Si ex punctis D & E in lineam FG demiſſa intelligantur perpendicula infinite parva p, & P, hæc, ob angulos DPF, EPG, æqua-

De Motu Corporum.



culo *P*, & propterea corpuſculum illud æqualiter trahent. Et pari ratione, ſi ſuperficiebus ſphæroidum innumerarum ſimilium concentricarum & axem communem habentium dividantur ſpatia *DPF*, *EGCB* in particulas, hæ omnes utrinque æqualiter trahent corpus *P* in partes contrarias. Æquales igitur ſunt vires coni *DPF* & ſegmenti conici *EGCB*, & per contrarietatem ſe mutuo deſtruunt. Et par eſt ratio virium materiæ omnis extra ſphæroidem intimam *PCBM*. Trahitur igitur corpus *P* à ſola ſphæroide intimâ *PCBM*, & propterea (per corol. 3. prop. LXXII.) attractio ejus eſt ad vim, quâ corpus *A* trahitur à ſphæroide totâ *AGOD*, ut diſtantia *PS* ad diſtantiam *AS*. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XCII. PROBLEMA XLVI.

Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta ſingula tendentium.

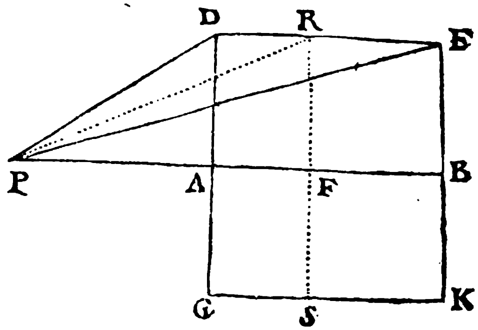
E corpore dato formanda eſt ſphæra vel cylindrus aliave figura regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (per prop. LXXX. LXXXI. & XCI.) [a] inveniri poteſt. Dein factis experimentis invenienda eſt vis attractionis in diverſis

æquales, erunt ut diſtantiæ DP, EP. Sed quoniam evaneſcentibus angulis DPF, EPG, lineæ DH, FK & GL, EI, fiunt parallelæ, erit ſuperficies DHKF, ad ſuperficiem GLIE, ut rectangulum $p \times \frac{DH+FK}{2}$, ad rectangulum $P \times \frac{GL+EI}{2}$, hoc eſt, (ob $DH+FK=LG+EI$) ut p ad P, ſeu ut DP ad EP. Quarè ſi DPF, EPG conos vel pyramides in ſphæroide AGO deſignent, ſolida DHKF, GLIE erunt ut ſuperficies prædictæ in perpendicula perpendiculis p, P, ſimilia ductæ, hoc eſt, ut quadrata diſtantiarum DP, EP. Quoniam igitur vis quâ particula ſolida DHFK trahit corpuſculum P eſt ad vim quâ illud trahitur à particulâ ſolidâ GLIE, ut ſolidum $\frac{DHKF}{DP^2}$, ad ſolidum $\frac{GLIE}{EP^2}$, hoc eſt, ut $\frac{DP^2}{DP^2}$, ad $\frac{EP^2}{EP^2}$, manifeſtum eſt corpuſculum P utrinque æqualiter attrahi.

(a) * *Inveniri poteſt.* Hoc eſt per propoſitiones citatas inveniri poteſt generalis expreſſio ſeu formula attractionis corpuſcu-

ſis diſtantiis, & lex attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium ſingularum, quam invenire oportuit.

PRO-



puſculi in ſphæram vel cylindrum aliamve figuram regularem, & lex attractionis corpuſculi in eandem figuram experimentis inventa conferri debet cum generali illâ formulâ, & indè habebitur æquatio cujus ope determinari poterit formulæ generalis exponens indeterminata, quæ exhibebit attractionem in ſingulas particulas materiæ.

Exemplum. In cylindrum ADEKG trahatur corpuſculum P, ſitum in ejus axe AB, ut in prop. XCI; ſupponaturque vis in ſingulas cylindri particulas tendens reciprocè ut diſtantiæ dignitas cujus index n, & dicatur PA $=a$, PD $=b$, PB $=c$, PE $=e$, RF $=g$, PF $=x$, PR $=y$, eritque $yy=xx+gg$, ideoque $ydy=xdx$. Quare fluxio vis quâ corpuſculum P in cylindrum ADRSG trahitur, erit (541) ut $\frac{dx}{x^{n-2}}-\frac{xdx}{y^{n-1}}=\frac{dx}{x^{n-2}}-\frac{ydy}{y^{n-1}}=x^{2-n}dx-y^{2-n}dy$; cujus fluens $=\frac{x^{3-n}-y^{3-n}+Q\ conſt.}{3-n}$; hæc autem evaneſcit, ubi $x=a$, & $y=b$; Quare erit $Q=b^{3-n}-a^{3-n}$, & fluens accurata $=\frac{b^{3-n}-a^{3-n}+c^{3-n}-e^{3-n}}{3-n}$, ubi $x=c$, & $y=e$. Jam verò vis quâ corpuſculum P in totum cylindrum ADEKG trahitur, experimentis inventa ſit ut $b-a+c-e$, & habebitur æquatio $b-a+c-e=\frac{b^{3-n}-a^{3-n}+c^{3-n}-e^{3-n}}{3-n}$, ex quâ determinandus eſt valor indicis generalis n. Porro poſito $n=2$, æqualia fiunt æquationis membra ergo vis in ſingulas cylindri particulas tendens erit reciprocè ut quadratum diſtantiæ à particulâ, quemadmodum in cor. I. prop. XCI. poſitum eſt. Verum ſi hâc ratione, varios tentando numeros, non poteſt indicis generalis n valor inveniri, ponatur $3-n=z$, & vis corpuſculi in cylindrum experimentis reperta ſit ut quantitas q; & erit $qz=b^z-a^z+c^z-e^z$. Fiat $a^z=p$, $b^z=v$, $c^z=r$,

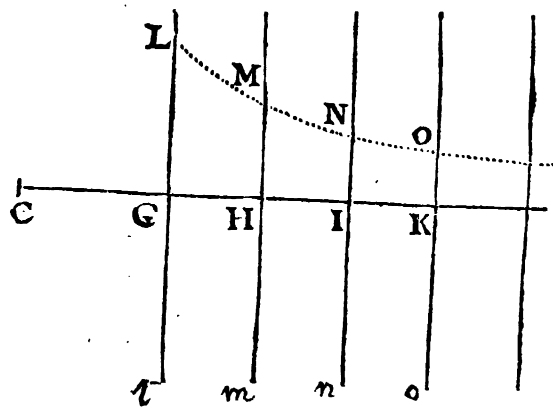
$e^z=s$, & erit (L ſignificante Logarithmum quantitatis cui præfigitur) $L.\,a^z=L.\,p$, $L.\,b^z=L.\,v$, $L.\,c^z=L.\,r$, $L.\,e^z=L.\,s$, adeoque $zL.\,a=L.\,p$, & $z=\frac{L.\,p}{L.\,a}=\frac{L.\,v}{L.\,b}=\frac{L.\,r}{L.\,c}=\frac{L.\,s}{L.\,e}$. Unde $\frac{L.\,a\times L.\,v}{L.\,b}=L.\,p$, atque adeo $L.\,v^{\frac{L.\,b}{L.\,a}}=L.\,p$, proindeque $v^{\frac{L.\,b}{L.\,a}}=p$, & ſimili modo invenietur $v^{\frac{L.\,c}{L.\,b}}=r$, & $v^{\frac{L.\,e}{L.\,b}}=s$. Quare æquatio erit $\frac{q.\,L.\,v}{L.\,b}=v-v^{\frac{L.\,a}{L.\,b}}+v^{\frac{L.\,c}{L.\,b}}-v^{\frac{L.\,e}{L.\,b}}$, quæ ab exponente indeterminata libera eſt. Ut autem tollatur etiam $L.\,v$, ponatur $v=t+1$, & (383) erit $L,\ v=L.\,t+1=t-\frac{1}{2}tt+\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{5}t^5-$ &c. in infinit. Si itaque in æquatione modo inventa loco v ſcribatur $t+1$, & loco $L.\,v$ ſeries $t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3-$ &c., obtinebitur æquatio ab exponentibus & logarithmis indeterminatis libera, ex quâ per reverſionem ſerierum invenietur valor quantitatis t, & inde repetietur $L.\,v$, atque per $L.\,v$ habebitur valor

lor

PROPOSITIO XCIII. THEOREMA XLVII.

Si ſolidum ex unâ parte planum ex reliquis autem partibus infinitum, conſtet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in receſſu à ſolido decreſcunt in ratione poteſtatis cujuſvis diſtantiarum pluſquam quadraticæ, & vi ſolidi totius corpuſculum ad utramvis plani partem conſtitutum trahatur: dico quod ſolidi vis illa attractiva, in receſſu ab ejus ſuperficie planâ, decreſcet in ratione poteſtatis, cujus latus eſt diſtantia corpuſculi à plano, & index ternario minor quam index poteſtatis diſtantiarum.

Caſ. 1. Sit *LGl* planum quo ſolidum terminatur. Jaceat ſolidum autem ex parte plani hujus verſus *I*, inque plana innumera *mHM*, *nIN*, *oKO*, &c. ipſi *GL* parallela reſolvatur. Et primo collocetur corpus attractum *C* extra ſolidum. Agatur autem *CGHI* planis illis innumeris perpendicularis, & decreſcant vires attractivæ punctorum ſolidi in ratione poteſtatis diſtantiarum, cujus index ſit numerus *n* ternario non minor. Ergo (per



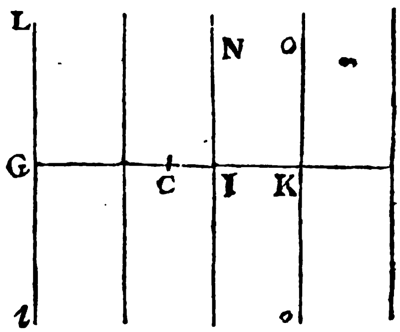
lor indicis *z*, & inde valor ipſius *n*. Nam cum ſit $z = \frac{L.v}{L.a}$, & $L.v = L.t + 1$, erit $z = \frac{L.t+1}{L.a}$, & $n = 3 - z = 3 - \frac{L.t+1}{L.a}$.

Si in æquatione vel quantitate exponentiali propoſita, indeterminata *z* in ſolis quantitatum datarum exponentibus reperiretur, hæc æquatio vel quantitas ſuperiori methodo poſſet ad aliam reduci numero terminorum finitam, in quâ nulla eſſet amplius exponens vel logarithmus indeterminata. Nam ſi $q = fa^z + gb^{2z} + hc^{4z}$ + &c., ſitque $v = a^z$ erit $q = fv +$

2 L.

(per corol 3. prop. xc.) vis, quâ planum quodvis mHM trahit punctum C, (b) eſt reciprocè ut CH^{n-2}. In plano mHM capiatur longitudo HM ipſi CH^{n-2} reciproce proportionalis, & erit vis illa ut HM. Similiter in planis ſingulis lGL, nIN, oKO, &c. capiantur longitudines GL, IN, KO, &c. ipſis CG^{n-2}, CI^{n-2}, CK^{n-2}, &c. reciprocè proportionales; & vires planorum eorundem erunt ut longitudines captæ, ideoque ſumma virium ut ſumma longitudinum, hoc eſt, vis ſolidi totius ut area $GLOK$ in infinitum verſus OK producta. Sed area illa (per notas quadraturarum methodos) eſt reciprocè ut CG^{n-3}, & propterea vis ſolidi totius eſt reciprocè ut CG^{n-3}. *Q. E. D.*

LIBER PRIMUS. PROP. XCIII. THEOR. XLVII.

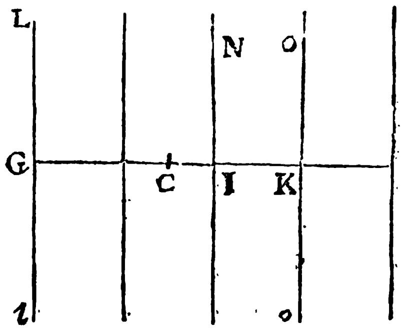


Caſ. 2. Collocetur jam corpuſculum C ex parte plani lGL intra ſolidum, & capiatur diſtantia CK æqualis diſtantiæ CG. Et ſolidi pars $LGloKO$, planis parallelis lGL, oKO terminata, corpuſculum C in medio ſitum nullam in partem trahet, contrariis oppoſitorum punctorum actionibus ſe mutuò per æqualitatem tollentibus. Proinde corpuſculum C ſolâ vi ſolidi ultra planum

$g v^{\frac{2L.b}{L.a}} + h v^{\frac{4L.c}{L.a}} +$ &c. erit enim $z = \frac{L.v}{L.a}$ & $b^{2z} = b^{2\frac{L.v}{L.a}}$ & $L b^{2z} = \frac{2L.v}{L.a} L.b = \frac{2L.b}{L.a} L.v$, unde eſt $b^{2z} = v^{\frac{2L.b}{L.a}}$ & ſic de cæteris.

(b) * *Eſt reciprocè &c.* Sit CH $= x$, erit MH ut $\frac{1}{x^{n-2}}$, (Hyp.) & areæ GLMH, elementum ut $\frac{dx}{x^{n-2}}$, adóque (165) area ipſa ut Q *conſt.* $- \frac{1}{(n-3)x^{n-3}}$, quæ evaneſcit ubi $x =$ CG, Quare $Q = \frac{1}{(n-3)CG^{n-3}}$, & area GLMH, ut $\frac{1}{(n-3)CG^{n-3}} - \frac{1}{(n-3)CH^{n-3}}$. At cum CH infinita evadit, terminus $\frac{1}{(n-3)CH^{n-3}}$ evaneſcit fitque area infinita GLOK, ut $\frac{1}{(n-3)CG^{n-3}}$, ſeu ob datam $n-3$, ut CG^{n-3}, reciprocè.

num OK ſiti trahitur. Hæc autem vis (per caſum primum) eſt reciprocè ut CK^{n-3}, hoc eſt (ob æquales CG, CK) reciprocè ut CG^{n-3}. *Q. E. D.*



Corol. 1. Hinc ſi ſolidum $LGIN$ planis duobus infinitis parallelis LG, IN utrinque terminetur; (c) innoteſcit ejus vis attractiva, ſubducendo de vi attractivâ ſolidi totius infiniti $LGKO$ vim attractivam partis ulterioris $NIKO$, in infinitum verſus KO productæ.

Corol. 2. Si ſolidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius pene eſt momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris augendo diſtantiam (d) decreſcet quam proximè in ratione poteſtatis CG^{n-3}.

Corol. 3. Et hinc ſi corpus quodvis finitum & ex unâ parte planum trahat corpuſculum è regione medii illius plani, & diſtantia inter corpuſculum & planum collata cum dimenſionibus corporis attrahentis perexigua ſit, conſtet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis cujuſvis pluſquam quadruplicatæ diſtantiarum; vis attractiva corporis totius decreſcet quamproximè in ra-

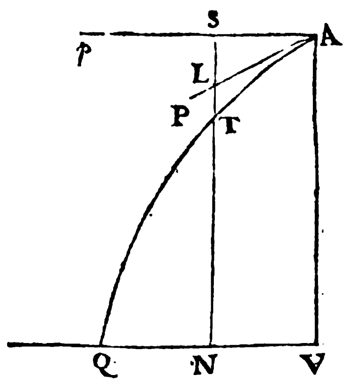
(c) * *Innoteſcit ejus vis &c.* Ex demonſtratis attractio ſolidi totius LGKO, in infinitum verſus O producti, eſt ut $\frac{1}{CG^{n-3}}$ ſolidi verò infiniti NICO, ut $\frac{1}{CI^{n-3}}$. Quarè attractio ſolidi LGIN, eſt ut $\frac{1}{CG^{n-3}} - \frac{1}{CI^{n-3}}$.

(d) * *Decreſcet quam proximè &c.* Vis enim attractiva, ſi corpus infinitum ſit, eſt ut $\frac{1}{CG^{n-3}} - \frac{1}{CI^{n-3}}$; ſed ſi perexigua ſit diſtantia CG reſpectu CI, terminus $\frac{1}{CI^{n-3}}$, minimus erit reſpectu termini $\frac{1}{CG^{n-3}}$ & negligi poterit, ideóque attractio erit quam proximè ut CG^{n-3} reciproce. Quod tamen verum eſſe non poteſt, ſi fuerit $n=3$; Nam in hoc caſu $\frac{1}{CH^{n-2}} = \frac{1}{CH}$, ideoque MH erit ut $\frac{1}{CH}$ & rectangulum $MH \times CH$ datum, proindeque curva LMO hyperbola, cujus aſymptotus CK, & area illius finita LMNIG vim exponit ſolidi LGIN; area verò infinita NOKI, vim ſolidi infiniti NIKO.

ratione poteſtatis, cujus latus ſit diſtantia illa perexigua, & index ternario minor quam index poteſtatis prioris. De corpore ex particulis conſtante, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis triplicatæ diſtantiarum, aſſertio non valet; propterea quod, in hoc caſu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in corollario ſecundo, ſemper eſt infinitè major quam attractio partis citerioris.

Scholium.

Si corpus aliquod perpendiculariter verſus planum datum trahatur, & ex datâ lege attractionis quæratur motus corporis: ſolvetur problema quærendo (per prop. XXXIX.) motum corporis rectâ deſcendentis ad hoc planum, & (per legum corol. 2.) componendo motum iſtum cum uniformi motu, (a) ſecundum lineas eidem plano parallelas facto. Et contra, ſi quæratur lex attractionis in planum ſecundum lineas perpendiculares factæ, eâ conditione ut corpus attractum in datâ quâcunque curvâ lineâ mo-

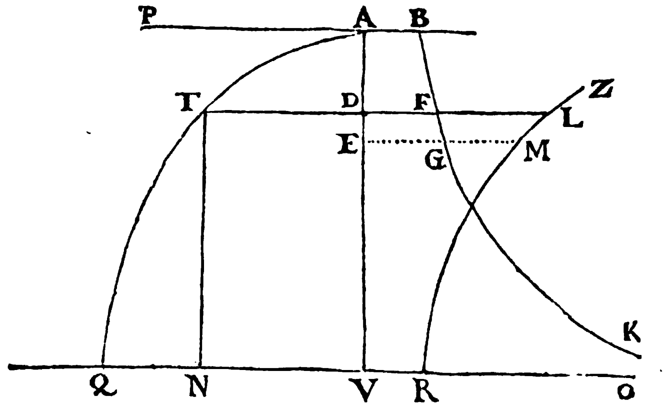


(a) 546. *Secundum lineas eidem plano parallelas &c.* Corpus A quod ad planum VQ perpendiculariter & ſecundum lineas lineæ AV parallelas trahitur, exeat de loco A juxtà directionem quamlibet AP. 1°. Si projectionis directio AP plano VQ parallela fuerit, dabitur tempus quo corpus, datâ velocitate uniformi projectionis, percurreret lineam AS, & per prop. 39. invenietur in lineâ SN lineæ AV parallelâ ſpatium ST quod corpus vi attractrice eodem tempore deſcribit, & hinc habebitur punctum T in trajectoriâ ATQ, quam corpus utroque motu, impreſſo nimirum & ex vi attractrice genito deſcribit. 2°. Si directio projectionis AP plano trahenti VQ parallela non eſt, ductâ AS plano VQ & SL rectæ AV parallelis, motus projectionis AL reſolvatur in motus AS & SL, & datis velocitatibus uniformibus AS & SL, dabuntur tum tempus quo percurritur AS, tum ſpatium ST quod corpus hoc eodem tempore deſcribit ex vi attractrice & motu impreſſo SL ſimul (per cor. 3. prop. 39.) unde habebitur punctum T trajectoriæ ATQ cujus omnia puncta eodem modo poſſunt inveniri.

De Motu Corporum.

moveatur, (b) ſolvetur problema operando ad exemplum problematis tertii.

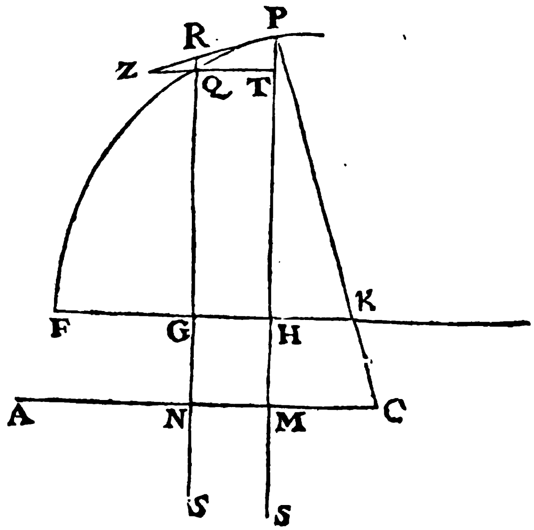
Ope-



Exemplum. Exeat corpus de loco A ſecundum directionem AP plano trahenti VQ parallelam, & ductâ DT eidem plano parallelâ, ſit vis trahens in totâ lineâ DT, ut DV cubus reciprocè. De loco D, erigatur ſemper DF perpendicularis ad AV & vi trahenti in lineâ DT proportionalis, ſitque BFG linea curva quam punctum G perpetuò tangit. In DF capiatur DL lateri quadrato areæ ABFD reciprocè proportionalis, & punctum L ſit ſemper in lineâ curvâ ZLR, prorſùs ut in prop. 39. Jam dicatur $AV=a$, $DV=x$, $TD=y$, erit area ABFD ut $\frac{aa-xx}{xx}$ (430) & proindè DL, ut $\frac{x}{\sqrt{aa-xx}}$ adeóque elementum DLME, ut $\frac{x\,dx}{\sqrt{aa-xx}}$, & area VDLR, ut hujus elementi fluens $Q-\sqrt{aa-xx}$ (165 166), evaneſcit autem area VDLR ubi $x=o$. Quarè $Q=a$, & area VDLR, ut $a-\sqrt{aa-xx}$. Hinc poſitâ $x=a$, erit area VABZR, ut a, & area DABZL, ut $\sqrt{aa-xx}$. Porrò ſi punctum T eſt in trajectoriâ ATQ erit DT ſeu y proportionalis tempori quo uniformiter deſcribitur DT, & quo motu accelerato percurritur AD ſeu (per prop. 39.) erit y, ut $\sqrt{aa-xx}$, adeóque yy ut $aa-xx$. Undè patet trajectoriam ATQ eſſe ellipſim cujus centrum V, ſemiaxis unus VA, alter conjugatus VQ. Iiſdem poſitis & vi ad planum VQ trahente in vim repellentem mutatâ corpus deſcribet hyperbolam cujus centrum V ſemiaxis VA vertex A.

(b) 547. *Solvetur problema &c.* Moveatur corpus P in curvâ PQF vi perpendiculariter tendente ad planum FK, ſint P & Q puncta infinitè propinqua, PZ tangens in P, PC radius circuli curvam PQF oſculantis in P; PH, QG perpendicula ex punctis P, Q in planum FK demiſſa. CA recta lineæ FK parallela & ſecans perpendicula PH, QG producta in M & N; producatur GQ, ut tangenti PZ occurrat in R, & per Q agatur recta ZQT plano FK parallela, ac tangenti occurrens in Z rectæ verò PH in T. Jam ob ſimilia triangula CPM, PZT & RZQ, eſt $CP^2 : PM^2 = PR^2 : QT^2$, & ex naturâ circuli oſculatoris $PR^2 = QR \times \overline{RN+QN}$ (per prop. 36. lib. 3. Elem.) ſive coeuntibus punctis P & Q, $PR^2 = QR \times 2PM$. Er-

Operationes autem contrahi ſolent reſolvendo ordinatim applicatas in ſeries convergentes. Ut ſi ad baſem A in angulo quovis dato ordinatim applicetur longitudo B, quæ ſit ut baſis dignitas quælibet $A^{\frac{m}{n}}$; & quæratur vis quâ corpus, ſecundum poſitionem ordinatim applicatæ, vel in baſem attractum vel à baſi fugatum, moveri poſſit in curvâ lineâ, quam ordinatim applicata termino ſuo ſuperiore ſemper attingit: Suppono baſem augeri parte quam minima O, & ordinatim applicatam A +



Ergò CP^2, $PM^2 = QR \times 2PM : QT^2$, ideóque $\frac{QT^2}{QR} = \frac{2PM^3}{CP^2}$, conſideretur vis centripeta ut tendens ad centrum S infinitè diſtans, & erit SP quantitas conſtans, ac $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR} = \frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$. Eſt igitur (per cor. 1. & 5. prop. 6.) vis centripeta reciprocè ut $\frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$, hoc eſt, ob conſtantem quantitatem $2SP^2$, reciprocè ut $\frac{PM^3}{CP^2}$, ſeu in ratione compoſitâ ex duplicatâ ratione radii oſculatoris CP directè & triplicatâ perpendiculi PM inversè. Porrò datâ curvâ PQF invenietur in ſingulis locis radius oſculi CP (214) & punctum K ubi plano occurrit ac proindè invenietur PM, per proportionem : $PK : PH = PC : PM$, vel etiam per proportionem PR vel $PQ : QT = PC : PM$. Quare dabitur lex vis centripetæ.

DE MOTU CORPORUM.

$\overline{A+O}|^{\frac{m}{n}}$ reſolvo (†) in ſeriem infinitam $A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} O A^{\frac{m-n}{n}} + \frac{mm - mm}{2nn} OOA^{\frac{m-2n}{n}}$ &c. atque hujus termino in quo O

(†) 548. *Reſolvo in ſeriem infinitam &c.* Ut hæc liqueant ſequentia de dignitatum formulis ſunt memoriæ revocanda.

Lemma. Binomii $a+b$, dignitas $\overline{a+b}^n$ cujus index n, eſt $a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b^1 + \frac{n \times n-1}{1 \times 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3} b^3 + \frac{n \times n-1 \times n-2 \times n-3\, a^{n-4} b^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ + &c. Satis patet ex potentiarum formatione. Si enim binomium $a+b$, ad 2^am^. 3^am^. 4^am^. &c. dignitates evehatur, in ſingulis dignitatis cujuſque terminis, index litteræ a unitate perpetuò decreſcit, dum contrà index litteræ b unitate creſcit, & coefficientes ſeu unciæ ſingulorum terminorum progrediuntur ut numeri $\frac{n}{1}$, $\frac{n \times n-1}{1 \times 2}$, $\frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3}$, $\frac{n \times n-1 \times n-2 \times n-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ &c.

549. Cor. 1. Si ponatur $a = P$, & $Q = \frac{b}{a}$, adeóque $a^n = P^n$, $\frac{b^2}{a^2} = Q^2$, $\frac{b^3}{a^3} = Q^3$, $\frac{b^4}{a^4} = Q^4$, his valoribus in lemmatis formulâ ſubſtitutis erit $\overline{a+b}^n = P^n + \frac{n}{1} P^n Q + \frac{n \times n-1}{1 \times 2} P^n Q^2 + \frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3} P^n Q^3$ + &c. & ſi rursùs ponatur $P^n = A$; $\frac{n}{1} P^n Q = B$; $\frac{n \times n-1}{1 \times 2} P^n Q^2 = C$; $\frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3} P^n Q^3 = D$, & ità porrò, erit $\overline{a+b}^n = \overline{P+PQ}^n = P^n + \frac{n}{1} AQ + \frac{n-1}{2} BQ + \frac{n-2}{3} CQ + \frac{n-3}{4} DQ +$ &c.

550. Cor. 2. Iiſdem formulis uti poſſumus pro polynomio quovis ad datam dignitatem evehendo, ſi pars una polynomii litteræ a binomii ponatur æqualis, cæteræ verò partes omnes ſupponantur æquales litteræ b. Exempli causâ. Sit trinomium $d+e+f$ ad tertiam dignitatem elevandum, pone $n=3$, $d=a$, $e+f=b$, & formula $a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b^1 + \frac{n \times n-1}{1 \times 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3} b^3$, mutabitur in ſeriem $d^3 + 3d^2(e+f) + 3d(e+f)^2 + (e+f)^3$; cum enim perventum eſt ad coefficientem in quâ eſt $n-3$, abrumpitur ſeries ob $n-3=0$. Porrò per eandem formulam generalem $(e+f)^2 = ee + 2ef + ff$, & $(e+f)^3 = e^3 + 3e^2 f + 3ef^2 + f^3$. Quarè tandem $(d+e+f)^3 = d^3 + 3d^2 e + 3d^2 f + 3de^2 + bdef + 3dff + e^3 + 3e^2 f + 3ef^2 + f^3$.

Ita etiam formulam pro dignitate infinitinomii poſſumus obtinere, ſit enim ſeries $A + BZ + CZ^2 + DZ^3 + EZ^4$ &c. ad dignitatem p evehenda ſub ducto calculo invenietur.

$$A^p + pA^{p-1}BZ + pA^{p-1}CZ^2 + pA^{p-1}DZ^3 + p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2}B^2Z^2 + p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2} \times 2BC \ldots + p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} A^{p-3} \ldots$$

551. Cor. 3. Si ex binomio $a+b$, extrahenda ſit radix cujus index $\frac{m}{p}$, loco n, in formulâ generali ſcribatur $\frac{m}{p}$, & erit $\overline{a+b}^{\frac{m}{p}} = a^{\frac{m}{p}} + \frac{m}{p} a^{\frac{m-p}{p}} b^1 + \frac{m \times m-p}{1 \times 2 \times p^2} a^{\frac{m-2p}{p}} b^2 + \frac{m \times m-p \times m-2p}{1 \times 2 \times 3 p^3} a^{\frac{m-3p}{p}} b^3 + \frac{m \times m-p \times m-2p \times m-3p}{1 \times 2 \times 3 \times 4 p^4} a^{\frac{m-4p}{p}} b^4$ + &c. vel etiam erit $\overline{a+b}^{\frac{m}{p}}$ = P

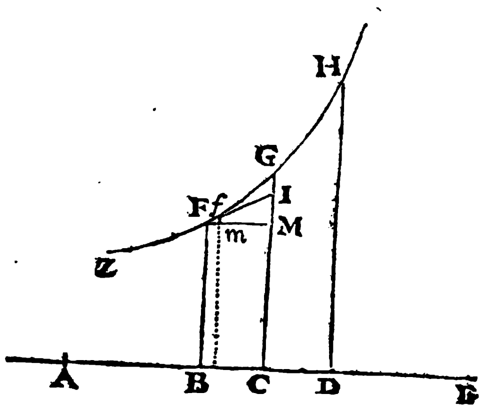
O duarum eſt dimenſionum, id eſt, termino $\frac{mm-mm}{2nn}OOA^{\frac{m-2n}{n}}$

$= \overline{P+PQ}^{\frac{m}{p}} = P^{\frac{m}{p}} + \frac{m}{p}AQ + \frac{m-p}{2p}BQ + \frac{m-2p}{3p}CQ + \frac{m-3p}{4p}DQ$ + &c.

Nam ſit Radix quæſita $\overline{a+b}^{\frac{m}{p}}$ æqualis feriei infinitæ $A+BZ+CZ^2+DZ^3$ &c. erit $\overline{a+b}^m$ æqualis huic ſeriei ad dignitatem p evectæ, ſumatur ergo ſeries potentiæ $\overline{a+b}^m$ quæ erit $a^m + ma^{m-1}b + m \times \frac{m-1}{2}a^{m-2}b^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3}a^{m-3}b^3$ & conferantur cum terminis dignitatis infinitinomii $A+BZ+CZ^2+DZ^3$ &c. ad dignitatem p evecti, (n°. 550) invenieturque $A^p = a^m$; $pA^{p-1}BZ = ma^{m-1}b$; $pA^{p-1}CZ^2 + p \times \frac{p-1}{2}A^{p-2}B^2Z^2 = m \times \frac{m-1}{2}a^{m-2}b^2$; $pA^{p-1}DZ^3 + p \times \frac{p-1}{2}A^{p-2} \times 2BCZ^3 + p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3}A^{p-3}B^3Z^3 = m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3}a^{m-3}b^3$ &c.

Unde invenietur $A = a^{\frac{m}{p}}$, $BZ = \frac{m}{p} \times \frac{a^{m-1}}{a^{m-\frac{m}{p}}}b = \frac{m}{p}a^{\frac{m-p}{p}}b$; $CZ^2 = \frac{m \times m-p}{1 \times 2 \times p^2}a^{\frac{m-2p}{p}}b^2$ &c.

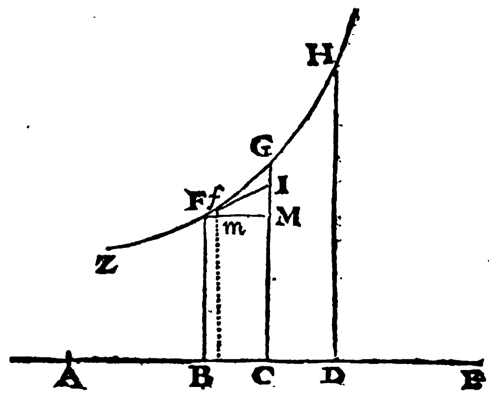
552. Lemma. Si in rectâ AE poſitione datâ, ad quam curva ZFH refertur, capiatur abſciſſa quævis AB, ſitque ordinata correſpondens FB æqualis dignitati abſciſſæ AB^q, in datam quantitatem 1 ductæ, & deinde capiantur intervalla æqualia BC, CD, & agantur ordinatæ CG, DH, ac per punctum F ducatur tangens FI ordinatæ CG occurrens in I, & recta FM parallela lineæ AE, eidem ordinatæ occurrens in M, ac tandem ordinata CG, ſeu $\overline{AB+BC}^q$, elevetur ad dignitatem cujus eſt index q atque ità in ſeriem infinitam convergentem reſolvatur, hujus ſeriei primus terminus erit ſemper



æqualis ordinatæ FB, inſiſtenti ad initium quantitatis conſtantis BC; ſecundus terminus æqualis erit differentiæ inter FB & CI, id eſt, lineæ MI, & tertius terminus unà cum ſequentibus in infinitum æquabitur lineæ GI quæ jacet inter tangentem & curvam.... Dem. ſit $AB = x$, $FB = y$, data $BC = O$, ducta intelligatur ordinata fb, alteri FB infinitè propinqua quæ lineam FM ſecet in m, & punctis F, f, coeuntibus erit $Fm = dx$, $fm = dy$, ac triangula Fmf, FMI ſimilia, ideoquè $dx : dy = O : MI$, ſed quoniam $y = x^q$ (ex hyp.) & proindè $dy = qx^{q-1}dx$, eſt $dx : dy = 1 : qx^{q-1}$; ergò $MI = qx^{q-1} \times O$ & $CI = FB + MI = x^q + qx^{q-1} \times O$. Præterea (ex hyp.) eſt $GC = \overline{x+O}^q = x^q + qx^{q-1}O + \frac{q \times q-1}{1 \times 2}x^{q-2}O^2 + \frac{q \times q-1 \times q-2}{1 \times 2 \times 3}x^{q-3}O^3$ + &c. in infinitum (548). Quarè erit $GI = GC - CI = \frac{q \times q-1}{1 \times 2}x^{q-2}O^2 + \frac{q \times q-1 \times q-2}{1 \times 2 \times 3}$

DE MOTU CORPORUM.

$x^{q-3}O^3 +$ &c. in infinitum. Ergò ſeriei in quam reſolvitur $\overline{x+O}^q$, terminus primus x^q, æqualis eſt ordinatæ F B, ſecundus terminus $qx^{q-1}O$, æqualis differentiæ inter F B & C I, & tertius terminus unà cum ſequentibus in infinitum æqualis lineæ GI. Eadem eſt demonſtratio, ſi curva Z F H concavitatem lineæ AE obvertat. Q. E. D.



553. Cor. 1. Si quantitas O, ſeu BC, in infinitum minuatur ut fiat $= dx$, termini omnes in ſeriæ ſubſequentes ſunt infinitè minores quovis termino antecedente, quod quantitatis O index in ſingulis terminis unitate creſcat, ideóque termini illi ſubſequentes negligi poſſunt, & proindè in hac hypotheſi $MI = dy = MG$, $GI = \frac{q \times q-1}{1 \times 2} x^{q-2} O^2 = \frac{q \times q-1}{1 \times 2} x^{q-2} dx^2 = \frac{1}{2} ddy$. Nam cum ſit $dy = qx^{q-1} dx$ & dx, conſtans, erit ſumptis fluxionibus, $ddy = q \times q-1\, x^{q-2} dx^2$.

554. Cor. 2. In eâdem Hypotheſi erit $dddy$ ut quartus ſeriei terminus, $ddddy$, ut quintus, & ità porro in infinitum. Nam quia eſt $ddy = q \times q-1\, x^{q-2} dx^2$, erit $dddy = q \times q-1 \times q-2\, x^{q-3} dx^3$; & $ddddy = q \times q-1 \times q-2 \times q-3\, x^{q-4} dx^4$, & ità deinceps. Quartus autem ſeriei terminus poſitâ $O = dx$, eſt $\frac{q \times q-1 \times q-2}{1 \times 2 \times 3} x^{q-3} dx^3$. Quintus $\frac{q \times q-1 \times q-2 \times q-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} x^{q-} dx^4$; Ergò ob datos numeros $1 \times 2 \times 3$ & $1 \times 2 \times 3 \times 4$. &c. patet corollarium.

555. Cor. 3. Eadem omnia vera ſunt, ſi fuerit ordinata BF ſeu y æqualis ſeriei cuivis potentiarum quarumlibet abſciſſæ A B in datas quantitates ductarum, hoc eſt $y = ex^h \mp fx^m \mp gx^p +$ &c. Eadem enim demonſtratio. Obſervandum tamen eſt in hoc caſu primum ſeriei terminum dici in quo quantitas O, ſeu BC, non extat, ſecundum terminum in quo quantitas illa eſt unius dimenſionis, tertium in quo extat duarum dimenſionum & ſic in infinitum, licet in ſingulis terminis ità definitis plures contineantur quantitates ſignis + vel − conjunctæ. Exempli causâ. Poſitâ $y = ex^n + fx^m = BF$, erit $GC = e(x+O)^n + f(x+O)^m = ex^n + fx^m + \frac{m}{1} ex^{n-1}O + \frac{n}{1} ex^{m-1}O +$ &c. in infinitum. Primus ſeriei terminus eſt $ex^n + fx^m$, ſecundus $\frac{n}{1} ex^{n-1} \times O + \frac{m}{1} ex^{m-1} \times O$ & ità de cæteris.

556. Cor. 4. Hinc ſequitur eadem omnia valere, ſi fuerit ordinata BF ſeu y æqualis cuilibet functioni ipſius abſciſſæ A B, ſeu x, hoc eſt $y = Q$, & Q quantitas ex abſciſſâ x, ipſiuſque potentiis ac aliis quantitatibus datis quomodolibet compoſitâ. Nam quantitas illa Q poterit ſemper vel (per Lemma 548.) ejuſque corollaria vel per diviſionem in ſeriem aliquam reſolvi, cujus ſinguli termini erunt vel ipſius abſciſſæ x potentiæ in quantitates datas ductæ, vel quantitates omnino datæ, omnis verò quantitas data $c = cx^0$. Quarè æquatio $y = Q$, ſemper reduci poterit in formam æquationis cor. 3. (555.) $y = ex^n \mp fx^m \mp gx^p \mp$ &c. Exempli causâ: Sit $y = g + \frac{ee}{b+x} + (ff+xx)^{\frac{1}{2}}$. Peractâ diviſione in infinitum, erit $\frac{ee}{b+x} = \frac{ee}{b} - \frac{eex}{b^2} + \frac{eex^2}{b^3} - \frac{eex^3}{b^4} + \frac{eex^4}{b^5}$ &c. in infinitum; & $\overline{ff+xx}^{\frac{1}{2}} = f + \frac{x^2}{2f} - \frac{x^4}{8f^3} + \frac{x^6}{16f^5}$ &c. in infinitum. Nam in hoc caſu erit in formulâ $P^{\frac{m}{p}} + \frac{m}{p} AQ + \frac{m-p}{2p} BQ$ &c. (551.)

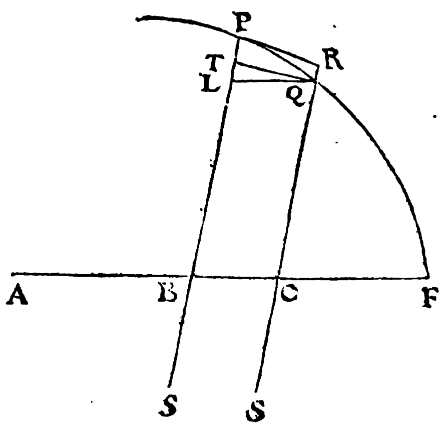
m

vim proportionalem eſſe ſuppono. (c) Eſt igitur vis quæſita ut $\frac{mm-nn}{nn}A^{\frac{m-2n}{n}}$, vel quod perinde eſt, ut $\frac{mm-nn}{nn}B^{\frac{m-2n}{m}}$. Ut ſi ordinatim applicata parabolam attingat, exiſtente $m=2$, & $n=1$: fiet vis ut data $2B^{0}$, ideoque dabitur. Datâ igitur vi corpus movebitur in parabolâ, quemadmodum

LIBER PRIMUS. PROP. XCIII. THEOR. XLVII.

$m=1$, $p=2$, $P=ff$, $Q=\frac{x^2}{ff}$, $A=P^{\frac{m}{p}}=ff^{\frac{1}{2}}=f$, $B=\frac{m}{p}\times AQ=\frac{x^2}{2f}$, & ſic deinceps, ergò erit $y=g+\frac{ee}{b}+f-\frac{eex}{b}+\left(\frac{ee}{b^3}+\frac{1}{2}f\right)x^2-\frac{eex^3}{b^4}+\left(\frac{ee}{b^5}-\frac{1}{8f^3}\right)x^4$, &c. in infinitum.

(c) 557. * *Eſt igitur vis quæſita &c.* Moveatur corpus in curvâ PQF, vi tendente ad planum ſeu baſim AF, ſecundum lineas PB, QC cum baſi AF angulum datum conſtituentes. Producatur ordinata CQ ut tangenti per P ductæ occurrat in R, & ex puncto curvæ Q ad ordinatam PB agantur QL parallela AF, & QT ad PB perpendicularis. Jam ſi vis centripeta fingatur ad punctum S infinitè diſtans tendere, coeuntibus punctis P & Q vis illa in puncto P erit (per cor. 1. prop. 6.) directè ut $\frac{QR}{SP^2\times QT}$, hoc eſt, ob conſtantem SP, ut $\frac{QR}{QT}$. Porrò ob angulum QLT datum, & angulum QTL rectum, datur ſpecie triangulum LQT, & ideò datâ QL, datur etiam QT, ergò datâ BC ſeu QL, vis erit ut QR. Sed ſi abſciſſa AB dicatur $=A$, ordinata $BP=B$, & $BC=O$; cum ſit (ex Hyp.) B, ut $A^{\frac{m}{n}}$, erit ordinata CQ, ut $\overline{A+O}^{\frac{m}{n}}$ & (553), QR, ut tertius terminus ſeriei in quam reſolvitur $\overline{A+O}^{\frac{m}{n}}$, hoc eſt, (550) ut $\frac{m\times m-n}{1\times 2\times n^2}A^{\frac{m-2n}{n}}\times OO=\frac{mm-mn}{2n^2}A^{\frac{m-2n}{n}}\times OO$, ſeu ut $\frac{mm-mn}{n^2}\times A^{\frac{m-2n}{n}}$, ob datam quantitatem



$\frac{OO}{2}$. Eſt igitur vis quæſita ut $\frac{mm-mn}{1\times 2\times n^2}\times A^{\frac{m-2n}{n}}$ vel ut $\frac{mm-mn}{nn}B^{\frac{m-2n}{m}}$; quia cum ſit B, ut $A^{\frac{m}{n}}$, erit $B^{\frac{n}{m}}$ ut A, &

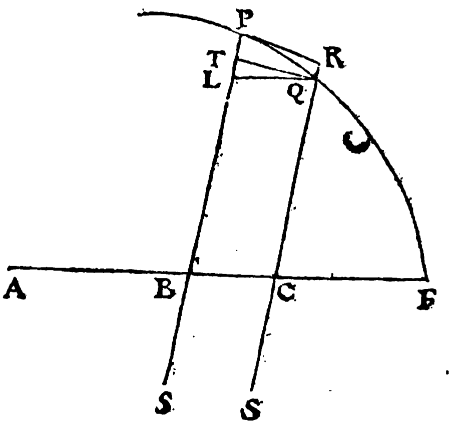
X x x 2

modum *Galilæus* demonſtravit. Quod ſi ordinatim applicata hyperbolam attingat, exiſtente $m=0-1$, & $n=1$; fiet vis ut $2A^{-3}$ ſeu $2B^{3}$: ideoque vi, quæ ſit ut cubus ordinatim applicatæ, corpus movebitur in hyperbolâ. Sed miſſis hujuſmodi propoſitionibus, pergo ad alias quaſdam de motu, quas nondum attigi.

SEC

$B^{\frac{n}{m}\times\frac{m-2n}{n}}$, ſeu $B^{\frac{m-2n}{m}}$, ut $A^{\frac{m-2n}{n}}$. Itaque ſi ponatur $m=2$, $n=1$, erit B, ut A^{2}, & curva PF parabola, & $\frac{mm-mn}{nn}B^{\frac{m-2n}{m}}=2B^{0}$, adeóque vis ut data $2B^{0}=2$. Quod ſi ponatur $m=-1$, & $n=1$, erit B, ut $\frac{1}{A}$ hoc eſt $B\times A$ rectangulum datum, & proindè curva PF hyperbola cujus aſymptotus AF, & centrum A; & $\frac{mm-mn}{nn}A^{\frac{m-2n}{n}}=2A^{-3}=\frac{2}{A^{3}}=2B^{3}$, & ideò vis ut cubus ordinatæ B. Sed quoniam hyperbola convexitatem obvertit aſymptoto AF, vi illâ corpus à baſi AF repelletur.

Si curva PQF, eſt ellipſis cujus centrum A, ſemidiameter $AF=C$, erit PB^{2} ſeu B^{2}, ut rectangulum $\overline{AF+AB}\times BF=\overline{C+A}\times\overline{C-A}=CC-AA$, & ponendo $BC=O$, erit QC^{2}, ut $CC-AA-2AO-OO$, fiat $CC-AA=DD$, erit QC^{2}, ut $DD-2AO-OO$, & radice per formulam generalem extractâ (550 551) erit QC, ut $D-\frac{AO}{D}-\frac{OO}{2D}-\frac{AAOO}{2D^{3}}-\frac{AO^{3}}{2D^{3}}-\frac{A^{3}O^{3}}{2D^{5}}$, &c. tertius ſeriei terminus eſt $\frac{OO}{2D}+\frac{AAOO}{2D^{3}}=\frac{\overline{DD+AA}\times OO}{2D^{3}}=\frac{CCOO}{2D^{3}}$, erit igi-



tur QR (552. 556) ſeu vis ut $\frac{CC}{2D^{3}}$, hoc eſt, ob datam quantitatem $\frac{CC}{2}$, ut $\frac{1}{D^{3}}$, ac proindè quoniam BB eſt ut $CC-AA$ ſeu DD, vis erit ut $\frac{1}{B^{3}}$, hoc eſt, ut cubus ordinatim applicatæ reciprocè, quod convenit cum ſolutione Problematis III. Eodem modo demonſtratur vim à plano AF repellentem decreſcere in ratione triplicatâ ordinatim applicatæ PB ſi corpus moveatur in hyperbolâ, cujus diameter una ſit in plano AF, altera conjugata in lineâ parallelâ ordinatis PB, QC, & convexitas plano AF obverſa.

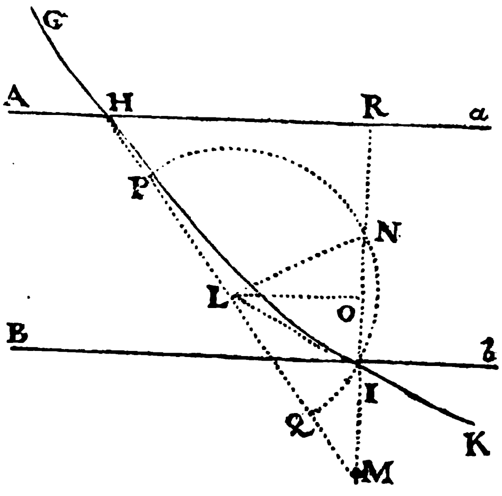
SECTIO XIV.

De motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad ſingulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.

PROPOSITIO XCIV. THEOREMA XLVIII.

Si media duo ſimilaria, ſpatio planis parallelis utrinque terminato, diſtinguantur ab invicem, & corpus in tranſitu per hoc ſpatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter verſus medium alterutrum, neque ullâ aliâ vi agitetur vel impediatur; ſit autem attractio, in æqualibus ab utroque plano diſtantiis ad eandem ipſius partem captis, ubique eadem: dico quod ſinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad ſinum emergentiæ ex plano altero in ratione datâ.

Caſ. 1. Sunto Aa, Bb plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius Aa (d) ſecundum lineam GH, ac toto ſuo per ſpatium intermedium tranſitu attrahatur vel impellatur verſus medium incidentiæ, eâque actione deſcribat lineam curvam HI, & emergat (e) ſecundum lineam IK. Ad planum emergentiæ Bb erigatur perpendiculum IM, occurrens tum lineæ incidentiæ GH productæ in M, tum plano incidentiæ Aa in R; & linea emergentiæ KI producta occurrat HM in

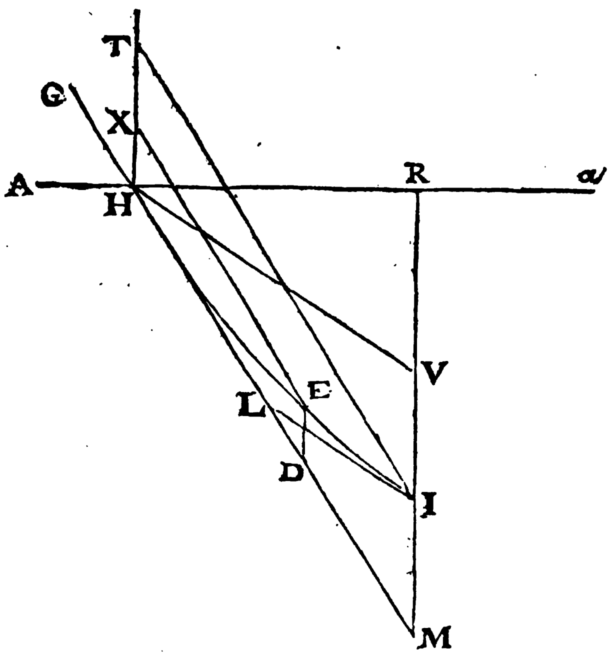


L.

(d) 558. * *Secundum lineam* G H. Angulus incidentiæ hic dicitur complementum anguli G H A ad rectum, ſeu angulus quem linea G H conſtituit cum rectâ ad planum incidentiæ A a perpendiculariter erectâ in H. Angulus emergentiæ eſt etiam angulus K I M, quem linea directionis corporis emergentis, efficit cum rectâ I M ad planum emergentiæ B b, perpendiculari in I.

(e) * *Et emergat ſecundum lineam.* Patet rectas G H, I K ſeu corporis in H & I directiones, curvam H I in punctis H, I contingere.

De Motu Corporum. *L*. Centro *L* intervallo *LI* deſcribatur circulus, ſecans tam *HM* in *P* & *Q*, quam *MI* productam in *N*; & primò ſi attractio vel impulſus ponatur uniformis, erit (ex demonſtratis *Galilæi*) (f) curva *HI* parabola (g) cujus hæc eſt proprietas, ut rectangulum ſub dato latere recto & lineâ *IM* æquale ſit *HM* quadrato; ſed & linea *HM* biſecabitur in *L*. Unde ſi ad

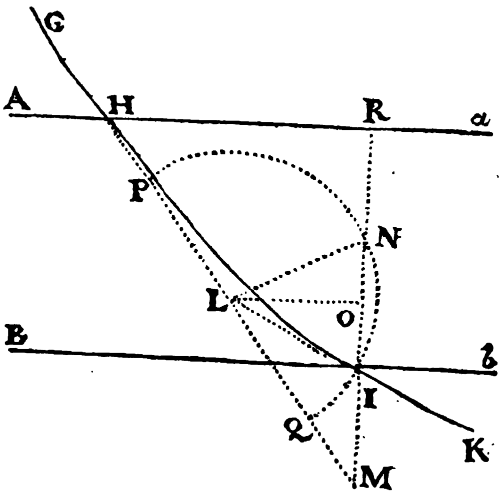


(f) * *Curva HI parabola*, cujus diameter I R, patet (per not. 40.).

(g) * *Cujus hæc eſt proprietas &c.* Ductis per punctum H diametro H T, & rectâ H V ad alteram diametrum I R ordinatim applicata, atque ex puncto I ad diametrum HT ordinatâ IT, erit ob parallelas MI, HT (per th. 1. de parabolâ) & parallelas MH, IT (per lem. 4. de conic.) MI = HT & I T = M H (per 34. 1. Elem.); ſed (per theor. 1. de parabolâ) quadratum ordinatæ TI æquale eſt rectangulo ſub dato latere recto diametri H T & abſciſsâ H T, ergò rectangulum ſub dato latere recto & lineâ M I æquale eſt H M quadrato. Et quoniam HM parabolam tangit in H eſtque proindè (per cor. 1. lem. 5. de conic.) I M = V I, & H V parallela L I, erit quoque H L = L M. Q. E. D.

559. Ut latus rectum diametri H T in variis angulis incidentiæ datum ſit, oportet corporis parabolam deſcribentis velocitatem in puncto H, & plani incidentiæ A a vim attractricem eſſe datas. His autem datis, datum eſſe hoc latus rectum ità demonſtratur. Per punctum X in diametro

ad MI demittatur perpendiculum LO, (h) æquales erunt MO, OR; & additis (i) æqualibus ON, OI, fient totæ æquales MN, IR. Proinde cum IR detur, datur etiam MN; eſtque rectangulum NMI ad rectangulum ſub latere recto & IM, hoc eſt, ad HMq, in datâ ratione. (k) Sed rectangulum NMI æquale eſt rectangulo PMQ, id eſt, differentiæ quadratorum MLq, & PLq ſeu LIq; & HMq datam rationem habet ad ſui ipſius quartam partem MLq: ergo datur ratio $MLq-LIq$ ad MLq, (l) & convertendo ratio LIq ad MLq, & ratio dimidiata LI ad ML. Sed in omni triangulo LMI, ſinus angulorum ſunt proportionales lateribus oppoſitis. Ergo datur ratio ſinus anguli incidentiæ LMR ad ſinum anguli emergentiæ LIR. *Q. E. D.*



Caſ. 2. Tranſeat jam corpus ſucceſſivè per ſpatia plura paral-

tro H T datum, agatur ordinatim applicata X E parabolæ occurrens in E, & per E ducatur E D parallela X H & tangenti H M occurrens in D, ac proindè æqualis datæ X H. Jam verò H X ſeu D E, eſt ſpatium quod corpus vi attractrice deſcribit eodem tempore dato quo motu uniformi projectionis percurrit HD, ideóque datis vi attractrice & velocitate projectionis, data quoque erit linea H D in quovis incidentiæ angulo G H T. Eſt autem latus rectum diametri H T tertia proportionalis ad abſciſſam H X, & ordinatam X E ſeu H D. Ergò datis vi attractrice & velocitate projectionis, datum ſeu conſtans eſt latus rectum diametri H T. Q. E. D.

(h) * *Æquales erunt MO, OR* (per prop. 2. lib. 6. Elem.)

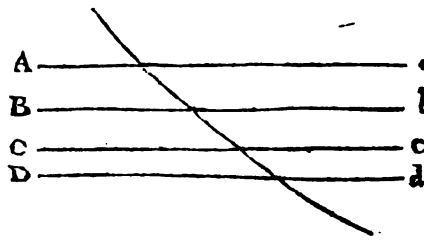
(i) * *Æqualibus ON, OI.* Per prop. 3. lib. 3. Elem.

(k) * *Sed rectangulum NMI æquale eſt rectangulo PMQ*, (per cor. 1. prop. 36. lib. 3. Elem.) *id eſt, differentiæ quadratorum* ML^2 *&* PL^2, eſt enim $PM = ML + PL$, & $QM = ML - LQ = ML - PL$; Quare $PM \times QM = ML^2 - PL^2$. (Per Corol. 6. 2i. Elem.)

(l) * *Et convertendo.* Sint enim A & B, quantitates datæ, & $ML^2 - LI^2 : ML^2 = A^2 : B^2$, erit $ML^2 : LI^2 = B^2 : B^2 - A^2$, quæ eſt ratio data.

DE MOTU CORPORUM.

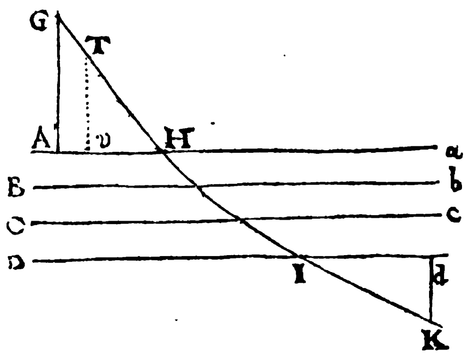
rallelis planis terminata, *AabB*, *BbcC*, &c. & agitetur vi quæ ſit in ſingulis ſeparatim uniformis, at in diverſis diverſa; & per jam demonſtrata, ſinus incidentiæ in planum primum *Aa* erit ad ſinum emergentiæ ex plano ſecundo *Bb*, in datâ ratione; & hic ſinus, qui eſt ſinus incidentiæ in planum ſecundum *Bb*, erit ad ſinum emergentiæ ex plano tertio *Cc*, in datâ ratione; & hic ſinus ad ſinum emergentiæ ex plano quarto *Dd*, in datâ ratione; & ſic in infinitum: & (m) ex æquo, ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo in datâ ratione. Minuantur jam planorum intervalla & augeatur numerus in infinitum, eò ut attractionis vel impulſus actio, ſecundum legem quamcunque aſſignatam, continua reddatur; & ratio ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo, ſemper data exiſtens, etiamnum dabitur. *Q. E. D.*



PROPOSITIO XCV. THEOREMA XLIX.

Iiſdem poſitis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam eſt ad ejus velocitatem poſt emergentiam, ut ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ.

Capiantur *AH*, *Id* æquales, & erigantur perpendicula *AG*, *dK* occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ *GH*, *IK*, in *G* & *K*. In *GH* capiatur *TH* æqualis *IK*, & ad planum *Aa* demittatur normaliter *Tv*. Et (per legum corol 2.) diſtinguatur motus corporis in duos,



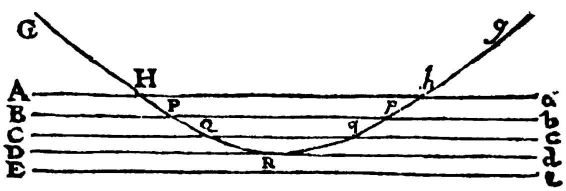
(m) * *Et ex æquo.* Sint quantitates datæ A, B, C, D, &c. Sinus incidentiæ in planum primum S, ſinus emergentiæ ex ſecundo plano, idem qui ſinus incidentiæ in ſecundum planum T, & ità porrò ſinus ſint S, T, V, X, &c. ponaturque S : T = A : B, T : V = B : C, V : X = C : D, & erit, ex æquo, S : X = A : D.

unum planis Aa, Bb, Cc, &c. perpendicularem, alterum iiſdem parallelum. Vis attractionis vel impulſus, agendo ſecundum lineas perpendiculares, nil mutat motum ſecundum parallelas, & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa ſecundum parallelas intervalla, quæ ſunt inter lineam AG & punctum H, interque punctum I & lineam dK; (n) hoc eſt, æqualibus temporibus deſcribet lineas GH, IK. Proinde velocitas ante incidentiam eſt ad velocitatem poſt emergentiam, ut GH ad IK vel TH, id (o) eſt, ut AH vel Id ad vH, hoc eſt (reſpectu radii TH vel IK) (p) ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ. *Q. E. D.* LIBER PRIMUS. PROP. XCVI.] THEOR. L.

PROPOSITIO XCVI. THEOREMA L.

Iiſdem poſitis, & (q) quod motus ante incidentiam velocior ſit quam poſtea, dico quod corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.

Nam concipe corpus inter parallela plana Aa, Bb, Cc, &c. deſcribere arcus parabolicos, ut ſupra; ſintque arcus illi



HP, PQ, QR, &c. Et ſit ea lineæ incidentiæ GH obliquitas ad planum primum Aa, ut ſinus incidentiæ ſit ad radium circuli, cujus eſt ſinus, in eâ ratione quam habet idem ſinus

(n) * *Hoc eſt, æqualibus temporibus.* Quoniam motu compoſito corpus fertur per lineas G H & I K, eodem tempore deſcribit G H quo A H, & I K quo I D, ſed (ex Dem.) tempora quibus conficiuntur intervalla parallela & æqualia A H, I D æquantur, ergò corpus æqualibus temporibus deſcribit lineas G H & I K.

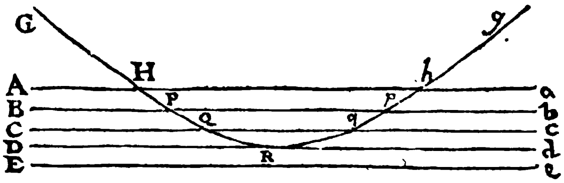
(o) * *Id eſt ut AH vel Id ad vH.* Per prop. 2. lib. 6. Elem.

(p) * *Ut ſinus emergentiæ.* Eſt enim angulus v T H anguli T H v, & angulus I K d anguli K I d, complementum ad rectum, & proindè (558) prior eſt æqualis angulo incidentiæ, poſterior eſt æqualis angulo emergentiæ.

(q) * *Et quod motus antè incidentiam &c.* Ut angulus emergentiæ ſemper creſcat (prop. 95.) & ipſius proindè complementum ad rectum ſemper decreſcat in tranſitu corporis per diverſa media.

DE MOTU CORPORUM.

ſinus incidentiæ ad ſinum emergentiæ ex plano *Dd*, in ſpatium *DdeE*: & ob ſinum emergentiæ jam factum æqualem radio, angulus emergentiæ erit rectus, ideoque linea emergentiæ coincidet cum plano *Dd*. Perveniat corpus ad hoc planum in puncto *R*; & quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perſpicuum eſt quod corpus non poteſt ultra pergere verſus planum *Ee*. Sed nec poteſt idem pergere in lineâ emergentiæ *Rd*, propterea quod perpetuò attrahitur vel impellitur (r) verſus medium incidentiæ. Revertetur itaque inter plana *Cc*, *Dd*, deſcribendo arcum parabolæ *QRq*, (ſ) cujus vertex principalis (juxta demonſtrata *Galilæi*) eſt in *R*; ſecabit planum *Cc* in eodem angulo in *q*, ac prius in *Q*; dein pergendo in arcubus parabolicis *qp*, *ph*, &c. arcubus prioribus *QP*, *PH* ſimilibus & æqualibus, ſecabit reliqua plana in iiſdem angulis in *p*, *h*, &c. ac prius in *P*, *H*, &c. emergetque tandem eâdem obliquitate in *h*, quâ incidit in *H*. Concipe jam planorum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. intervalla in infinitum minui & numerum augeri, eo ut actio attractionis vel impulſus ſecundum legem quamcunque aſſignatam continua reddatur; & angulus emergentiæ ſemper angulo incidentiæ æqualis exiſtens, eidem etiamnum manebit æqualis. *Q. E. D.*



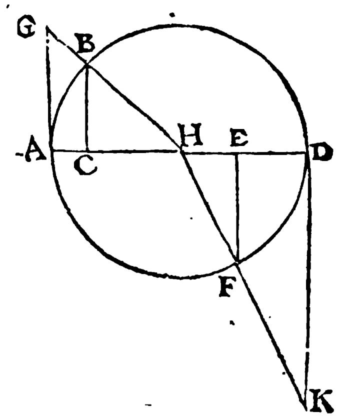
Scho-

(r) * *Verſus medium incidentiæ* v. gr. Cc.

(ſ) * *Cujus vertex principalis.* Quoniam enim (ut patet ex not. 40.) omnes diametri parabolæ QRq ſunt ad baſim Qq perpendiculares, erit Qq ad axem ordinatim applicata; cumque recta DRd ipſi Qq parallela parabolam tangat in R, (40) erit R vertex principalis (per lem. 4. de conic.) & propterea velocitates corporis in locis Q & q à vertice R æquè remotis æquales erunt, & directiones illius ad lineam Qq æque inclinatæ: Inſuper velocitas perpendicularis quâ corpus ex ſolâ vi attractrice ad planum Pp urgetur, iiſdem gradibus creſcit per totum ſpatium qp, quibus antè decreverat per ſpatium æquale PQ. Quarè corpus *pergendo in arcubus parabolicis* &c.

Scholium.

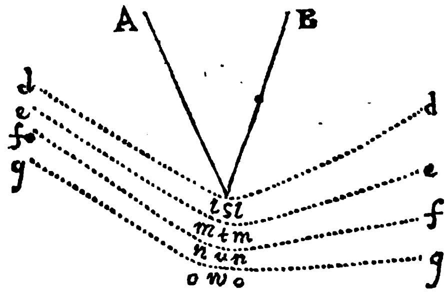
Harum attractionum haud multum diſſimiles ſunt lucis reflexiones & refractiones, factæ ſecundum datam ſecantium rationem, ut invenit *Snellius*, (t) & per conſequens ſecundum datam ſinuum rationem, ut expoſuit *Carteſius*. Namque lucem ſucceſſivè propagari & ſpatio quaſi ſeptem vel octo minutorum primorum à ſole ad terram venire, (u) jam conſtat per phænomena ſatellitum *Jovis*, obſervationibus diverſorum aſtronomorum confirmata. Radii autem in aëre exiſtentes (uti dudum *Grimaldus*, luce per foramen in tenebroſum cubiculum admiſſâ, invenit, & ipſe quoque expertus ſum) in tranſitu ſuo prope corpo-



(t) * *Et per conſequens.* Lucis radius G H incidat in planum refringens AD, ſitque radius refractus H K. Centro H & radio quovis H A, circulus deſcribatur planum ſecans in A & D radioſque lucis in B & F. Erigantur ad planum perpendicula A G, C B, E F, D K. Villebrordus Snellius, referente Iſaaco Voſſio in ſuâ diſſertatione de lucis naturâ & proprietate, invenerat ſecantes GH, HK angulorum G H A, K H D, eſſe in datâ ratione. Verùm indè ſequitur quod Carteſius poſteà vulgavit, datam quoque eſſe rationem linearum CH, HE quæ ſunt ſinus angulorum incidentiæ CBH, & emergentiæ HFE (558). Nam BH:GH=CH:AH (ſeu BH) & KH:FH (ſeu BH)=HD (ſeu BH):HE, & ex æquo, KH:GH =CH:HE. Quarè datâ ratione GH ad KH, datur quoque ratio HE ad CH.

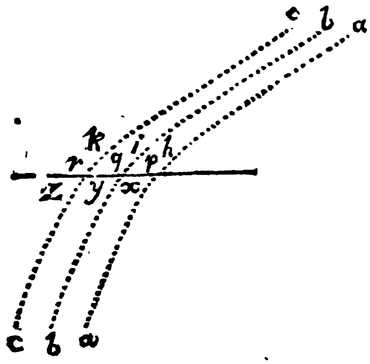
(u) * *Jam conſtat per phænomena.* Jupiter cum ſuis quatuor ſatellitibus circà ſolem ceù centrum revolvitur in trajectoriâ quæ tellurem ambitu ſuo complectitur, undè fit ut perpetuò mutetur Jovis à tellure diſtantia, quæ, cæteris paribus, minima eſt, tellure ſolem inter & Jovem poſitâ, maxima verò, ſole inter Jovem & tellurem locato, atque harum diſtantiarum differentia orbis magni diametro; ſeu duplæ diſtantiæ ſolis à terrâ æqualis eſt. Si igitur lucis propagatio inſtantanea non eſt, ſed ſucceſſiva, & per orbis magni diametrum ſenſibili aliquo tempore diffundatur, neceſſe eſt ut ſatellitis Eccliptis, quæ contingit dum Jovis umbram ſubit, tardiùs à nobis videatur in majori illâ Jovis diſtantiâ, citiùs in minori, atque itâ rem ſe habere Roemerus aliique deindè plures aſtronomi obſervarunt. Cæterum alii cauſæ præter ſucceſſivam lucis propagationem inæqualitatem illam ſatellitum tribuendam eſſe contendit Clariſſ. Maraldus in comm. Pariſ. 1707. quod etiam jam antea Magno Caſſino viſum fuerat. Sed Clariſſimus Granjean ejus argumentis reſpondet in comm. Pariſ. 1732. horum diſſertationes videſis.

porum vel opacorum vel perſpicuorum angulos (quales ſunt nummorum ex auro, argento & ære cuſorum termini rectanguli circulares, & cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora, quaſi attracti in eadem; & ex his radiis, qui in tranſitu illo propius accedunt ad corpora incurvantur magis, (x) quaſi magis attracti, ut ipſe etiam diligenter obſervavi. Et qui tranſeunt ad majores diſtantias minus incurvantur; & ad diſtantias adhuc majores incurvantur aliquantulum ad partes contrarias, & tres colorum faſcias efformant. In figura deſignat *s* aciem cultri vel cunei cujuſvis *AsB*; & *gowog*, *fnunf*, *emtme*, *dlsld* ſunt radii, arcubus *owo*, *mtm*, *lsl* verſus cultrum incurvati; idque magis vel minus pro diſtantia eorum à cultro. Cum autem talis incurvatio radiorum fiat in aere extra cultrum, debebunt etiam radii, qui incidunt in cultrum, prius incurvari in aere quam cultrum attingunt. Et par eſt ratio incidentium in vitrum. (z) Fit igitur refractio, non in puncto incidentiæ, ſed paulatim per continuam incurvationem radiorum, factam



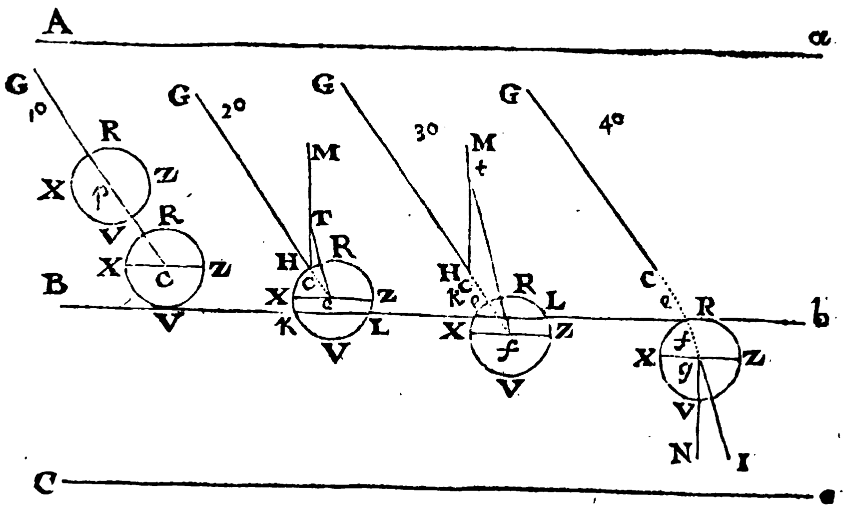
(x) * *Quaſi magis attracti.* Alia egregia experimenta vide in Newtoni opticâ initio lib. 3. & quæſt. 29.

(z) * *Fit igitur refractio & reflexio.* Vide Prop. 8. & 9. Partis 3æ. Lib. optices Newtoni. Sed ut res clariùs intelligatur, ſint media duo contigua, A a b B, B b c C, planis parallelis terminata, & quorum talis ſit attractionis lex ut ultrà diſtantiam p R à medio altetutro evaneſcat ejus medii attractio. Itaque centro p & radio pR (fig. 1.) deſcribatur circulus vel potiùs ſphæra RZVX quæ planum B b non attingat, corpus p verſus omnia hujus ſphæræ puncta æqualiter attractum, nullam in partem inflectetur, ſed manebit in lineâ rectâ G C, ſecundum quam moveri ſupponitur. Si in eâdem rectâ G C, capiatur punctum C, à plano B b remotum diſtantiâ CV=PR, ſitque vis attractiva versùs medium B b c C, major vi attractivâ medii A a b B, in eo ipſo loco c corpus a rectâ viâ G c deflectere curvamque lineam deſcribere incipiet. Perveniat (2°.) corpus ex C in e, per curvam c e, & ductâ H M ad plana A a, B b perpendiculari, ac per punctum e, rectâ e T, quæ curvam c e tangat in e, & perpendiculo H M occurrat in T, erit angulus e T c minor angulo incidentiæ G H M; nam cum ſegmentum K V L, in hemiſphærio XVZ magis trahat versùs planum B b, quam ſegmentum ipſi æquale in hemiſphærio XRZ, (ex hyp.) versùs planum A a, manifeſtum eſt curvam deorſum inflecti, ideóque tangentem e T à radio inciden-



factam partim in aere antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, poſtquam illud ingreſſi ſunt: uti in radiis *ckzc*, *biyb*, *ahxa* incidentibus ad *r*, *q*, *p*, & inter *k* & *z*, *i* & *y*, *h* & *x*, incurvatis, delineatum eſt. Igitur ob analogiam quæ eſt inter propagationem radiorum lucis & progreſſum corporum, viſum eſt propoſitiones ſequentes in uſus opticos ſubjungere; interea de naturâ radiorum (utrum ſint corpora necne) nihil omnino diſputans, ſed trajectorias corporum trajectoriis radiorum perſimiles ſolummodo determinans.

PRO-



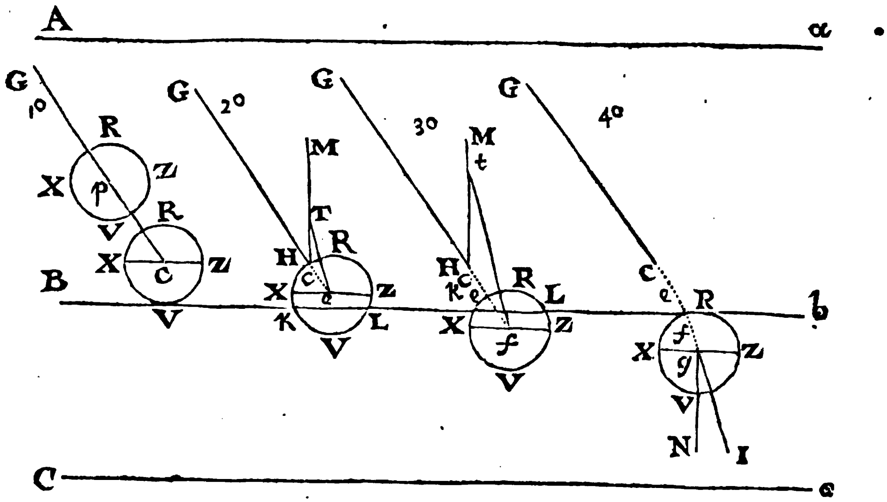
te GC, verſùs ſuperiora M recedere. Similiter ubi corpuſculum C eſt in f (3°.) intrà medium BbcC, magis trahitur verſùs planum Cc, ab hemiſpherio XVZ, quam retrahitur verſùs planum Bb, ab altero hemiſpherio XRZ, cujus ſegmentum kRL, minus trahit, quam æquale ſegmentum in hemiſpherio XVZ; quarè angulus Htf, quem tangens ft cum perpendiculo HM efficit, adhuc minor eſt quam angulus HTe (2°). Sed cum tandem corpuſculum c pervenit in g (4°), locum à plano Bb remotum diſtantiâ maximâ gR = pR, tum corpus p, æqualiter undique attractum (ex hypotheſi) ſemitam non ampliùs mutat, ſed rectâ movetur per

DE MOTU CORPORUM.

PROPOSITIO XCVII. PROBLEMA XLVII.

Poſito quod ſinus incidentiæ in ſuperficiem aliquam ſit ad ſinum emergentiæ in datâ ratione; quodque incurvatio viæ corporum juxta ſuperficiem illam fiat in ſpatio breviſſimo, quod ut punctum conſiderari poſſit: determinare ſuperficiem, quæ corpuſcula omnia de loco dato ſucceſſivè manantia convergere faciat ad alium locum datum.

Sit *A* locus à quo corpuſcula divergunt; *B* locus in quem convergere debent; *C D E* curva linea quæ circa axem *A B*

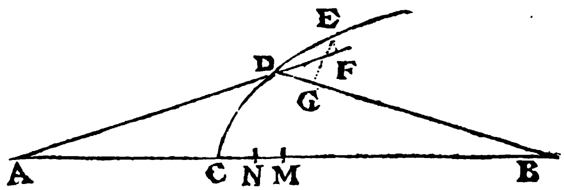


g I, quæ curvam c e f g tangit in g, eſtque angulus N g I, quem g I cum g N ad B b perpendiculari conſtituit, ſeu angulus emergentiæ minor adhuc angulo H t f (3°). Oppoſitum eveniet, ſi medium B b c C, minus trahat quam medium A a b B, & refractio in reflexionem mutari poterit. Fit igitur refractio & reflexio non in puncto incidentiæ R (4°). Sed paulatim per continuam incurvationem radiorum, ut Newtonus docet. Quod ſi itaque certiſſimis experimentis conſtet radios lucis à corporibus quaſi attrahi in minimis diſtantiis, Newtonus veram hic demonſtravit cauſam illarum lucis affectionum, quibus contingit ut radii incidentes in ſuperficiem corporis reſiliant in plano ad eam verticali, ſub angulis reflexionis æqualibus angulis incidentiæ, atque ut ex uno medio in aliud diverſæ denſitatis aut diverſæ vis trahentis, obliquè penetrantes refrangantur in plano ad ſuperficiem, quæ duo media dirimit itidem recto, ità ut ſinus incidentiæ & emergentiæ datam ſervent rationem. Satis enim liquet plana linearum GHI & GHRh, in ſuperioribus propoſitionibus, perpendicularia eſſe ad plana A a, B b, ut planum parabolæ quam gravia in hypotheſi Galilæi deſcribunt perpendiculare eſt ad horizontem. Quænam verò cauſa ſit attractionis aut tendentiæ vel impulsûs radiorum lucis in corpora: alia quæſtio eſt quam hic agitare minimè neceſſe eſt, quâque ſepoſitâ, interim ex certis experimentis mathematicâ demonſtratione, oſtenſa eſt reflexionis & refractionis lex & cauſa;

quem-

revoluta deſcribat ſuperficiem quæſitam; D, E curvæ illius puncta duo quævis; & EF, EG perpendicula in corporis vias AD, DB demiſſa. Accedat punctum D ad punctum E; & lineæ DF, quâ AD augetur, ad lineam DG, quâ DB diminuitur, (y) ratio ultima erit eadem, quæ ſinus incidentiæ ad ſinum emergentiæ. Datur ergo ratio incrementi lineæ AD ad decrementum lineæ DB; & propterea ſi in axe AB ſumatur ubivis punctum C, per quod curva CDE tranſire debet, & capiatur ipſius AC incrementum CM ad ipſius BC decrementum CN in datâ illâ ratione, centriſque A, B, & intervallis AM, BN deſcribantur circuli duo ſe mutuo ſecantes in D; (a) punctum illud D tanget curvam quæſitam CDE, eandemque ubivis tangendo determinabit. *Q. E. I.*

LIBER PRIMUS. PROP. XCVII. PROBL. XLVII.



Corol. 1 Faciendo autem ut punctum A vel B, nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti C,

quemadmodum ſemel cognitis (per experientiam) gravitate atque elaterio aëris, recte q is aſcenſus & deſcenſus liquorum in tubis vacuis cauſam atque legem demonſtraſſe cenſetur, dum ex iis aeris proprietatibus quarum cauſas ignorat, hæc phænomena accurate deduxit. Nam juxtà rectam philoſophandi rationem, in naturæ phænomena primum debemus diligenter inquirere, ut poſteà motus corporum eorumque leges & cauſas accuratius inveſtigare & cognoſcere poſſimus. Cæterum in phænomena reflexionis ac refractionis lucis eorumque cauſas inquiſierunt philoſophi ac Mathematici celeberrimi, Carteſius cap. 2°. dioptrices per leges generales reſolutionemque motuum, & ſupponendo lumini minorem reſiſtentiam in denſioribus quam in rarioribus mediis objici; Leibnitzius in Actis eruditorum Lipſienſibus an. 1682. pag. 185 hâc factâ hypotheſi, quod lumen à puncto radiante ad punctum illuſtrandum viâ omnium facillimâ perveniat, quâ etiam uſus erat anteà Fermatius; Hugenius in tractatu de lumine per naturam undulationis luminis rem totam explicat, & Joannes Bernoullius in Actis Lipſ. an. 1701. ex æquilibrii fundamento eam ingenioſiſſime deduxit.

(y) * *Ratio ultima erit eadem.* Nam lineolâ DE pro radio ſeu ſinu toto uſurpatâ, lineolæ DF, DG ſunt ſinus angulorum DEF, DEG; ſed angulus DEF eſt complementum ad rectum anguli EDF, ſeu ADC, ideoque æqualis eſt angulo incidentiæ, & angulus DEG eſt complementum ad rectum anguli EDG, ideoque æqualis eſt angulo emergentiæ (558). Ergò lineæ DF ad lineam DG ratio ultima erit eadem quæ ſinus incidentiæ ad ſinum emergentiæ, ideóque data. Et hinc (per cor. Lem. 4.) datur ratio incrementi totius finiti lineæ AD, ad decrementum totum finitum lineæ DB.

(a) * *Punctum illud D.* Atque eodem modo, aſſumendo varia incrementa CM, & decrementa CN, puncta diverſa lineæ CDE determinabuntur. Si verò centro B & radio quovis deſcribatur circulus, curvam CE ſecans in E, & lineam AB

in

DE MOTU CORPORUM.

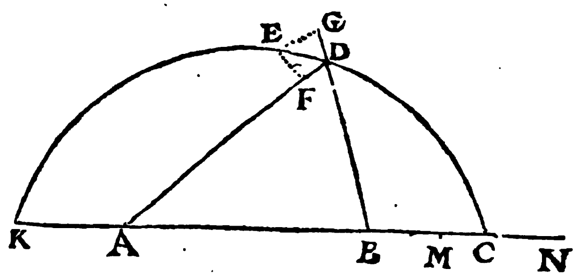
(b) habebuntur figuræ illæ omnes, quas *Carteſius* in optica & geometria ad refractiones expoſuit. Quarum inventionem cum *Carteſius* celaverit, viſum fuit hâc propoſitione exponere.

Corol. 2. Si corpus in ſuperficiem quamvis *CD*, ſecundum lineam rectam *AD*, lege quâvis ductam incidens, emergat ſecundum aliam quamvis rectam *DK*, & à puncto *C* duci intel-

in N, & indè convolutione ſuperficiei CEN, circà axem CN ſolidum corpus conficiatur, corpuſculum ex D, per lineam D B ad centrum B circuli deſcripti tendens, non refrangetur, dum ex ſuperficie circulari concavâ E N egreditur, quod corpuſculi directio D B, ſit ad illam ſuperficiem perpendicularis, atque ita corpuſculum ſemper perveniet ad punctum B.

(b) * *Habebuntur figuræ illæ omnes.* Quas enim lineas Carteſius Geometriæ lib. 2°. Pag. 50. & ſeq. dicit A 5, A 6, vel A 7., A 8, eas Newtonus hic vocat C M, C N, & de cætero eadem eſt utriuſque authoris conſtructio. Unde manifeſtum eſt, ſi punctum C, inter puncta A & B, & punctum N inter C & M, ſita ſint, primam Carteſii ovalem Newtonianâ conſtructione deſcribi; ſi manentibus punctis A, C, B, M. punctum N, inter C & A locetur, 2^am^. ovalem Carteſianam obtineri; ſi vero punctum B ad ad alteras partes puncti C migret ultrà A, & punctum C ſit inter A & N, atque M, 3^am^. Carteſii ovalem haberi, iiſdemque poſitis,. ſi punctum N ſit inter C, & A, 4^am^. ovalem Carteſii delineari. Porrò, ſi punctum A vel B in infinitum abeat ut radii incidant vel refringantur paralleli, tum per punctum M vel N erigendum erit perpendiculum, quod circulus centro B vel A, & radio B N, vel A M, deſcriptus ſecabit in puncto quæſito D, curvæ C D E, quæ erit ellipſis vel hyperbola, ut calculo inito facilè patet, atque hæ ſunt figuræ quibus Carteſius cap. 8°. dioptrices uſus eſt.

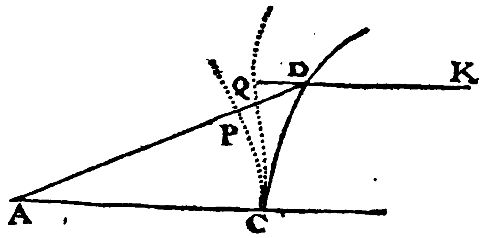
Eadem eſt demonſtratio, ſi ſuperficies CDE incidentes radios reflectit, quo caſu ſit $CN = CM$, ob angulum incidentiæ æqualem angulo emernentiæ (per prop. *96.*)



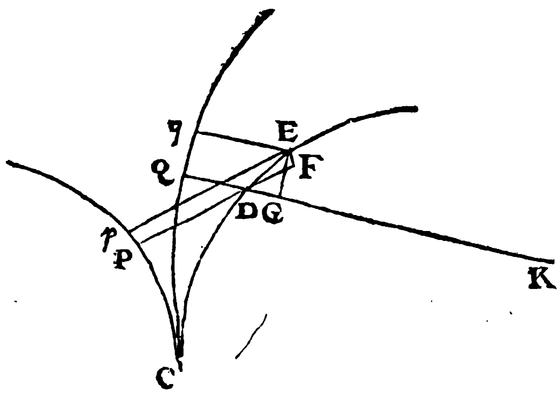
& curva C D E erit ſectio conica, videlicet hyperbola, ſi punctum C inter A & B ſitum; ellipſis, ſi extrà poſitum ſit; Parabola, ſi ellipſeos focus B in infinitum abeat, & circulus, ſi puncta A & B coeant. Nam ſi punctum C inter A & B ſitum ſit, & N inter A & C, cum ſit $AD = AM$, & $BD = BN$ (per conſtr.) rectarum A D, B D differentia data erit, ut potè æqualis $AM - BN = AC + CM - BC - CN = AC - BC$, ob $CM = CN$, ideòque curva C D E erit hyperbola cujus foci A & B, (per theor. 3. de hyperbolâ). Si punctum C inter puncta A & B poſitum non eſt, ut in hâc figurâ, rectarum A D, B D ſumma data erit, in hoc enim caſu punctum C, eſt inter N, & M, atque $AD + BD = AC - CM + BC + CN = AC + BC$. Eſt igitur C D E ellipſis cujus foci A & B, (Theor. 3. de Ellipſi) quæque foco alterutro in infinitum abeunte mutatur in parabolam & focis coeuntibus mutatur in circulum.

LIBER PRIMUS, PROP. XCVII. PROBL. XLVII.

telligantur lineæ curvæ *CP*, *CQ* ipſis *AD*, *DK* ſemper perpendiculares: (c) erunt incrementa linearum *PD*, *QD*, atque ideo lineæ ipſæ *PD*, *QD*, incrementis iſtis genitæ, ut ſinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem: & contra.



PRO-



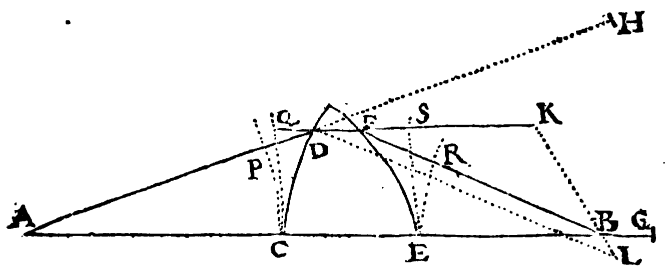
(c) 561. * *Erunt incrementa &c.* *Nam* ſi capiatur arcus quam minimus DE, atque ex puncto E in curvas CP, CQ, & in rectas PD, QK, demittantur perpendicula Ep, Eq & EF, EG, coeuntibus punctis E & D, erunt EF, Pp & EG, Qq ſibi mutuò parallelæ, & proindè PF, pE & QG, qE, æquales, ideóque DF & DG erunt rectarum PD, QD incrementa naſcentia. Sed, (ex demonſtratis ſuprà) DF eſt ad DG, ut ſinus incidentiæ ad ſinum emergentiæ, quarè incrementa linearum PD, QD, atque adeò (cor. Lem. 4.) lineæ ipſæ PD, QD, (quæ ſimul naſcuntur in puncto C) incrementis iſtis genitæ, erunt ut ſinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem, & contrà, ſi lineæ PD, QD curvis CP, CQ perpendiculares ſint ut ſinus incidentiæ & emergentiæ, erunt earum incrementa naſcentia in eâdem ſemper ratione, ac proindè ſi corpus in ſuperficiem CD ſecundum lineam PD incidat, emerget ſecundum lineam QD ſeu DK.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XCVIII. PROBLEMA XLVIII.

Iiſdem poſitis, & circa axem AB *deſcriptâ ſuperficie quâcunque attractivâ* CD, *regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato* A *exeuntia tranſire debent: invenire ſuperficiem ſecundam attractivam* EF, *quæ corpora illa ad locum datum* B *convergere faciat.*

Juncta *AB* ſecet ſuperficiem primam in *C* & ſecundam in *E*, puncto *D* utcunque aſſumpto. Et poſito ſinu incidentiæ in ſuperficiem primam ad ſinum emergentiæ ex eâdem, & (d) ſinu emergentiæ è ſuperficie ſecundâ ad ſinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data M ad aliam datam N: produc tum *AB* ad *G*, ut ſit *BG* ad *CE* ut M−N ad N; tum *AD* ad *H*, ut ſit *AH* æqualis *AG*; tum etiam *DF* ad *K*, ut ſit *DK* ad *DH* ut N ad M. Junge *KB*, & centro *D* intervallo *DH* deſcribe circulum occurrentem *KB* productæ in *L*, ipſique *DL* parallelam age *BF*: & punctum *F* tanget lineam *EF*, quæ circa axem *AB* revoluta deſcribet ſuperficiem quæſitam. *Q. E. F.*



Nam

(d) * *Et ſinu emergentiæ è ſuperficie ſecunda &c.* Eſt enim ſinus emergentiæ è ſuperficie ſecundâ EF, ad ſinum incidentiæ in eamdem, ut ſinus incidentiæ in ſuperficiem primam CD, ad ſinum emergentiæ ex eâdem. Nam ſi radius incidens AD refrangitur per DF, ob eandem rationem radius FD, incidens in D refrangetur per DA, & qui ſinus erat incidentiæ in primo caſu, fit ſinus emergentiæ in ſecundo.

Nam concipe Lineas *CP*, *CQ* ipſis *AD*, *DF* reſpectivè, & Lineas *ER*, *ES* ipſis *FB*, *FD* ubique perpendiculares eſſe, (e) ideoque *QS* ipſi *CE* ſemper æqualem; & erit (per Corol. 2. Prop. XCVII.) *PD* ad *QD* ut M ad N, (f) ideoque ut *DL* ad *DK* vel (g) *FB* ad *FK*; & (h) diviſim ut *DL* − *FB* ſeu *PH* − *PD* − *FB* ad *FD* ſeu *FQ* − *QD*; & compoſitè ut *PH* − *FB* ad *FQ*, id eſt (ob (i) æquales *PH* & *CG*, *QS* & *CE*) *CE* + *BG* − *FR* ad *CE* − *FS*. Verum (ob proportionales *BG* ad *CE* & M − N ad N) eſt etiam *CE* + *BG* ad *CE* ut M ad N: (k) ideoque diviſim *FR* ad *FS* ut M ad N, & propterea per Corol. 2. Prop. XCVII, ſuperficies *EF* cogit corpus, in ipſam ſecundum lineam *DF* incidens, pergere in linea *FR* ad locum *B*. *Q. E. D.*

Scholium. Eâdem methodo pergere liceret ad ſuperficies tres vel plures. Ad uſus autem Opticos maxime accommodatæ ſunt figuræ Sphæricæ. Si Perſpicillorum vitra Objectiva ex vitris duobus Sphæricè figuratis & Aquam inter ſe claudentibus conflentur; fieri poteſt ut à refractionibus Aquæ errores refractionum, quæ fiunt in vitrorum ſuperficiebus extremis, ſatis accuratè corrigantur. Talia autem vitra Objectiva vitris Ellipticis & Hyperbolicis præferenda ſunt, non ſolum quod facilius & accuratius formari poſſint, ſed etiam quod Penicillos radiorum extra axem vitri ſitos accuratius refringant. Verùm tamen diver-

(e) * *Ideòque QS ipſi CE ſemper æqualem.* Cum enim linea QS, ſit ſemper perpendicularis utrique lineæ CQ, ES (ex Hyp.) ea nec creſcit, nec decreſcit, ob partes curvarum in Q & S ſemper parallelas, ut patet.

(f) * *Ideoque ut DL ad DK.* Eſt enim (per conſtr.) DK ad DH, ut N ad M, & DL = DH, per conſt.

(g) * *Vel FB ad FK.* Ob parallelas DL, FB (per conſtr.)

(h) * *Et diviſim.* Cum ſit PD : QD = DH : DK = FB : FK, erit diviſim DH : DK, ſeu PD : QD = DH − FB : DK − FK = PH − PD − FB : DF, ſeu QF − QD, & compoſitè PD : QD = PH − PD + PD − FB, ſeu PH − FB : QF − QD + QD, ſeu QF = M : N.

(i) * *Ob æquales PH & CG.* Nam (per conſtr.) AH = AG, & quoniam punctum A datum eſt, eſtque AP ſemper perpendicularis ad curvam CP, liquet eam curvam eſſe circulum cujus centrum A, undè AP = AC, & hinc PH = CG; & ſimili modo patet eſſe BR = BE, ob datum punctum B.

(k) * *Ideoque diviſim &c.* Nam cum ſit (ex demonſtratis) M : N = CE + BG − FR : CE − FS = CE + BG : CE, erit diviſim M : N = FR : FS.